Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(5), 765-771
Published Online May 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.95091

Hans汉斯

Convergence and Large Deviation Estimation of Random Continuous Fractional Convergence Factors

Shenghan Xie

School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong
Email: xie_shenghan@qq.com

Received: May 1st, 2020; accepted: May 19th, 2020; published: May 26th, 2020

Abstract

Given a stochastic process $\{A_n \mid n \geq 1\}$, taking values in natural number. Analog to the continued fractions of real numbers, the random continued fraction $X := [A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots]$ is defined. This paper shows that its convergent converges to X almost surely by the nest theorem for intervals. The large deviation estimate is also considered for the Lévy constant of the denominator of the convergents. When $\{A_n \mid n \geq 1\}$ is i.i.d., the lower bound for the corresponding probability is given. At the end, the exact lower bounds for Poission distribution, geometric process etc. are obtained.

Keywords

Random Continued Fraction, Convergent, Deviation Estimate

随机连分数收敛因子的收敛性和大偏差估计

谢胜寒

华南理工大学数学学院，广东 广州
Email: xie_shenghan@qq.com

收稿日期：2020年5月1日；录用日期：2020年5月19日；发布日期：2020年5月26日

摘　要

给定取值于自然数集的随机过程$\{A_n \mid n \geq 1\}$，类似于实数的连分数展式来定义随机连分数

文章引用: 谢胜寒. 随机连分数收敛因子的收敛性和大偏差估计[J]. 应用数学进展, 2020, 9(5): 765-771.
DOI: 10.12677/aam.2020.95091

$X:=[A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots]$，本文通过区间套定理证明了其收敛因子几乎必然地收敛到X，并对收敛因子的分母对应的Lévy常数进行了大偏差估计，在$\{A_n \mid n\ge 1\}$满足独立同分布时，给出了相应概率的下界估计，对泊松分布、几何分布等特殊情形给出了具体的下界数值。

关键词

随机连分数，收敛因子，偏差估计

1. 研究背景及主要结果

连分数是表示实数的一种重要方式，其数学方面的研究自欧拉时代就开始了，其在数论如丢番图逼近中发挥着重要作用，近些年来与概率论、分形几何、动力系统等学科建立了紧密的联系。连分数的基本知识和度量结果可参考 Khintchine [1]，刘鹏[2]，其 Lévy 常数相关内容可以参考 Faivre [3]。

2015 年，Fang 等[4]引入了随机连分数。令$(\Omega,\mathcal{F},P)$为概率空间，$\{A_n \mid n\ge 1\}$是定义在$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一个随机过程；它在测度空间$(\mathbb{N}_+,\mathcal{C})$中取值，其中$\mathbb{N}_+$是自然数集，$\mathcal{C}$是$\mathbb{N}_+$的幂集。对任意$\omega\in\Omega$，我们定义[4]

$$X(\omega):=[A_1(\omega),A_2(\omega),\cdots,A_n(\omega),\cdots]=\cfrac{1}{A_1(\omega)+\cfrac{1}{A_2(\omega)+\cdots+\cfrac{1}{A_n(\omega)+\cdots}}},$$

我们称X是由随机过程$\{A_n \mid n\ge 1\}$生成的随机连分数。

对$\forall\omega\in\Omega$及P_n，P_n及Q_n定义如下[4]：

$$\frac{P_n(\omega)}{Q_n(\omega)}:=[A_1(\omega),A_2(\omega),\cdots,A_n(\omega)]=\cfrac{1}{A_1(\omega)+\cfrac{1}{A_2(\omega)+\cdots+\cfrac{1}{A_n(\omega)}}},$$

其中$P_n(\omega)$及$Q_n(\omega)$为互素的正整数。我们称$\frac{P_n}{Q_n}$为X的第n个收敛因子。这里$P_n(\omega)$和$Q_n(\omega)$也可以通过归纳的方式来得到。

$$P_n=A_nP_{n-1}+P_{n-2},\forall n\in\mathbb{N}_+\text{，其中 }P_{-1}=1,P_0=0\text{。}$$

$$Q_n=A_nQ_{n-1}+Q_{n-2},\forall n\in\mathbb{N}_+\text{，其中 }Q_{-1}=0,Q_0=1\text{。}$$

我们首先研究收敛因子$\frac{P_n}{Q_n}$的收敛性，得到如下结果。

定理 1： 记$\{A_n \mid n\ge 1\}$是一个取值于自然数集的随机过程，则几乎必然地其收敛因子收敛到X，即

$$\frac{P_n(\omega)}{Q_n(\omega)} \xrightarrow{a.e.} X(\omega), n \to \infty.$$

收敛因子的分母 Q_n 在连分数研究中起着重要作用。

定义 1： 上极限 $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log Q_n$ 和下极限 $\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log Q_n$ 分别称为 X 的上、下 Lévy 常数，若极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log Q_n$ 存在，则其极限值称为 X 的 Lévy 常数。

Fang 等[4]证明了当 $\{A_n \mid n \ge 1\}$ 是遍历的且随机变量 $\log A_1$ 的数学期望有限，即 $E(\log A_1) < \infty$ 时，几乎必然有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log Q_n = -\int_\Omega \log X \mathrm{d}P.$$

也就是说，Lévy 常数几乎必然存在且为一个常数，特别地，该收敛也是依概率收敛的，即对任意 $\delta > 0$，

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\log Q_n + \int_\Omega \log X \mathrm{d}P\right| > \delta\right) = 0. \tag{1}$$

他们对上述收敛速度进行了研究，得到了 Chernoff 型的上界估计。

定理 2 [4]： 假设 $\{A_n \mid n \ge 1\}$ 是 ψ -混合的且对任意 $0 < t < 1$ 有 $E\left(A_1^t\right) < \infty$，则对任意 $\delta > 0$，存在 $N > 0, B > 0, \alpha > 0$ 使得

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\log Q_n + \int_\Omega \log X \mathrm{d}P\right| > \delta\right) \le B\mathrm{e}^{-\alpha n}.$$

上述结果作为关于 $\frac{1}{n}\log Q_n$ 收敛的大偏差估计并不完整，因为只有上界估计，作为该结果的补充，我们给出当 $\{A_n \mid n \ge 1\}$ 独立同分布时的下界估计。

定理 3： 记 $\{A_n \mid n \ge 1\}$ 是一个取值于自然数集独立同分布的随机过程，记 $P(A_1 = k) = f(k), k \in \mathbb{N}_+$，则

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\log Q_n + \int_\Omega \log X \mathrm{d}P\right| > \delta\right) \ge \left(1 - F\left(\mathrm{e}^{b+\delta}\right)\right)^n,$$

其中 $b = -\int_\Omega \log X \mathrm{d}P$， $F(x) = P(A_1 \le x)$ 为随机变量 A_1 的分布函数。

该定理表明，上述(1)中的收敛有指数的下界，结合[1]中的结果，我们知道 $P\left(\left|\frac{1}{n}\log Q_n + \int_\Omega \log X \mathrm{d}P\right| > \delta\right)$ 是具有指数型偏差的，在本文的第三部分，我们将对泊松分布、几何分布等特殊情形给出了具体的下界数值。大偏差及概率的相关知识可参看 Durret [5]。

2. $\frac{P_n(\omega)}{Q_n(\omega)}$ 的收敛性的证明

我们用区间套定理给出定理 1 的完整证明。

定理 1 的证明： 记 $X_n(\omega) \triangleq \frac{P_n(\omega)}{Q_n(\omega)}$，考虑 $\{X_n(\omega)\}$ 的两个子列 $\{X_{2n-1}(\omega) \mid n \in \mathbb{N}_+\}$ 及 $\{X_{2n}(\omega) \mid n \in \mathbb{N}_+\}$。

第一步，我们证明， $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}_+, X_{2n_1-1}(\omega) > X_{2n_2}(\omega)$。若 $2n_1 - 1 < 2n_2$， 则有

$$X_{2n_1-1}(\omega)=\cfrac{1}{A_1(\omega)+\cfrac{1}{A_2(\omega)+\cdots+\cfrac{1}{A_{2n_1-1}(\omega)}}},$$

$$X_{2n_2}(\omega)=\cfrac{1}{A_1(\omega)+\cfrac{1}{A_2(\omega)+\cdots+\cfrac{1}{A_{2n_1-1}(\omega)+\cdots+\cfrac{1}{A_{2n_2}(\omega)}}}}.$$

由于 $\forall n\in\mathbb{N}_+, A_n(\omega)\in\mathbb{N}_+$，故

$$A_{2n_1}(\omega)+\cdots+\frac{1}{A_{2n_2}(\omega)}>0,$$

因此

$$A_{2n_1-1}(\omega)<A_{2n_1-1}(\omega)+\cfrac{1}{A_{2n_1}(\omega)+\cdots+\cfrac{1}{A_{2n_2}(\omega)}},$$

从而

$$A_{2n_1-2}(\omega)+\frac{1}{A_{2n_1-1}(\omega)}>A_{2n_1-2}(\omega)+\cfrac{1}{A_{2n_1-1}(\omega)+\cdots+\cfrac{1}{A_{2n_2}(\omega)}}.$$

仿照上面两步的推导过程，经过 $2n_1-2$ 步后，我们有

$$\frac{1}{X_{2n_1-1}(\omega)}=A_1(\omega)+\cfrac{1}{A_2(\omega)+\cdots+\cfrac{1}{A_{2n_1-1}(\omega)}}<A_1(\omega)+\cfrac{1}{A_2(\omega)+\cdots+\cfrac{1}{A_{2n_2}(\omega)}}=\frac{1}{X_{2n_2}(\omega)},$$

因此 $X_{2n_1-1}(\omega)>X_{2n_2}(\omega)$。同理可知，当 $2n_1-1>2n_2$ 时，$X_{2n_1-1}(\omega)>X_{2n_2}(\omega)$ 亦成立。从而 $\forall n\in\mathbb{N}_+,\left[X_{2n}(\omega),X_{2n+1}(\omega)\right]$ 构成 $[0,1]$ 内的一个区间。

第二步，我们证明，$\{X_{2n-1}(\omega)\}$ 关于 n 单调递减，$\{X_{2n}(\omega)\}$ 关于 n 单调递增。不妨取 $n_1,n_2\in\mathbb{N}_+,n_1<n_2$，由第一步当中的证明过程可知，

$$A_{2n_1-1}(\omega)<A_{2n_1-1}(\omega)+\cfrac{1}{A_{2n_1}(\omega)+\cdots+\cfrac{1}{A_{2n_2-1}(\omega)}},$$

从而

$$\frac{1}{X_{2n_1-1}(\omega)}=A_1(\omega)+\cfrac{1}{A_2(\omega)+\cdots+\cfrac{1}{A_{2n_1-1}(\omega)}}<A_1(\omega)+\cfrac{1}{A_2(\omega)+\cdots+\cfrac{1}{A_{2n_2-1}(\omega)}}=\frac{1}{X_{2n_2-1}(\omega)},$$

因此 $X_{2n_1-1}(\omega)>X_{2n_2-1}(\omega)$。类似可证 $X_{2n_1}(\omega)<X_{2n_2}(\omega)$。从而 $\left\{\left[X_{2n}(\omega),X_{2n+1}(\omega)\right]\mid n\in\mathbb{N}_+\right\}$ 是一个渐缩的区间套。

第三步，$X_{2n+1}(\omega)-X_{2n}(\omega)\to 0, n\to\infty$。首先，

$$X_3(\omega)-X_2(\omega)=\frac{1}{A_1+\cfrac{1}{A_2+\cfrac{1}{A_3}}}-\frac{1}{A_1+\cfrac{1}{A_2}}=\frac{\cfrac{1}{A_2+\cfrac{1}{A_3}}-\cfrac{1}{A_2}}{\left(A_1+\cfrac{1}{A_2+\cfrac{1}{A_3}}\right)\left(A_1+\cfrac{1}{A_2}\right)}$$

$$=\frac{\cfrac{\cfrac{1}{A_3}}{\left(A_2+\cfrac{1}{A_3}\right)A_2}}{\left(A_1+\cfrac{1}{A_2+\cfrac{1}{A_3}}\right)\left(A_1+\cfrac{1}{A_2}\right)}=\frac{\cfrac{1}{\left(A_2+\cfrac{1}{A_3}\right)A_2}}{\left(A_1+\cfrac{1}{A_2+\cfrac{1}{A_3}}\right)\left(A_1+\cfrac{1}{A_2}\right)}\cdot\frac{1}{A_3}$$

$$=\frac{\cfrac{1}{A_2+\cfrac{1}{A_3}}}{A_1+\cfrac{1}{A_2+\cfrac{1}{A_3}}}\cdot\frac{\cfrac{1}{A_2}}{A_1+\cfrac{1}{A_2}}\cdot\frac{1}{A_3}<\left(\frac{1}{A_1+1}\right)^2\frac{1}{A_3}\le\frac{1}{4}.$$

通过逐步递推的方式，我们可以得到

$$X_{2n+1}(\omega)-X_{2n}(\omega)<\left(\frac{1}{A_1+1}\right)^2\cdots\left(\frac{1}{A_{2n-1}+1}\right)^2\frac{1}{A_{2n+1}}\le\frac{1}{4^n}\to 0, n\to\infty.$$

综合前三步的结论，由区间套定理可知，前文定义的 $X(\omega)$ 是存在的，并且 $X_n(\omega)\xrightarrow{a.s.}X(\omega), n\to\infty$。

3. 独立同分布情形偏差下界的估计

该部分首先给出定理 3 的证明，然后对几种分布来给出下界估计的具体数值。

定理 3 的证明： 由 $b=-\int_\Omega \log X\mathrm{d}P$ 可知，事件 $\left\{\left|\frac{1}{n}\log Q_n+\int_\Omega \log X\mathrm{d}P\right|>\delta\right\}$ 可写为 $\left\{\left|\frac{1}{n}\log Q_n-b\right|>\delta\right\}$，由于

$$\left\{\left|\frac{1}{n}\log Q_n-b\right|>\delta\right\}=\left\{\frac{1}{n}\log Q_n-b>\delta\right\}\cup\left\{\frac{1}{n}\log Q_n-b<-\delta\right\},$$

所以

$$\left\{\left|\frac{1}{n}\log Q_n-b\right|>\delta\right\}\supset\left\{\frac{1}{n}\log Q_n-b>\delta\right\}=\left\{Q_n>\mathrm{e}^{n(b+\delta)}\right\}.$$

注意到 $Q_n=A_nQ_{n-1}+Q_{n-2},\forall n\in\mathbb{N}_+$，其中 $Q_{-1}=0,Q_0=1$，则 $Q_1=A_1\ge A_1>0,Q_2=A_2A_1+1\ge A_2A_1>0$，因此 $\forall n\in\mathbb{N}_+,Q_n\ge A_nQ_{n-1}\ge A_n\cdots A_1$。所以

$$\left\{Q_n > \mathrm{e}^{n(b+\delta)}\right\} \supset \left\{A_n \cdots A_1 > \mathrm{e}^{n(b+\delta)}\right\} \supset \left\{A_n > \mathrm{e}^{b+\delta}\right\} \cap \cdots \cap \left\{A_1 > \mathrm{e}^{b+\delta}\right\}.$$

从而

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\log Q_n + \int_\Omega \log X\mathrm{d}P\right| > \delta\right\} \geq P\left(\left\{A_n > \mathrm{e}^{b+\delta}\right\} \cap \cdots \cap \left\{A_1 > \mathrm{e}^{b+\delta}\right\}\right).$$

由于 $\{A_n \mid n \geq 1\}$ 是独立同分布的，所以

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\log Q_n + \int_\Omega \log X\mathrm{d}P\right| > \delta\right\} \geq P\left(\left\{A_n > \mathrm{e}^{b+\delta}\right\}\right) \cdots P\left(\left\{A_1 > \mathrm{e}^{b+\delta}\right\}\right)$$

$$= \left(P\left(\left\{A_1 > \mathrm{e}^{b+\delta}\right\}\right)\right)^n = \left(1 - F\left(\mathrm{e}^{b+\delta}\right)\right)^n.$$

从而得到了定理中的结果。

下面我们给出一些例子说明下界估计具体的值。

例 1：设 $P(A_i = k) = \dfrac{1}{k(k+1)}, \forall i \in \mathbb{N}_+$。

记 $b = -\int_\Omega \log X\mathrm{d}P$，此时，

$$1 - F\left(\mathrm{e}^{b+\delta}\right) = \sum_{k > \mathrm{e}^{b+\delta}} P(A_i = k) = \sum_{k > \mathrm{e}^{b+\delta}} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{\left[\mathrm{e}^{b+\delta}\right] + 1}$$

其中 $[x]$ 表示实数 x 的整数部分，故

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\log Q_n + \int_\Omega \log X\mathrm{d}P\right| > \delta\right\} \geq \left(\frac{1}{\left[\mathrm{e}^{b+\delta}\right] + 1}\right)^n$$

例 2：(泊松分布)设 $P(A_i = k) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}} \cdot \dfrac{\lambda^k}{k!}, \forall i \in \mathbb{N}_+$，其中 $\lambda > 0$ 为固定参数。

记 $b = -\int_\Omega \log X\mathrm{d}P$，此时，

$$1 - F\left(\mathrm{e}^{b+\delta}\right) = \sum_{k > \mathrm{e}^{b+\delta}} P(A_i = k) = \sum_{k > \mathrm{e}^{b+\delta}} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \geq \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}} \cdot \frac{\lambda^{\left[\mathrm{e}^{(b+\delta)}\right]+1}}{\left(\left[\mathrm{e}^{(b+\delta)}\right] + 1\right)!}$$

从而

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\log Q_n + \int_\Omega \log X\mathrm{d}P\right| > \delta\right\} \geq \left(\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}} \cdot \frac{\lambda^{\left[\mathrm{e}^{(b+\delta)}\right]+1}}{\left(\left[\mathrm{e}^{(b+\delta)}\right] + 1\right)!}\right)^n$$

例 3：(几何分布)设 $P(A_i = k) = s^{k-1} \cdot r, \forall i \in \mathbb{N}_+$，其中 $r > 0, s = 1 - r > 0$ 均为固定参数。

记 $b = -\int_\Omega \log X\mathrm{d}P$，此时，

$$1 - F\left(\mathrm{e}^{b+\delta}\right) = \sum_{k > \mathrm{e}^{b+\delta}} P(A_i = k) = \sum_{k > \mathrm{e}^{b+\delta}} s^{k-1} \cdot r = \frac{r}{s(1-s)} s^{\left[\mathrm{e}^{b+\delta}\right]+1}$$

所以，

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\log Q_n + \int_\Omega \log X\mathrm{d}P\right| > \delta\right\} \geq \left(\frac{r}{s(1-s)} s^{\left[\mathrm{e}^{b+\delta}\right]+1}\right)^n.$$

参考文献

[1] Khintchine, Y. (1964) Continued Fractions. The University of Chicago Press, Chicago.

[2] 刘鹏. 随机过程观点下的连分数[D]: [硕士学位论文]. 上海: 复旦大学, 2012.

[3] Faivre, C. (1997) The Lévy Constant of an Irrational Number. *Acta Mathematica Hungarica*, **74**, 57-61. https://doi.org/10.1007/BF02697876

[4] Fang, L., Wu, M., Shieh, N., *et al*. (2015) Random Continued Fractions: Lévy Constant and Chernoff-Type Estimate. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **429**, 513-531. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.04.013

[5] Durrett, R. (2010) Probability: Theory and Examples. 4th Edition, Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511779398