

Dynamics of a Nutrient-Phytoplankton Model with Asynchronous Control

Shanshan Wang

Wenzhou University, Wenzhou Zhejiang
Email: shanshan533ss@163.com

Received: Apr. 3rd, 2020; accepted: Apr. 14th, 2020; published: Apr. 21st, 2020

Abstract

In this paper, we propose a nutrient-phytoplankton model with asynchronous control. Based on the geometry method of differential equation, we analyze dynamics of the model. Here we mainly study the periodic solution when the positive equilibrium is greater than the critical value, and discuss the existence of the order-1 periodic solution under different conditions by using successor functions. The results are helpful to provide some insights into further understanding the effects of asynchronous control on the nutrient-phytoplankton dynamics in freshwater ecosystem.

Keywords

Phytoplankton, Impulsive, Successor Functions, the Order-1 Periodic Solution

一类具有异步控制的营养 - 浮游植物模型动力学研究

王珊珊

温州大学, 浙江 温州
Email: shanshan533ss@163.com

收稿日期: 2020年4月3日; 录用日期: 2020年4月14日; 发布日期: 2020年4月21日

摘要

本文构建了一类具有异步控制的营养 - 浮游植物模型。基于微分方程的几何理论, 我们分析了模型的

文章引用: 王珊珊. 一类具有异步控制的营养 - 浮游植物模型动力学研究[J]. 应用数学进展, 2020, 9(4): 527-538.
DOI: [10.12677/aam.2020.94064](https://doi.org/10.12677/aam.2020.94064)

动力学性质。我们主要研究了当平衡点的值大于临界值情况下的周期解存在性等问题。利用后继函数，我们研究了不同条件下阶一周期解存在性。本研究成果有助于理解异步控制对营养-浮游植物互作动力学性质的影响。

关键词

浮游植物, 脉冲, 后继函数, 阶一周期解

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在淡水生态系统中，浮游植物一直扮演着重要角色，它处于食物链第一营养级，通常被认为是鱼类和其他水生动物的重要食物来源[1]。此外，通过光合作用，浮游植物能够吸收大量的二氧化碳并释放氧气。然而，近些年由于浮游植物水华暴发，给环境和人类健康产生了严重的负面影响[2] [3]。

由于现代经济的快速发展和人口的急剧增加，大量的生活污水和工业污染物排入水体，导致氮、磷等营养物质在湖泊和水库中大量积累，加速了水体富营养化的进程。水体富营养化促进了浮游植物的大量繁殖，进而频繁引发浮游植物水华事件。浮游植物水华能产生一系列的严重后果，例如：导致鱼类的大量死亡[4]；此外，一些藻类还分泌毒素，导致鱼类、鸟类等动物中毒；通过食物链还能间接对人类健康造成影响[5] [6] [7] [8]等。因此，研究如何控制浮游植物的增长具有重要意义。

1932 年，Bertalanffy 首次运用数学模型研究生物系统中存在的问题[9]，数学模型在生物邻域中显示出越来越强大的生命力。近些年，越来越多的科学家试图用数学模型来研究生物种群增长和分布的动力变化过程，例如，时滞动力学模型[10] [11]、扩散动力学模型[12] [13]和脉冲动力学模型[14] [15]等。在许多现实问题中，浮游植物种群状态的变化可能既不是连续的，也不是离散的，而是同时存在的，从而导致脉冲控制动力学系统成为当前研究的热点。

脉冲控制动力学系统主要分为三类：脉冲发生在固定时刻，脉冲发生在可变时刻，依赖于状态的脉冲控制。在许多生态系统中，可以利用脉冲微分方程[16]-[25]来描述系统中发生的瞬时突变问题。近年来，对带有脉冲控制动力系统的研究取得了显著的成果。其中，许多学者对脉冲发生在固定时刻的动力系统进行了大量研究，如传染病脉冲动力学模型和药代动力学模型等[26] [27] [28]。然而，针对生态系统中的一些问题，控制措施的实施通常依据种群增长的状态，显然此时状态依赖脉冲似乎比固定周期脉冲要更适合，例如水华控制、害虫暴发控制[29] [30] [31] [32]等。

Huppert 等人[33]提出了一个 $N\text{-}P$ 模型来描述营养驱动的浮游植物水华的动力学：

$$\begin{cases} \dot{N} = a - bNP - eN, \\ \dot{P} = cNP - dP. \end{cases} \quad (1.1)$$

同时结论表明，在浮游植物暴发之前，需要大量的营养物质。也就是说，只有当营养物质超过一定的限定水平时，才会触发水华。在此模型的基础上，大量研究者通过考虑时滞或扩散等因素进一步研究 $N\text{-}P$ 模型的动力学性质[34]-[39]。给予状态依赖脉冲微分方程，本文在模型(1.1)的基础上提出了一类具有异步控制的营养-浮游植物动力学模型，如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = I - axy - ex, \\ \frac{dy}{dt} = \varepsilon axy - my. \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} y \neq h_1, h_2, \\ \Delta x = -p_1 x, \\ \Delta y = 0. \end{array} \right\} y = h_1, \quad \left. \begin{array}{l} \Delta x = -p_2 x, \\ \Delta y = -qy. \end{array} \right\} y = h_2. \quad (1.2)$$

其中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别为营养水平和浮游植物密度, I 为流入系统中的营养, a 为浮游植物的吸收率, e 为营养的损失率, ε 为转化率, m 为浮游植物的死亡率, 且 h_1 为预警值, h_2 为暴发临界值, 当浮游植物达到预警值 h_1 时, 采取控制措施, 使得营养和浮游植物密度为 $(1-p_1)x$ 和 h_1 , 当浮游植物达到临界值 h_2 时, 在采取控制措施后, 营养和浮游植物密度为 $(1-p_2)x$ 和 $(1-q)h_2$, 其中 $p \in (0,1)$ 且 $q \in (0,1)$ 。

本文共分为四部分: 在第二部分介绍基础知识, 包括一些主要定义与引理; 第三部分, 对系统进行动力学分析; 在第四部分, 得出结论。

2. 基础知识

定义 2.1 [40] [41] 设状态脉冲微分方程

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} (x, y) \notin M\{x, y\}, \\ \Delta x = \alpha(x, y), \\ \Delta y = \beta(x, y). \end{array} \right\} (x, y) \in M\{x, y\}. \quad (2.1)$$

我们把由“状态脉冲微分方程”(2.1)所定义的解映射所构成的“动力学系统”称为半连续动力系统, 记为 (Ω, f, φ, M) 。我们规定系统的映射初始点 P 不能在脉冲集上, $P \in \Omega = R_+^2 \setminus M\{x, y\}$, φ 为连续映射, $\varphi(M) = N$, φ 称为脉冲映射。这里 $M\{x, y\}$ 和 $N\{x, y\}$ 为 $R_+^2 = \{(x, y) \in R^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ 平面上的直线或曲线, $M\{x, y\}$ 称为脉冲集, $N\{x, y\}$ 称为相集。

定义 2.2 [42] 统(2.1)中, 在相集 N 上建立坐标系, 假设相集 N 交 x 轴于点 Q , 令点 Q 的坐标等 0。 $\forall A \in N$, 令点 A 的坐标等于点 A 与点 Q 的距离, 记为 a 。假设过点 A 的系统的轨线经过 k 次脉冲作用后交 N 于点 A_k , 记的坐标为 a_k , 则点 A_k 称作点 A 的阶 k 后继点; 函数 $F_k(A)$ 称作点 A 的阶 k 后继函数, $F_k(A) = a_k - a$ 。

引理 2.1 若 $F(A) = 0$, 则从 A 点出发的轨线是系统的阶 1 周期解。

引理 2.2 根据引理 1.1 可知 (X, Π) 是半连续动力系统, 若存在 $\exists A_1 \in N, A_2 \in N$, 满足 $F(A_1) \cdot F(A_2) < 0$, 则在 A_1, A_2 之间存在 A , 使得 $F(A) = 0$, 根据引理 2.1, 系统存在阶 1 周期解。

3. 动力学分析

显然, $E_0\left(\frac{I}{e}, 0\right)$ 和 $E^*\left(\frac{m}{\varepsilon a}, \frac{\varepsilon a I - em}{am}\right)$ 是模型(1.2)的平衡点, 且可以得到三条等倾线: $L_1: y = \frac{I}{ax} - \frac{e}{a}$,

$L_2: x = \frac{m}{\varepsilon a}$ 和 $L_3: y = 0$ 。当 $y = h_1$ 时, $(x, y) = \phi(x, h_1) = ((1-p_1)x, h_1)$, 当 $y = h_2$ 时,

$(x, y) = \varphi(x, h_1) = ((1-p_2)x, (1-q)h_2)$, 记脉冲集 $y = h_1$ 为 P , $y = h_2$ 为 M , $(1-q)h_2$ 为相集 N 。

模型(1.2)水平等倾线与相集 N 交于点 A^1 ，与脉冲集 P 交于点 A^2 。当 $(1-q)h_2 < h_1 < h_2$ 时，在相集 N 上存在点 A^3 ，使得从点 A^3 出发的轨线首次交脉冲集 P 于点 A^4 。由于脉冲作用到达点 A^2 ，根据微分方程轨线的不相交性，以及脉冲函数 ϕ 可知，对于位于 A^3 左侧的点(如图 1 所示)，任取点 A 位于相集 N 上的子集合 N_1 ，显然在 N_1 上有 $0 < x < x_{A^3}$ 。从点 A 出发的轨线 $\pi(A, t)$ 交脉冲集 P 于点 A_1 ，由于脉冲作用到达 A_2 。点 A_2 出发的轨线 $\pi(A_2, t)$ 交脉冲集 M 于点 A_3 ，由于脉冲作用交 N 于点 A_4 。此时，存在映射 $f: N_1 \rightarrow N$ ，即对 $\forall A \in N_1, \exists A_4 \in N$ ，使得 $A_4 = f(A) = \varphi(\pi(\phi(\pi(A))))$ ，其中 $A_1 = \pi(A, t_1)$ ， $A_2 = \phi(A_1)$ ， $A_3 = \pi(A_2, t_2)$ ， $A_4 = \varphi(A_3)$ 。

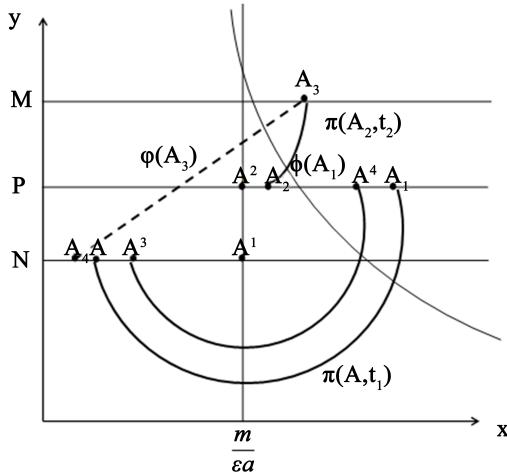


Figure 1. Track trend diagram on N
图 1. 在 N 上的轨线走向图

但是在脉冲集 P 上，当 $x_{A^2} < x < x_{A^4}$ 时， P 上存在子集合 P_1 ，存在一个映射 $g: P_1 \rightarrow P$ (如图 2 所示)， $\forall A_1 \in P_1, \exists A_3 \in P$ ，使得 $A_3 = g(A_1) = \pi(\phi(A_1))$ ，其中 $A_2 = \phi(A_1)$ ， $A_3 = \pi(A_2, t_1)$ 。

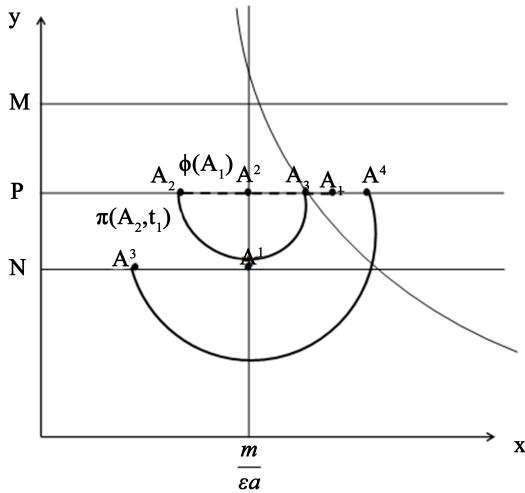


Figure 2. Track trend diagram on P
图 2. 在 P 上的轨线走向图

引理 3.1 映射 $f: N_1 \rightarrow N$ 为连续的一一映射。

首先本文考虑 $y^* > h_2$ ，对 N_1 上任意点 A ，从点 A 出发的轨线一定与脉冲集 M 相交，然后通过脉冲

作用到达相集 N 上。若在 N_1 存在两点 F, G , 使得 $f(F)=f(G)$, 由 φ 可知, $\varphi^{-1}(f(F))=\varphi^{-1}(f(G))$, 这个时候, 从两个不同点出发的轨线交于同一点, 与微分方程轨线的不相交性互相矛盾, 所以映射 f 为一一映射。

接下来考虑连续性:

因为 $C=\varphi(B)$ 在 $B=B_0$ 处连续, 所以 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta_1>0$, 当 $|B-B_0|<\delta_1$ 时, 有 $|\varphi(B)-\varphi(B_0)|<\varepsilon$, 由于微分方程的解对初始条件是连续依赖的, 所以 $\pi(D)$ 在 $D=D_0$ 处连续。因此, 对 $\delta_1>0$, $\exists \delta_2>0$, 当 $|D-D_0|<\delta_2$ 时, 有 $|\pi(D)-\pi(D_0)|<\delta_1$ 。同理, 根据 $\phi(E)$ 在 $E=E_0$ 处连续性, 对 $\delta_2>0$, $\exists \delta_3>0$, 当 $|E-E_0|<\delta_3$ 时, 有 $|\phi(E)-\phi(E_0)|<\delta_2$ 。最后, 根据微分方程的解对初始条件是连续依赖的, 可知, $\exists \delta>0$, 当 $|A-A_0|<\delta$ 时, 有 $|\pi(A)-\pi(A_0)|<\delta_3$, 其中 $E_0=\pi(A_0, t_1)$, $D_0=\phi(E_0)$, $B_0=\pi(E_0, t_2)$, $C_0=\varphi(B_0)$ 。所以, $\exists \delta>0$, 当 $|A-A_0|<\delta$ 时, 有 $|\pi(A)-\pi(A_0)|=|\pi(A)-E_0|=|\pi(A)-E_0|<\delta_3$, 则 $|\phi(\pi(A))-\phi(\pi(A_0))|=|\phi(\pi(A))-\phi(E_0)|=|\phi(\pi(A))-D_0|<\delta_2$ 。近一步, 我们有 $|\pi(\phi(\pi(A)))-\pi(\phi(\pi(A_0)))|=|\pi(\phi(\pi(A)))-\pi(D_0)|=|\pi(\phi(\pi(A)))-B_0|<\delta_1$ 。因此, $\forall \varepsilon>0$, $|\phi(\pi(\phi(\pi(A))))-\phi(\pi(\phi(\pi(A_0))))|=|\phi(\pi(\phi(\pi(A))))-\phi(B_0)|<\varepsilon$, 并 $\exists \delta>0$, 当 $|A-A_0|<\delta$ 时, 有 $|f(A)-f(A_0)|<\varepsilon$, 所以映射 f 为连续的。

综上所述, 映射 $f:N_1 \rightarrow N$ 为连续的一一映射。

证毕。

引理 3.2 映射 $g:P_1 \rightarrow P$ 为连续的一一映射。

证明: 由于此证明方法与上述证明相似, 故省略。

由上述映射 f, g 为连续的一一映射, 对 $\forall A \in N_1$ 或 $\forall A \in P_1$, 相集 N 上的阶一后继函数 $F_1(A)=f(A)-A$ 与集合 P 上的阶一后继函数 $F_1(A)=g(A)-A$ 为连续的, 可得以下引理。

引理 3.3 在系统(1.2)中, $\forall A \in N_1$ 或 $\forall A \in P_1$, 其阶一后继函数 $F_1(A)$ 是连续的。

接下来我们探讨系统(1.2)中的周期解, 首先, 由于 $x^+=(1-p_1)x$, 对任意 $p_1 \in (0,1)$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 $x^+ \rightarrow 0$ 。因此, 当 p_1 为固定值时, 在相集 N 上存在点 A^3 , 使得从点 A^3 出发的轨线交脉冲集 P 于点 A^4 , 由于脉冲作用到达点 A^2 , 即, $x_{A^2}=(1-p_1)x_{A^4}$ 。故考虑以下两种情况: (1) $(1-q)h_2 < h_1 < h_2$ (2) $h_1 < (1-q)h_2 < h_2$ 。

情况(1) $(1-q)h_2 < h_1 < h_2$:

定理 31 系统(12)存在阶一周期解。

证明: 存在点 $B \in P$, 使得从点 B 出发的轨线与脉冲集 P 交于点 B_1 , 而 B_1 在 A^4 的左侧, 即 $x_{B_1} < x_{A^4}$, 由于脉冲作用, 点 B_1 沿着脉冲集 P 向左平移到 B_1^+ , 此时 B_1^+ 与 B 的位置关系如下: (a): $x_{B_1^+}=x_B$; (b):

$x_{B_1^+} < x_B$; (c): $x_{B_1^+} > x_B$

(a): 当 $x_{B_1^+}=x_B$ 时(图 3), 即点 B_1^+ 与 B 重合, 则闭轨 $BB_1B_1^+$ 为阶一周期解。

(b): 当 $x_{B_1^+} < x_B$ 时(图 4), 即 B 的阶一后继函数为 $F_1(B)=x_{B_1^+}-x_B<0$ 。以 B_1^+ 为初始点出发的轨线与 P 交于点 B_2 , 由于轨线互不相交, 所以 $x_{B_1} < x_{B_2}$ 。经过脉冲作用后到达点 B_2^+ , 此时 $x_{B_2^+} > x_B$, 因此 $x_{B_2^+} > x_{B_1^+}$ 。 B_1^+ 的阶一后继函数为 $F_1(B_1^+)=x_{B_2^+}-x_{B_1^+}>0$, 故 $F_1(B) \cdot F_1(B_1^+)<0$, 根据引理 13, 系统(12)存在阶一周期解。

(c): 当 $x_{B_1^+} > x_B$ 时(图 5), 即 B 的阶一后继函数为 $F_1(B)=x_{B_1^+}-x_B>0$ 。以 B_1^+ 为初始点出发的轨线与 P 交于点 B_2 , 由于轨线的不相交性, $x_{B_1} > x_{B_2}$, 由于脉冲作用, 到达点 B_2^+ , 此时 $x_{B_2^+} < x_B$, 所以 $x_{B_2^+} < x_{B_1^+}$, B_1^+ 的阶一后继函数为 $F_1(B_1^+)=x_{B_2^+}-x_{B_1^+}<0$, 所以 $F_1(B) \cdot F_1(B_1^+)<0$, 根据引理 13, 系统(12)存在阶一周期解。

证毕。

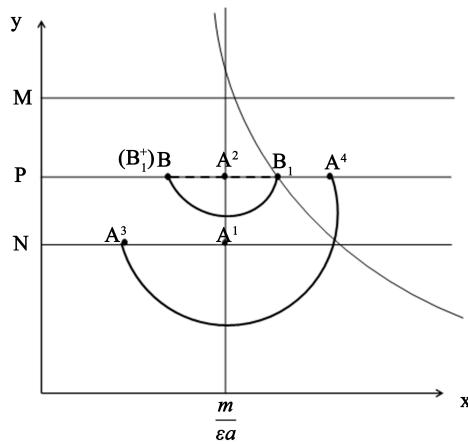


Figure 3. Track trend diagram with $x_{B_1^+} = x_B$

图 3. 当 $x_{B_1^+} = x_B$ 时轨线走向图

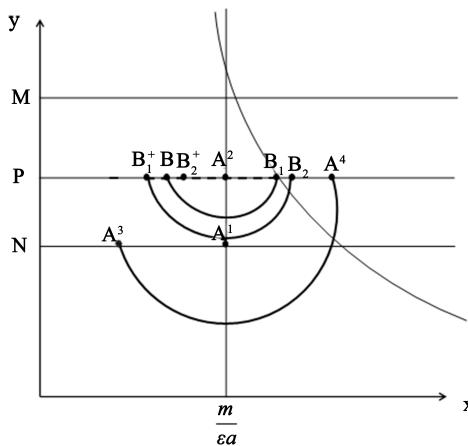


Figure 4. Track trend diagram with $x_{B_1^+} < x_B$

图 4. 当 $x_{B_1^+} < x_B$ 时轨线走向图

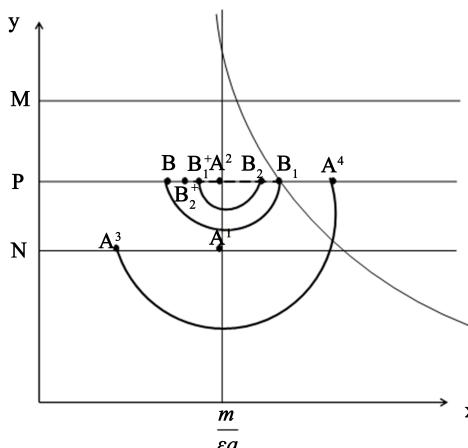


Figure 5. Track trend diagram with $x_{B_1^+} > x_B$

图 5. 当 $x_{B_1^+} > x_B$ 时轨线走向图

定理 3.2 当存在 $B \in P$, 使得 $x_{A^3} < x_B < \frac{m}{\varepsilon a}$, 此时系统(1.2)存在唯一的正的阶一周期解。

证明: 当存在 $B \in P$, 使得 $x_{A^3} < x_B < \frac{m}{\varepsilon a}$ 时, 假设存在两个正的阶一周期间, 为闭轨 BB_1B 和闭轨 CC_1C , 如下图 6 所示。由于 $x_B < x_C$ 且 $x^+ = (1-p_1)x$, 故 $x_{B_1^+} = (1-p_1)x_{B_1} = x_B$, $x_{C_1^+} = (1-p_1)x_{C_1} = x_C$ 。因为 $x_{B_1} > x_{C_1}$, $p_1 \in (0,1)$, 所以 $x_{C_1^+} < x_{B_1^+}$, 因此 $x_C < x_B$ 。显然矛盾, 系统(1.2)存在唯一的正的阶一周期解。
证毕。

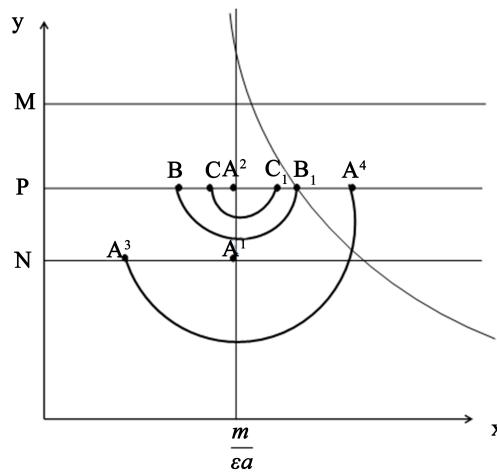


Figure 6. The order-1 periodic solution of system (1.2)
图 6. 系统(1.2)的阶一周期解

定理 3.3 当存在 $C \in N$, 使得 $0 < x_C < x_{A^3}$, 则系统(1.2)存在阶一周期解。

证明: 在相集 N 上取点 C , 使得 $0 < x_C < x_{A^3}$, 从点 C 出发的轨线与脉冲集 P 交于点 C_1 , 由于脉冲作用到达 C_1^+ , 从点 C_1^+ 出发的轨线与脉冲集 M 交于点 C_2 , 经过脉冲作用跳到 N 上于点 C_2^+ , 此时 C_2^+ 的位置有以下三种情况: (a): $x_{C_2^+} = x_C$; (b): $x_{C_2^+} < x_C$; (c): $x_{C_2^+} > x_C$ 。

(a): 当 $x_{C_2^+} = x_C$ 时(图 7), 即点 C_2^+ 与 C 重合, 系统(1.2)存在阶一周期解。

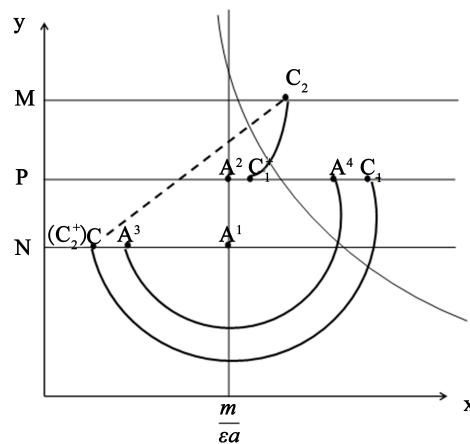


Figure 7. Track trend diagram with $x_{C_2^+} = x_C$

图 7. 当 $x_{C_2^+} = x_C$ 时轨线走向图

(b): 当 $x_{C_2^+} < x_C$ 时(图 8), 即, $F_1(C) = x_{C_2^+} - x_C < 0$ 。假设相集 N 与 y 轴交于点 D , 以 D 为初始点出发的轨线与 P 交于点 D_1 , 经过脉冲作用后到达点 D_1^+ , 从 D_1^+ 出发的轨线交脉冲集 M 于点 D_2 , 由于脉冲作用交 N 于 D_2^+ 。由于 $x_{D_2^+} = (1-p_1)x_{D_2}$, $p_1 \in (0,1)$, 且 $x_{D_2} > 0$, 所以 $x_{D_2^+} > 0$, 因此 $x_{D_2^+} > x_D$ 。即, D 的阶一后继函数为 $F_1(D) = x_{D_2^+} - x_D > 0$, 则 $F_1(C) \cdot F_1(D) < 0$, 根据引理 1.3, 系统(1.2)存在阶一周期解。

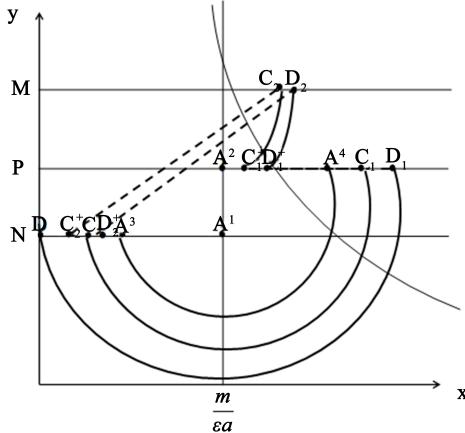


Figure 8. Track trend diagram with $x_{C_2^+} < x_C$

图 8. 当 $x_{C_2^+} < x_C$ 时轨线走向图

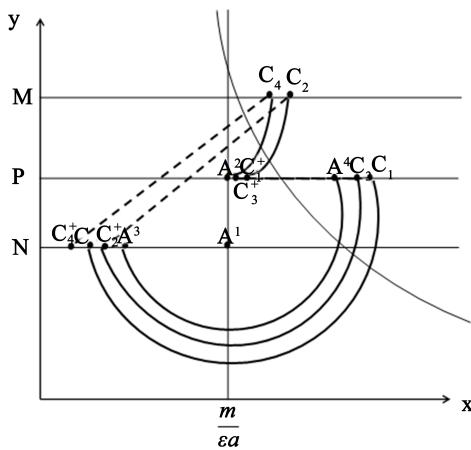


Figure 9. Track trend diagram with $x_{C_2^+} > x_C$

图 9. 当 $x_{C_2^+} > x_C$ 时轨线走向图

(c): 当 $x_{C_2^+} > x_C$ 时(图 9), 即 $F_1(C) = x_{C_2^+} - x_C > 0$ 。以 C_2^+ 为初始点出发的轨线与 P 交于点 C_3 , 由于脉冲作用, 到达点 C_3^+ 。从 C_3^+ 出发的轨线交脉冲集 M 于点 C_4 , 经过脉冲作用交 N 于 C_4^+ , 根据轨线的不相交性, 故 $x_{C_4^+} < x_{C_2^+}$ 。即 $F_1(C_2^+) = x_{C_4^+} - x_{C_2^+} < 0$, 所以 $F_1(C) \cdot F_1(C_2^+) < 0$, 根据引理 1.3, 系统(1.2)存在阶一周期解。

证毕。

情况(2) $h_1 < (1-q)h_2 < h_2$

定理 3.4 当存在 $C \in N$, 使得 $0 < x_C < x_{A^3}$ 时, 系统(1.2)存在阶一周期解。

证明: 在相集 N 上取点 C , 使得 $0 < x_C < x_{A^3}$, 从点 C 出发的轨线与脉冲集 P 交于点 C_1 , 由于脉冲

作用到达 C_1^+ ，从点 C_1^+ 出发的轨线与脉冲集 M 交于点 C_2 ，经过脉冲作用跳到 N 上于点 C_2^+ ，此时 C_2^+ 的位置有以下三种情况：(a): $x_{C_1^+} = x_C$ ；(b): $x_{C_1^+} < x_C$ ；(c): $x_{C_1^+} > x_C$

具体证明方法与定理 3.3 类似，故省略。

定理 3.5 当存在 $C \in N$ ，使得 $x_{A^3} < x_C < \frac{m}{\varepsilon a}$ 时，系统存在至少两个阶一周期解

证明：首先在脉冲集 P 上的阶一周期解，其证明过程与定理 3.1 类似，此处省略。

接下来证明另外一个周期解，在点 A_3 与点 A_1 之间任取点 C ，使得从 C 点出发的轨线与于点 P 不相交，则交 M 于点 C_1 。由于脉冲作用交 N 于点 C_1^+ ，此时 C_1^+ 是 C 的后继点。由定义 2.1 可知， C 的后继函数为 $F(C) = x_{C_1^+} - x_C$ 。依据后继点的位置，可分为以下三种情况：

(a): 若 $F(C) = x_{C_1^+} - x_C = 0$ (图 10)，即点 C_1^+ 与点 C 重合，则闭环 CC_1C 为其阶一周期解。

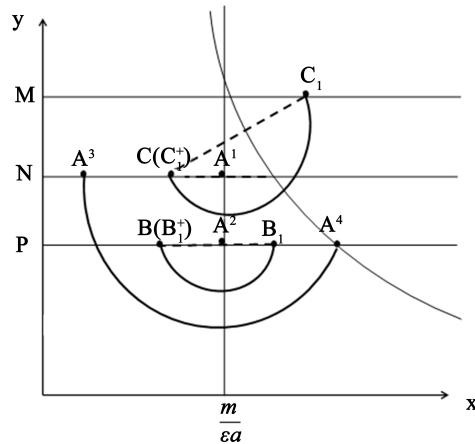


Figure 10. Track trend diagram with $F(C) = 0$

图 10. 当 $F(C)=0$ 时轨线走向图

(b): 若 $F(C) = x_{C_1^+} - x_C < 0$ (图 11)，意味着 C_1^+ 跳到了 C 的左侧。即 $x_{C_1^+} < x_{C_1}$ 。从 C_1^+ 出发的轨线交 M 于点 C_2 ，经过脉冲作用交 N 于点 C_2^+ 。由于脉冲线互不相交，所以 $x_{C_2^+} > x_{C_1^+}$ ，故 $F(C_1^+) = x_{C_2^+} - x_{C_1^+} > 0$ 。根据引理 1.3， $F(C) \cdot F(C_1^+) < 0$ ，所以系统(1.2)存在阶 1 周期解。

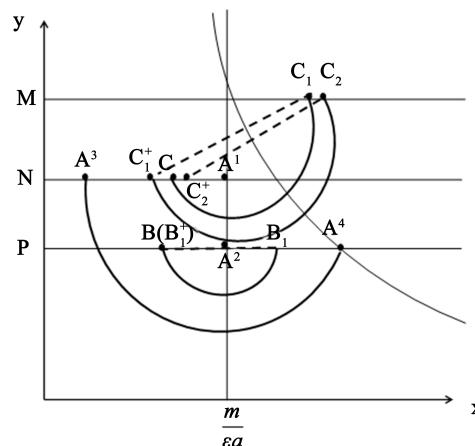
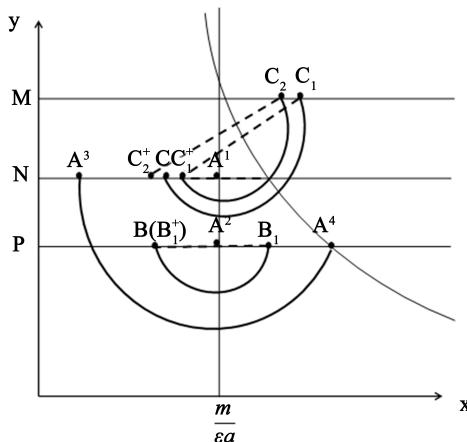


Figure 11. Track trend diagram with $F(C) < 0$

图 11. 当 $F(C)<0$ 时轨线走向图

**Figure 12.** Track trend diagram with $F(C) > 0$ **图 12. 当 $F(C) > 0$ 时轨线走向图**

(c): 若 $F(C) = x_{C_1^+} - x_C > 0$ (图 12), 意味着 C_1^+ 跳到了 C 的右侧, 即 $x_{C_1^+} > x_C$ 。从 C_1^+ 出发的轨线交 M 于点 C_2 , 经过脉冲作用交 N 于点 C_2^+ 。由于脉冲线互不相交, 所以 $x_{C_2^+} < x_{C_1^+}$, 故 $F(C_1^+) = x_{C_2^+} - x_{C_1^+} < 0$ 。根据引理 1.3, $F(C) \cdot F(C_1^+) < 0$, 所以系统(1.2)存在阶 1 周期解。

证毕。

4. 结论

本文提出了一类具有异步控制的营养盐 - 浮游植物模型来研究浮游植物种群增长控制动力学性质。充沛的营养物质是浮游植物水华暴发的主因之一。因此, 首先设立预警值, 当浮游植物种群密度达到预警值时, 通过控制营养物质的浓度来限制浮游植物的增长; 其次, 设立暴发临界值, 当浮游植物种群密度达到临界值时, 同时控制其营养盐浓度, 浮游植物种群密度。本文通过对模型分析, 发现对浮游植物种群增长的异步控制下能存在周期解。特别地, 我们得到了阶一周期解存在的充分条件。

致 谢

首先, 我向我的导师赵敏教授表达我最真挚的感谢! 老师严谨求实的治学态度, 刻苦钻研的精神都对我产生了深刻的影响。感谢老师对我的论文悉心的指导, 感谢老师在生活及学习上对我倾注的鼓励和关怀。

其次, 感谢我们实验室的于恒国师兄和戴传军师兄, 感谢你们不厌其烦地指点我, 使我在学习过程中更迅速的汲取更全面的专业知识, 感谢我的师兄, 师姐, 师妹, 师弟以及同门们, 和他们在学习, 生活上的交流, 使我不断提高, 不断对生活充满信心。

感谢温州大学数学与信息科学院的各位老师和领导, 为我们创造了良好的学习环境, 感谢他们给予的帮助。

最后, 衷心的感谢各位专家学者百忙之中抽时间对本文进行审阅。

参考文献

- [1] Reigada, R., et al. (2003) Plankton Blooms Induced by Turbulent Flows. *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences*, **270**, 875-880. <https://doi.org/10.1098/rspb.2002.2298>
- [2] Truscott, J.E. and Brindley, J. (1994) Ocean Plankton Populations as Excitable Media. *Bulletin of Mathematical Biology*, **56**, 981-998. [https://doi.org/10.1016/S0092-8240\(05\)80300-3](https://doi.org/10.1016/S0092-8240(05)80300-3)

- [3] Luo, J.H. (2013) Phytoplankton-Zooplankton Dynamics in Periodic Environments Taking into Account Eutrophication. *Mathematical Biosciences*, **245**, 126-136. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2013.06.002>
- [4] Almeida Machado, P. (1978) Dinoflagellate Blooms on the Brazilian South Atlantic Coast. In: *Toxic Dinoflagellate Blooms*, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 29.
- [5] Jef, H., et al. (2018) Cyanobacterial Blooms. *Nature Reviews Microbiology*, **16**, 471-483. <https://doi.org/10.1038/s41579-018-0040-1>
- [6] Miller, D.A. (1997) Turning Back the Harmful Red Tide. *Nature*, **388**, 513-514. <https://doi.org/10.1038/41415>
- [7] Smith, H.V. (1983) Low Nitrogen to Phosphorus Ratios Favor Dominance by Blue-Green Algae in Lake Phytoplankton. *Science*, **221**, 669-671. <https://doi.org/10.1126/science.221.4611.669>
- [8] Ryther, J.H. and Dunstan, W.M. (1971) Nitrogen, Phosphorus, and Eutrophication in the Coastal Marine Environment. *Science*, **171**, 1008-1013. <https://doi.org/10.1126/science.171.3975.1008>
- [9] Bertalanffy, L.V. and Woodger, J.H. (1935) Modern Theories of Development.
- [10] Yu, H.G., Zhao, M. and Agarwal, R.P. (2014) Stability and Dynamics Analysis of Time Delayed Eutrophication Ecological Model Based upon the Zeya Reservoir. *Mathematics and Computers in Simulation*, **97**, 53-67. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2013.06.008>
- [11] Wu, D., Zhang, H., Cao, J., et al. (2013) Stability and Bifurcation Analysis of a Nonlinear Discrete Logistic Model with Delay. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2013**, 1-7. <https://doi.org/10.1155/2013/463059>
- [12] Tian, Y.L. and Weng, P.X. (2011) Stability Analysis of Diffusive Predator-Prey Model with Modified Leslie-Gower and Holling-Type II Schemes. *Acta Applicandae Mathematicae*, **114**, 173-192. <https://doi.org/10.1007/s10440-011-9607-9>
- [13] Yue, Z.M. and Wang, W.J. (2013) Qualitative Analysis of a Diffusive Ratio-Dependent Holling-Tanner Predator-Prey Model with Smith Growth. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2013**, Article ID: 267173. <https://doi.org/10.1155/2013/267173>
- [14] Tang, S.Y., Tang, B., Wang, A.L., et al. (2015) Holling II Predator-Prey Impulsive Semi-Dynamic Model with Complex Poincare Map. *Nonlinear Dynamics*, **87**, 1575-1596. <https://doi.org/10.1007/s11071-015-2092-3>
- [15] Fu, J.B. and Chen, L.S. (2012) Study of a Semi-Ratio Predator-Prey Model with Impulsive Control. *Journal of Beihua University (Natural Science)*, **13**, 621-626.
- [16] Hu, S.C., Lakshmikantham, V. and Leela, S. (1989) Impulsive Differential Systems and the Pulse Phenomena. *The Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **137**, 605-612. [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(89\)90266-7](https://doi.org/10.1016/0022-247X(89)90266-7)
- [17] Bainov, D.D. and Simeonov, P.S. (1993) Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications. Longman Scientific and Technical, New York.
- [18] Bainov, D. and Covachev, V. (1994) Impulsive Differential Equations with a Small Parameter. <https://doi.org/10.1142/2058>
- [19] Bainov, D.D. and Simeonov, P.S. (1993) Impulsive Differential Equations: Asymptotic Properties of the Solutions. World Scientific, Singapore.
- [20] Lakshmikantham, V. (1989) Theory of Impulsive Differential Equations. World Scientific, Singapore. <https://doi.org/10.1142/0906>
- [21] Samoilenko, A.M. (1995) Impulsive Differential Equations. World Scientific, Singapore. <https://doi.org/10.1142/2892>
- [22] Dai, C.J., Zhao, M. and Chen, L.S. (2012) Dynamic Complexity of an Ivlev-Type Prey-Predator System with Impulsive State Feedback Control. *Journal of Applied Mathematics*, **2012**, Article ID: 534276. <https://doi.org/10.1155/2012/534276>
- [23] Dai, C.J. and Zhao, M. (2012) Mathematical and Dynamic Analysis of a Prey-Predator Model in the Presence of Alternative Prey with Impulsive State Feedback Control. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2012**, Article ID: 724014. <https://doi.org/10.1155/2012/724014>
- [24] Dai, C.J., Zhao, M. and Chen, L.S. (2012) Homoclinic Bifurcation in Semi-Continuous Dynamic Systems. *International Journal of Biomathematics*, **5**, 1-19. <https://doi.org/10.1142/S1793524512500593>
- [25] Nie, L.F., et al. (2009) Existence and Stability of Periodic Solution of a Predator-Prey Model with State-Dependent Impulsive Effects. *Mathematics and Computers in Simulation*, **79**, 2122-2134. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2008.11.015>
- [26] Tang, S.Y. and Chen, L.S. (2002) Density-Dependent Birth Rate, Birth Pulses and Their Population Dynamic Consequences. *Journal of Mathematical Biology*, **44**, 185-199. <https://doi.org/10.1007/s002850100121>
- [27] Ballinger, G. and Liu, X. (1997) Permanence of Population Growth Models with Impulsive Effects. *Mathematical and Computer Modelling*, **26**, 59-72. [https://doi.org/10.1016/S0895-7177\(97\)00240-9](https://doi.org/10.1016/S0895-7177(97)00240-9)

-
- [28] Zhang, S.W. (2001) The Study for One-compartment Model of Periodic Pulse Dosage. *Journal of Anshan Teachers College*, **3**, 19-22.
 - [29] Xiao, Q.Z., et al. (2015) Dynamics of an Impulsive Predator-Prey Logistic Population Model with State-Dependent. Elsevier Science Inc., New York, 220-230. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.02.061>
 - [30] Zhang, T.Q., Ma, W.B., et al. (2015) Periodic Solution of a Prey-Predator Model with Nonlinear State Feedback Control. *Applied Mathematics and Computation*, **266**, 95-107. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.05.016>
 - [31] Wei, C.J. and Chen, L.S. (2012) A Leslie-Gower Pest Management Model with Impulsive State Feedback Control. *Journal of Biomathematics*, **27**, 621-628.
 - [32] Guo, H.J., Chen, L.S. and Song, X.Y. (2015) Qualitative Analysis of Impulsive State Feedback Control to an Algae-Fish System with Bistable Property. *Applied Mathematics and Computation*, **271**, 905-922. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.09.046>
 - [33] Huppert, A., Blasius, B. and Stone, L. (2002) A Model of Phytoplankton Blooms. *The American Naturalist*, **159**, 156-171. <https://doi.org/10.1086/324789>
 - [34] Chakraborty, S., Tiwari, P.K., Misra, A.K. and Chattopadhyay, J. (2015) Spatial Dynamics of a Nutrient-Phytoplankton System with Toxic Effect on Phytoplankton. *Mathematical Biosciences*, **264**, 94-100. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2015.03.010>
 - [35] Wang, B.B., Zhao, M., Dai, C.J., Yu, H., et al. (2016) Dynamics Analysis of a Nutrient-Phytoplankton Model with Time Delays. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2016**, Article ID: 9797624. <https://doi.org/10.1155/2016/9797624>
 - [36] Wang, Y.P., Zhao, M., Pan, X.H. and Dai, C.J. (2014) Dynamic Analysis of a Phytoplankton-Fish Model with Biological and Artificial Control. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2014**, Article ID: 914647. <https://doi.org/10.1155/2014/914647>
 - [37] Deng, Y.L., Zhao, M., Yu, H.G., et al. (2015) Dynamical Analysis of a Nitrogen-Phosphorus-Phytoplankton Model. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2015**, 1-8. <https://doi.org/10.1155/2015/823026>
 - [38] Dai, C.J., Zhao, M., Yu, H., et al. (2015) Delay-Induced Instability in a Nutrient-Phytoplankton System with Flow. *Physical Review E*, **91**, Article ID: 032929. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.032929>
 - [39] Dai, C.J., Zhao, M., Yu, H., et al. (2019) Dynamics Induced by Delay in a Nutrient -Phytoplankton Model with Multiple Delays. *Complexity*, **2019**, Article ID: 3879626. <https://doi.org/10.1155/2019/3879626>
 - [40] Chen, L.S. (2013) Theory and Application of Semi-Continuous Dynamical System. *Journal of Yulin Normal University (Natural Science)*, **34**, 1-10.
 - [41] Chen, L.S. (2011) Pest Control and Geometric Theory of Semi-Continuous Dynamical System. *Journal of Beihua University (Natural Science)*, **2**, 1-9.
 - [42] Liang, Z.Q., et al. (2016) Qualitative Analysis of a Predator-Prey System with Mutual Interference and Impulsive State Feedback Control. *Nonlinear Dynamics*, **87**, 1-15. <https://doi.org/10.1007/s11071-016-3129-y>