Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(10), 1787-1797
Published Online October 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.910206

二阶线性脉冲中立型时滞微分方程的稳定性

熊　慧，陈龙伟*

云南财经大学，云南　昆明
Email: 1246322169@qq.com, *ZZ1237@ynufe.edu.cn

收稿日期：2020年10月7日；录用日期：2020年10月20日；发布日期：2020年10月27日

摘　要

运用特征方程实根的方法研究具有常系数的二阶线性脉冲中立型时滞微分方程解的渐近性形态和稳定性，最后给出实例证明。

关键词

中立型时滞微分方程，稳定性，渐近形态

Stability of Second Order Linear Impulsive Neutral Delay Differential Equations

Hui Xiong, Longwei Chen*

Yunnan University of Finance and Economics, Kunming Yunnan
Email: 1246322169@qq.com, *ZZ1237@ynufe.edu.cn

Received: Oct. 7th, 2020; accepted: Oct. 20th, 2020; published: Oct. 27th, 2020

Abstract

By using the method of real root of characteristic equation, the asymptotic behavior and stability of solutions of Second Order Linear Impulsive Neutral Delay Differential Equations with constant coefficients are studied. Finally, an example is given to prove the stability.

Keywords

Neutral Delay Differential Equation, Stability, Asymptotic Behavior

*通讯作者。

文章引用: 熊慧, 陈龙伟. 二阶线性脉冲中立型时滞微分方程的稳定性[J]. 应用数学进展, 2020, 9(10): 1787-1797.
DOI: 10.12677/aam.2020.910206

1. 引言

脉冲时滞微分方程在工程学，医学，金融，力学等方面有着非常广的应用，这就意味着方程的稳定性非常重要。学者在这方面做了大量的研究[1] [2] [3]。文献[4]给出了变系数二阶时滞微分方程解的稳定性的充要条件。文献[5]运用特征方程法给出了一阶线性脉冲时滞微分方程解的稳定性，在此基础上，本文将进一步研究脉冲时滞微分方程，将此方法推广到二阶线性脉冲中立型时滞微分方程。

2. 预备知识

论文中，考虑的二阶中立型脉冲时滞微分方程如下：

$$\left[x(t)+cx(t-\sigma)\right]''=ax(t)+bx(t-\tau),\ t\neq t_k,t\geq 0, \tag{1}$$

$$\Delta x(t_k)=l_k,k\in z^+, \tag{2}$$

$$x(t)=\phi(t),t\in[-h,0], \tag{3}$$

其中：1) $\sigma,\tau\in z^+$，$a,b,c\in R$；

2) $\Delta x(t_k)=x(t_k^+)-x(t_k^-)$；

3) 脉冲点 t_k 满足 $0<t_1<t_2<\cdots<t_k<t_{k+1}<\cdots,\lim\limits_{t\to\infty}t_k=\infty$；

4) $h=\max\{\sigma,\tau\}$。

定义 1.1 $x(t)$ 是方程(1)~(3)的解，如果

1) $x(t)$ 在 $t\notin z^+$ 处连续；

2) $x(t)+cx(t-\sigma)$ 在 $t\neq t_k$ 处二阶连续可微；

3) $x(t_k^+)=x(t_k)$；

4) $\left[x(t)+cx(t-\sigma)\right]''=ax(t)+bx(t-\tau)$。

注 1.2 设 $x(t)=\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$ 带入(1)得特征方程

$$\lambda^2\left(1+c\mathrm{e}^{-\lambda\sigma}\right)=a+b\mathrm{e}^{-\lambda\tau}, \tag{4}$$

假设 λ_0 是方程(4)的实根，令

$$y(t)=\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}x(t), \tag{5}$$

把(5)分别代入(1)~(3)，得

$$\begin{aligned}&\left[y(t)+c\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}y(t-\sigma)\right]''\\&=\left(a-\lambda_0^2\right)y(t)+b\mathrm{e}^{-\lambda_0\tau}(y-\tau)-c\lambda_0^2\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}y(t-\sigma)-2\lambda_0y'(t)-2c\lambda_0^2\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}y'(t-\sigma),\end{aligned} \tag{6}$$

$$y(t_k)-y(t_k^-)=l_k\mathrm{e}^{-\lambda_0 t_k},k\in z^+, \tag{7}$$

$$y(t)=\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}\phi(t),t\in[-h,0], \tag{8}$$

引理 1.3 假设 λ_0 是(4)的实根，并且 $t_k-\sigma$ 不是脉冲点。如果 $y(t)$ 是(6)~(8)的唯一解，当且仅当

$$y(t)=\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}\phi(t),t\in[-h,0], \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
&y(t)+c\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}y(t-\sigma)\\
&=\phi(0)+c\phi(-\sigma)+\sum\nolimits_{i=1}^{\infty}l_i\mathrm{e}^{-\lambda_0 t_i}+b\mathrm{e}^{-\lambda_0\tau}\int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{m}\mathrm{e}^{-\lambda_0 s}\phi(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m\\
&\quad-c\lambda_0^2\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_{-\sigma}^{0}\int_{-\sigma}^{m}\mathrm{e}^{-\lambda_0 s}\phi(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m-2c\lambda_0\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_{-\sigma}^{0}\int_{-\sigma}^{m}\mathrm{e}^{-\lambda_0 s}\phi'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m\\
&\quad+\left(a-\lambda_0^2\right)\int_0^t\int_0^m y(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m-2\lambda_0\int_0^t\int_0^m y'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m+b\mathrm{e}^{-\lambda_0\tau}\int_0^{t-\tau}\int_0^m y(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m\\
&\quad-c\lambda_0^2\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_0^{t-\sigma}\int_0^m y(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m-2c\lambda_0\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_0^{t-\sigma}\int_0^m y'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m,
\end{aligned}$$

证明：当 $t\in[t_k,t_{k+1})$

$$\begin{aligned}
&y(t)+c\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}y(t-\sigma)\\
&=y(t_k)+c\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}y(t_k-\sigma)+\left(a-\lambda_0^2\right)\int_{t_k}^t\int_{t_k}^m y(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m\\
&\quad+b\mathrm{e}^{-\lambda_0\tau}\int_{t_k}^t\int_{t_k}^m y(s-\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}m-c\lambda_0^2\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_{t_k}^t\int_{t_k}^m y(s-\sigma)\mathrm{d}s\mathrm{d}m\\
&\quad-2\lambda_0\int_{t_k}^t\int_{t_k}^m y'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m-2c\lambda_0\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_{t_k}^t\int_{t_k}^m y'(s-\sigma)\mathrm{d}s\mathrm{d}m,
\end{aligned}$$

因为 $t_k-\sigma$ 不是脉冲点，并且根据(7)，得

$$\begin{aligned}
&y(t)+c\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}y(t-\sigma)\\
&=l_k\mathrm{e}^{-\lambda_0 t_k}+y(t_k^-)+c\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}y(t_k-\sigma)+\left(a-\lambda_0^2\right)\int_{t_k}^t\int_{t_k}^m y(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m\\
&\quad+b\mathrm{e}^{-\lambda_0\tau}\int_{t_k}^t\int_{t_k}^m y(s-\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}m-c\lambda_0^2\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_{t_k}^t\int_{t_k}^m y(s-\sigma)\mathrm{d}s\mathrm{d}m\\
&\quad-2\lambda_0\int_{t_k}^t\int_{t_k}^m y'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m-2c\lambda_0\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_{t_k}^t\int_{t_k}^m y'(s-\sigma)\mathrm{d}s\mathrm{d}m,
\end{aligned} \tag{10}$$

因为 $k\in[0,\infty)$，所以

$$\begin{aligned}
&y(t_k^-)+c\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}y(t_k-\sigma)\\
&=l_{k-1}\mathrm{e}^{-\lambda_0 t_k}+y(t_{k-1}^-)+c\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}y(t_{k-1}-\sigma)\\
&\quad+\left(a-\lambda_0^2\right)\int_{t_{k-1}}^t\int_{t_{k-1}}^m y(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m+b\mathrm{e}^{-\lambda_0\tau}\int_{t_{k-1}}^t\int_{t_{k-1}}^m y(s-\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}m\\
&\quad-c\lambda_0^2\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_{t_{k-1}}^t\int_{t_{k-1}}^m y(s-\sigma)\mathrm{d}s\mathrm{d}m-2\lambda_0\int_{t_{k-1}}^t\int_{t_{k-1}}^m y'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m\\
&\quad-2c\lambda_0\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_{t_{k-1}}^t\int_{t_{k-1}}^m y'(s-\sigma)\mathrm{d}s\mathrm{d}m,
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$
\begin{aligned}
&y\left(t_2^-\right)+c\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}y\left(t_2-\sigma\right)\\
&=l_1\mathrm{e}^{-\lambda_0 t_k}+y\left(t_1^-\right)+c\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}y\left(t_1-\sigma\right)\\
&\quad+\left(a-\lambda_0^2\right)\int_{t_1}^{t}\int_{t_1}^{m}y(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m+b\mathrm{e}^{-\lambda_0\tau}\int_{t_1}^{t}\int_{t_1}^{m}y(s-\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}m\\
&\quad-c\lambda_0^2\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_{t_1}^{t}\int_{t_1}^{m}y(s-\sigma)\mathrm{d}s\mathrm{d}m-2\lambda_0\int_{t_1}^{t}\int_{t_1}^{m}y'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m\\
&\quad-2c\lambda_0\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_{t_1}^{t}\int_{t_1}^{m}y'(s-\sigma)\mathrm{d}s\mathrm{d}m,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&y\left(t_1^-\right)+c\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}y\left(t_1-\sigma\right)\\
&=l_0\mathrm{e}^{-\lambda_0 t_k}+y\left(t_0^-\right)+c\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}y\left(t_0-\sigma\right)\\
&\quad+\left(a-\lambda_0^2\right)\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{m}y(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m+b\mathrm{e}^{-\lambda_0\tau}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{m}y(s-\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}m\\
&\quad-c\lambda_0^2\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{m}y(s-\sigma)\mathrm{d}s\mathrm{d}m-2\lambda_0\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{m}y'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m\\
&\quad-2c\lambda_0\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{m}y'(s-\sigma)\mathrm{d}s\mathrm{d}m,
\end{aligned}
$$

根据(9)，递归代回(10)，得

$$
\begin{aligned}
&y(t)+c\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}y(t-\sigma)\\
&=\phi(0)+c\phi(-\sigma)+\sum_{i=1}^{\infty}l_i\mathrm{e}^{-\lambda_0 t_i}+\left(a-\lambda_0^2\right)\int_0^t\int_0^m y(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m\\
&\quad+b\mathrm{e}^{-\lambda_0\tau}\int_0^t\int_0^m y(s-\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}m-c\lambda_0^2\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_0^t\int_0^m y(s-\sigma)\mathrm{d}s\mathrm{d}m\\
&\quad-2\lambda_0\int_0^t\int_0^m y'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m-2c\lambda_0\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_0^t\int_0^m y'(s-\sigma)\mathrm{d}s\mathrm{d}m,
\end{aligned}
$$

同时，根据初始条件(8)可得

$$
\begin{aligned}
&y(t)+c\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}y(t-\sigma)\\
&=\phi(0)+c\phi(-\sigma)+\sum_{i=1}^{\infty}l_i\mathrm{e}^{-\lambda_0 t_i}+b\mathrm{e}^{-\lambda_0\tau}\int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{m}\mathrm{e}^{-\lambda_0 s}\phi(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m\\
&\quad-c\lambda_0^2\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_{-\sigma}^{0}\int_{-\sigma}^{m}\mathrm{e}^{-\lambda_0 s}\phi(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m-2c\lambda_0\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_{-\sigma}^{0}\int_{-\sigma}^{m}\mathrm{e}^{-\lambda_0 s}\phi'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m\\
&\quad+\left(a-\lambda_0^2\right)\int_0^t\int_0^m y(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m-2\lambda_0\int_0^t\int_0^m y'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m+b\mathrm{e}^{-\lambda_0\tau}\int_0^{t-\tau}\int_0^m y(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m\\
&\quad-c\lambda_0^2\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_0^{t-\sigma}\int_0^m y(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m-2c\lambda_0\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_0^{t-\sigma}\int_0^m y'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

对(11)两边同时求二阶导，可推出方程(6)，同时方程(7)显然可得。引理 1.3 得证。

推论 1.4 设 λ_0 是(4)的实根，当 $k\in z^+$ 时，$t_k-\sigma$ 不是脉冲点。那么 $x(t)$ 是方程(1)~(3)的唯一解，当且仅当

$$y(t)=\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}x(t),t\in[-h,\infty]$$

是(6)满足初始条件

$$y(t)=\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}x(t),t\in[-h,0]$$

的解。

定义 1.3 [6] 1) 若(1)~(2)的零解是稳定的，则 $\forall\delta,\tau>0$，$\exists\delta(\sigma,\tau)>0$，对任意的起始函数 ϕ 有

$$\|\phi\|=\max_{-h\le t\le 0}|\phi(t)|<\delta(\sigma,\tau),\|\phi'\|=\max_{-h\le t\le 0}|\phi'(t)|<\delta(\sigma,\tau)$$

且 $x(t)=x(t;0,\phi)$ 是(1)~(2)的解，那么对 $\forall t\in[-h,\infty)$

$$x(t;0,\phi)<\varepsilon\text{。}$$

2) 若(1)~(2)的零解是一致稳定，则 δ 与 σ,τ 无关；

3) 若(1)~(2)是零解是渐近稳定的，则 $\exists\delta_0>0$，对任意的起始函数 ϕ 有 $|\phi|<\delta_0(\sigma,\tau)$，$|\phi'|<\delta_0(\sigma,\tau)$ 且 $x(t)=x(t;0,\phi)$ 是(1)~(2)的解，那么对 $\forall t\in[-h,\infty)$

$$\lim_{t\to\infty}x(t;0,\phi)=0\text{。}$$

3. 解的渐近形态

本章节介绍的是满足初始条件(1)~(3)方程解的渐近性。

定理 2.1 若根 λ_0 满足

$$\mu(\lambda_0)=|c|\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}+\sum_{i=1}^{\infty}|l_i|\mathrm{e}^{-\lambda_0 t_i}+\frac{1}{2}|c|\sigma^2\lambda_0^2\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}+\frac{1}{2}|b|\tau^2\lambda_0^2\mathrm{e}^{-\lambda_0\tau}+\sigma^2|G(\lambda_0)|<1,\tag{12}$$

则(1)~(3)的解 x 满足

$$\lim_{t\to\infty}\left[\mathrm{e}^{-\lambda^0 t}x(t)\right]=\frac{L(\lambda_0;\phi)}{1+2\beta(\lambda_0)}.\tag{13}$$

其中：$G(\lambda_0)=\max\left\{\lambda_0,\lambda_0\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\right\}$

$$\begin{aligned}L(\lambda_0;\phi)=&\phi(0)+c\phi(-\sigma)+b\mathrm{e}^{-\lambda_0\tau}\int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{m}\mathrm{e}^{-\lambda_0 s}\phi(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m\\&-c\lambda_0^2\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_{-\sigma}^{0}\int_{-\sigma}^{m}\mathrm{e}^{-\lambda_0 s}\phi(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m-2c\lambda_0\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_{-\sigma}^{0}\int_{-\sigma}^{m}\mathrm{e}^{-\lambda_0 s}\phi'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m,\end{aligned}\tag{14}$$

$$\beta(\lambda_0)=\tau^2 b\mathrm{e}^{-\lambda_0\tau}+c\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\left(2-\lambda^2\sigma^2\right),\tag{15}$$

证明：由 2.1 可得 $\frac{1}{2}|\beta(\lambda_0)|+\sum_{i=1}^{\infty}|l_i|\mathrm{e}^{-\lambda_0 t_i}<\mu(\lambda_0)<1$，所以 $0<1+\frac{1}{2}\beta(\lambda_0)<2$。求 x 是(1)~(3)的解等价于求 y 是(6)~(8)的解。因为 λ_0 是(4)的实根，则对 $\forall t>0$，有

$$\begin{aligned}&y(t)+c\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}y(t-\sigma)\\&=L(\lambda_0;\phi)+\sum_{i=1}^{\infty}l_i\mathrm{e}^{-\lambda_0 t_i}+\left(a-\lambda_0^2\right)\int_0^t\int_0^m y(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m\\&\quad-2\lambda_0\int_0^t\int_0^m y'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m+b\mathrm{e}^{-\lambda_0\tau}\int_0^{t-\tau}\int_0^m y(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m\\&\quad-c\lambda_0^2\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_0^{t-\sigma}\int_0^m y(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m-2c\lambda_0\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_0^{t-\sigma}\int_0^m y'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=L(\lambda_0;\phi)+\sum_{i=1}^{\infty}l_i\mathrm{e}^{-\lambda_0 t_i}+\left(c\lambda_0^2\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}-b\mathrm{e}^{-\lambda_0\tau}\right)\int_0^t\int_0^m y(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m\\
&-2\lambda_0\int_0^t\int_0^m y'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m+b\mathrm{e}^{-\lambda_0\tau}\int_0^{t-\tau}\int_0^m y(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m\\
&-c\lambda_0^2\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_0^{t-\sigma}\int_0^m y(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m-2c\lambda_0\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_0^{t-\sigma}\int_0^m y'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m
\end{aligned}
$$

化解整理得

$$
\begin{aligned}
&y(t)+c\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}y(t-\sigma)\\
&=L(\lambda_0;\phi)+\sum_{i=1}^{\infty}l_i\mathrm{e}^{-\lambda_0 t_i}+c\lambda_0^2\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_{t-\sigma}^{t}\int_{t-\sigma}^{m}y(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m-b\mathrm{e}^{-\lambda_0\tau}\int_{t-\tau}^{t}\int_{t-\tau}^{m}y(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m\\
&-2\lambda_0\int_0^t\int_0^m y'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m-2c\lambda_0\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_0^{t-\sigma}\int_0^m y'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

令 $z(t)=y(t)-\dfrac{L(\lambda_0;\phi)}{1+2\beta(\lambda_0)}$，

则(16)等价于

$$
\begin{aligned}
&z(t)+c\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}z(t-\sigma)\\
&=\sum_{i=1}^{\infty}l_i\mathrm{e}^{-\lambda_0 t_i}+c\lambda_0^2\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_{t-\sigma}^{t}\int_{t-\sigma}^{m}z(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m-b\mathrm{e}^{-\lambda_0\tau}\int_{t-\tau}^{t}\int_{t-\tau}^{m}z(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m\\
&-2\lambda_0\int_0^t\int_0^m z'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m-2c\lambda_0\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_0^{t-\sigma}\int_0^m z'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

同时初值条件(8)等价于

$$
z(t)=\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}\phi(t)-\frac{L(\lambda_0;\phi)}{1+2\beta(\lambda_0)},\ t\in[-h,0]
\tag{18}
$$

于是得出(13)的等价方程

$$
\lim_{t\to\infty}z(t)=0,
\tag{19}
$$

当

$$
H(\lambda_0;\phi)=\max\left\{1,\max_{t\in[-h,0]}\left|\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}\phi(t)-\frac{L(\lambda_0;\phi)}{1+2\beta(\lambda_0)}\right|\right\},
\tag{20}
$$

可得当 $t\in[-h,0]$ 时，$|z(t)|\le H(\lambda_0;\phi)$。

现在将证明当 $t\in[-h,\infty]$ 时，$|z(t)|\le H(\lambda_0;\phi)$。运用反证法，假设 $\exists t^{\sim}>0$，使得 $|z(t^{\sim})|>H(\lambda_0;\phi)$，令

$$
t^*=\inf\left\{t^{\sim}:|z(t^{\sim})|>H(\lambda_0;\phi)\right\},
$$

因为 $z(t)$ 满足右连续，所以当 t^* 不是脉冲点时，$|z(t^*)|=H(\lambda_0;\phi)$，当它是脉冲点时，$|z(t^*)|\ge H(\lambda_0;\phi)$，也就是说，当 $-h\le t<t^*$ 时，$|z(t)|\le H(\lambda_0;\phi)$，那么通过(12)和(17)，得

$$
\begin{aligned}
\left|z\left(t^*\right)\right| = & \left| -c\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma} z\left(t^* - \sigma\right) \sum_{i=1}^{\infty} l_i \mathrm{e}^{-\lambda_0 t_i} \right. \\
& + c\lambda_0^2 \mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma} \int_{t^*-\sigma}^{t^*} \int_{t^*-\sigma}^{m} z(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}m - b\mathrm{e}^{-\lambda_0\tau} \int_{t^*-\tau}^{t^*} \int_{t^*-\tau}^{m} z(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}m \\
& \left. - 2\lambda_0 \int_0^{t^*} \int_0^{m} z'(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}m - 2c\lambda_0 \mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma} \int_0^{t^*-\sigma} \int_0^{m} z'(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}m \right| \\
\le & |c|\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma} \left|z\left(t^*-\sigma\right)\right| + \sum_{i=1}^{\infty} |l_i| \mathrm{e}^{-\lambda_0 t_i} \\
& + |c|\lambda_0^2 \mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma} \int_{t^*-\sigma}^{t^*} \int_{t^*-\sigma}^{m} |z(s)|\,\mathrm{d}s\mathrm{d}m - |b|\mathrm{e}^{-\lambda_0\tau} \int_{t^*-\tau}^{t^*} \int_{t^*-\tau}^{m} |z(s)|\,\mathrm{d}s\mathrm{d}m \\
& - 2|\lambda_0| \int_0^{t^*} \int_0^{m} |z'(s)|\,\mathrm{d}s\mathrm{d}m - 2|-c||\lambda_0| \mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma} \int_{t^*-\sigma}^{0} \int_0^{m} |z'(s)|\,\mathrm{d}s\mathrm{d}m \\
\le & |c|\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma} \left|z\left(t^*-\sigma\right)\right| + \sum_{i=1}^{\infty} |l_i| \mathrm{e}^{-\lambda_0 t_i} \\
& + |c|\lambda_0^2 \mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma} \int_{t^*-\sigma}^{t^*} \int_{t^*-\sigma}^{m} |z(s)|\,\mathrm{d}s\mathrm{d}m + |b|\mathrm{e}^{-\lambda_0\tau} \int_{t^*-\tau}^{t^*} \int_{t^*-\tau}^{m} |z(s)|\,\mathrm{d}s\mathrm{d}m \\
& + 2|\lambda_0| \int_0^{t^*} \int_0^{m} |z'(s)|\,\mathrm{d}s\mathrm{d}m + 2|c||\lambda_0| \mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma} \int_{t^*-\sigma}^{0} \int_0^{m} |z'(s)|\,\mathrm{d}s\mathrm{d}m \\
\le & |c|\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma} \left|z\left(t^*-\sigma\right)\right| + \sum_{i=1}^{\infty} |l_i| \mathrm{e}^{-\lambda_0 t_i} \\
& + |c|\lambda_0^2 \mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma} \int_{t^*-\sigma}^{t^*} \int_{t^*-\sigma}^{m} |z(s)|\,\mathrm{d}s\mathrm{d}m + |b|\mathrm{e}^{-\lambda_0\tau} \int_{t^*-\tau}^{t^*} \int_{t^*-\tau}^{m} |z(s)|\,\mathrm{d}s\mathrm{d}m \\
& + 2\left|G(\lambda_0)\right| \int_{t^*-\sigma}^{t^*} \int_{t^*-\sigma}^{m} |z'(s)|\,\mathrm{d}s\mathrm{d}m \\
\le & H(\lambda_0;\phi)\left(|c|\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma} + \sum_{i=1}^{\infty} |l_i| \mathrm{e}^{-\lambda_0 t_i} + \frac{1}{2}|c|\sigma^2\lambda_0^2 \mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma} + \frac{1}{2}|b|\tau^2\lambda_0^2 \mathrm{e}^{-\lambda_0\tau} + \sigma^2 \left|G(\lambda_0)\right| \right) \\
\le & H(\lambda_0;\phi)\mu(\lambda_0) \\
< & H(\lambda_0;\phi),
\end{aligned}
$$

与假设矛盾，所以当 $t\in[-h,\infty]$ 时，$|z(t)|\le H(\lambda_0;\phi)$ 得证。

同时，对于 $t\ge 0$，有

$$
|z(t)| \le \mu(\lambda_0) H(\lambda_0;\phi), \tag{21}
$$

得出，对于 $t\ge nh-h\,(n=0,1,\cdots)$，有 $|z(t)|\le|\mu(\lambda_0)|^n H(\lambda_0;\phi)$。

根据(12)有，$\lim\limits_{n\to\infty}|\mu(\lambda_0)|^n=0$，所以

$$
\lim_{t\to\infty} z(t) = \lim_{t\to\infty}\left\{ \mathrm{e}^{-\lambda_0 t}\phi(t) - \frac{L(\lambda_0;\phi)}{1+2\beta(\lambda_0)} \right\} = 0,
$$

由此可得

$$
\lim_{t\to\infty}\left[\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}\phi(t)\right] = \frac{L(\lambda_0;\phi)}{1+2\beta(\lambda_0)}.
$$

定理 2.1 得证。

定理 2.2 若 λ_0 是(4)的实根且满足(12)，则

$$a+b=0, \tag{22}$$

$$|c|+\sum_{i=1}^{\infty}|l_i|\mathrm{e}^{-\lambda_0 t_i}+\frac{1}{2}|b|\tau^2<1, \tag{23}$$

证明：显然可得。

推论 2.3 若(16)~(17)成立，则(1)~(3)的解满足

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=\frac{\phi(0)+c\phi(-\sigma)+b\int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{m}\phi(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m}{1+\tau^2 b+2c}, \tag{24}$$

其中：$0<1+\tau^2 b+2c<2$。

4. 解的稳定性判断

定理 3.1 若定理 1 成立，$\mu(\lambda_0)<1$成立，

$$R(\lambda_0;\phi)=\left\{1,\max_{-h\le t\le 0}|\phi(t)|,\max_{-h\le t\le 0}[\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}|\phi(t)|,\max_{-h\le t\le 0}\left[\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}|\phi'(t)|\right]\right\}, \tag{25}$$

则当 $t\in[0,\infty)$ 时，(1)~(3)的解 x 满足

$$|x(t)|\le N(\lambda_0)R(\lambda_0;\phi)\mathrm{e}^{\lambda_0 t}. \tag{26}$$

其中：$N(\lambda_0)=\mu(\lambda_0)\left(1+\frac{k(\lambda_0)}{1+2\beta(\lambda_0)}\right)+\left(\frac{k(\lambda_0)}{1+2\beta(\lambda_0)}\right)$

$k(\lambda_0)=1+|c|+\frac{1}{2}|b|\tau^2\mathrm{e}^{-\lambda_0\tau}+\frac{1}{2}|c|\lambda^2\sigma^2\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}+|c||\lambda_0|\sigma^2\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}$。

同时，(1)~(3)的解 x 是

1) 稳定的。若 $\lambda_0=0$时，(2.9)~(2.10)成立；

2) 渐近稳定的。若 $\lambda_0<0$；

3) 不稳定的。若 $\lambda_0>0$。

证明：假设 x 是(1)~(3)的解，对于 $\forall t\ge -h$

$$z(t)=y(t)-\frac{L(\lambda_0;\phi)}{1+2\beta(\lambda_0)},\ y(t)=\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}x(t),$$

根据(21)，得

$$\begin{aligned}|y(t)|&\le|z(t)|+\left|\frac{L(\lambda_0;\phi)}{1+2\beta(\lambda_0)}\right|\\&\le\mu(\lambda_0)H(\lambda_0;\phi)+\frac{|L(\lambda_0;\phi)|}{1+2\beta(\lambda_0)},\end{aligned}$$

再根据(12)，(13)可得

$$
\begin{aligned}
\left|L(\lambda_0;\phi)\right| &\le \left|\phi(0)\right| + |c|\phi(-\sigma) + |b|\mathrm{e}^{-\lambda_0\tau}\int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{m}\mathrm{e}^{-\lambda_0 s}\phi(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}m \\
&\quad + |c|\lambda_0^2\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_{-\sigma}^{0}\int_{-\sigma}^{m}\mathrm{e}^{-\lambda_0 s}\phi(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}m + 2|c||\lambda_0|\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_{-\sigma}^{0}\int_{-\sigma}^{m}\mathrm{e}^{-\lambda_0 s}\phi'(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}m \\
&\le \left(1+|c|+\frac{1}{2}|b|\tau^2\mathrm{e}^{-\lambda_0\tau}+\frac{1}{2}|c|\lambda_0^2\sigma^2\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}+|c|\lambda_0\sigma^2\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\right)R(\lambda_0;\phi) \\
&\le N(\lambda_0)R(\lambda_0;\phi).
\end{aligned}
$$

另一方面，根据定理 2.1

$$
\begin{aligned}
H(\lambda_0;\phi) &\le \max\left\{1, R(\lambda_0;\phi)+\frac{L(\lambda_0;\phi)}{1+2\beta(\lambda_0)}\right\} \\
&\le R(\lambda_0;\phi)+\frac{L(\lambda_0;\phi)}{1+2\beta(\lambda_0)} \\
&\le R(\lambda_0;\phi)+\frac{k(\lambda_0)R(\lambda_0;\phi)}{1+2\beta(\lambda_0)} \\
&= \left(1+\frac{k(\lambda_0)}{1+2\beta(\lambda_0)}\right)R(\lambda_0;\phi),
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
y(t) &\le \mu(\lambda_0)H(\lambda_0;\phi)+\frac{L(\lambda_0;\phi)}{1+2\beta(\lambda_0)} \\
&\le \mu(\lambda_0)\left(1+\frac{k(\lambda_0)}{1+2\beta(\lambda_0)}\right)R(\lambda_0;\phi)+\frac{k(\lambda_0)R(\lambda_0;\phi)}{1+2\beta(\lambda_0)} \\
&\le \left\{\mu(\lambda_0)\left(1+\frac{k(\lambda_0)}{1+2\beta(\lambda_0)}\right)+\frac{k(\lambda_0)}{1+2\beta(\lambda_0)}\right\}R(\lambda_0;\phi) \\
&= N(\lambda_0)R(\lambda_0;\phi),
\end{aligned}
$$

所以，当 $t \ge 0$ 时

$$
\left|x(t)\right| \le N(\lambda_0)R(\lambda_0;\phi)\mathrm{e}^{\lambda_0 t},
$$

综上所述，定理 3.1 第一部分得证。

现在将证明定理 3.1 中的三条稳定性。设 $\phi \in C([-h,0],R)$，x 是(1.1)~(1.3)的解

1) 当 $\lambda_0 = 0$ 时，对 $\forall t \ge 0$

$$
\left|x(t)\right| \le N(\lambda_0)R(\lambda_0;\phi),
$$

因为 $\|\phi\| = \max\limits_{-h\le t\le 0}\left|\phi(t)\right| \le R(\lambda_0;\phi)$，则对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta = \dfrac{\varepsilon}{N(\lambda_0)}$，使 $R(\lambda_0;\phi) < \delta$，则

$$
\left|x(t)\right| \le N(\lambda_0)R(\lambda_0;\phi) \le N(\lambda_0)\delta = \varepsilon,
$$

所以(1)~(3)的零解是稳定的。

2) 当 $\lambda_0 < 0$ 时，对 $\forall t \ge 0$，

$$
\left|x(t)\right| \le N(\lambda_0)R(\lambda_0;\phi),
$$

即

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=0,$$

所以(1.1)~(1.3)的零解是渐近稳定的。

3) 当 $\lambda_0>0$ 时，我们运用反证法。假设 $\lambda_0>0$ 时，(1)~(3)的零解是稳定的。则 $\exists\delta>0$，$\|\phi\|<\delta$ 即当 $t\ge -h$ 时，

$$|x(t)|<1, \tag{27}$$

设 $\phi_0(t)=\mathrm{e}^{\lambda_0 t}, t\in[-h_0,0]$，则

$$\begin{aligned}L(\lambda_0;\phi_0)&\le\phi_0(0)+c\phi_0(-\sigma)+b\mathrm{e}^{-\lambda_0\tau}\int_{-\tau}^{0}\int_{-\tau}^{m}\mathrm{e}^{-\lambda_0 s}\phi_0(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m\\&\quad+c\lambda_0^2\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_{-\sigma}^{0}\int_{-\sigma}^{m}\mathrm{e}^{-\lambda_0 s}\phi(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m+2c\lambda_0\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\int_{-\sigma}^{0}\int_{-\sigma}^{m}\mathrm{e}^{-\lambda_0 s}\phi_0'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}m\\&\le 1+\frac{1}{2}b\tau^2\mathrm{e}^{-\lambda_0\tau}+c\mathrm{e}^{-\lambda_0\sigma}\left(1+\frac{1}{2}\lambda_0^2\sigma^2\right)\\&\le 1+2\beta(\lambda_0)>0,\end{aligned}\tag{28}$$

设 $\exists\delta_0>0$，满足 $0<\delta_0<\delta$，则

$$\phi=\frac{\delta_0}{\|\phi_0\|}\phi_0\in C([-h,0],R),$$

其中 $\phi_0=\delta_0<\delta$，于是(1)~(3)满足(27)。

另一方面，根据(13)有

$$\lim_{t\to\infty}\left[\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}x(t)\right]=\frac{L(\lambda_0;\phi)}{1+\frac{1}{2}\beta(\lambda_0)}=\frac{\frac{\delta_0}{\|\phi\|}L(\lambda_0;\phi)}{1+\frac{1}{2}\beta(\lambda_0)}=\frac{\delta_0}{\|\phi_0\|}>0,$$

但是由(27)可知，当 $\lambda_0>0$，$\lim_{t\to\infty}\left[\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}x(t)\right]=0$，矛盾。所以当 $\lambda_0>0$ 时，(1.1)~(1.3)的零解是稳定的。综上所述定理 3.1 得证。

5. 实例验证

$$\left[x(t)-\frac{1}{3\mathrm{e}}x\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]''=\frac{1}{3}x(t)-\frac{1}{3}x(t)-\frac{1}{\mathrm{e}}x\left(t-\frac{1}{5}\right),\ t\ne k \tag{29}$$

$$\Delta x(t_k)=\left(-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^k, k\in z^+$$

$$x(t)=\phi(t), \frac{1}{2}\le t\le 0$$

其中 $\phi\in\left(\left[-\frac{1}{2},0\right],R\right)$。

解：(29)的特征方程

$$\lambda^2\left(1-\frac{1}{3\mathrm{e}}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{\mathrm{e}}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{5}}$$

由图 1 可知特征方程的根有两个，解得 $\lambda_1\approx-4.25$，$\lambda_2\approx 0.07$。

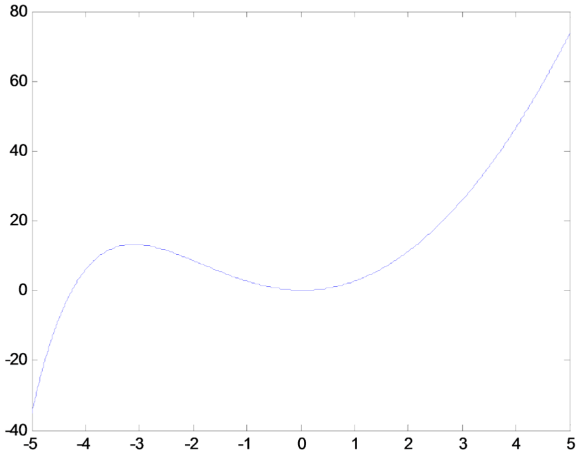

Figure 1. (29) graph of characteristic equation
图 1. (29)特征方程的曲线图

1) 当 $\lambda_1 \approx -4.25$ 时，$\sum_{i=1}^{\infty}|l_i|\mathrm{e}^{-\lambda_1 t_i} \to \infty$，则 $\mu(\lambda_1) \to \infty$，所以方程(29)不适用于定义 3.1。

2) 当 $\lambda_2 \approx 0.07$

$$\mu(\lambda_2) = (-0.07) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-1.035} + \sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-1.07i} + \frac{0.0049}{12}\mathrm{e}^{-1.35} + \frac{0.049}{100}\mathrm{e}^{-1.012} + \frac{0.049}{4} \approx 0.6419 < 1$$

满足定理 3.1 的条件，所以方程(2.9)的零解是渐近稳定的。

6. 总结

文章研究了二阶线性脉冲中立型时滞微分方程解的渐近形态和稳定性，采用的是特征方程实根的方法，通过特征方程的根与零的关系来判断方程零解的稳定性，最后通过一个实例来验证结果.

参考文献

[1] Zhang, G.L., Song, M.H. and Liu, M.Z. (2015) Exponential Stability of the Exact Solutions and the Numerical Solutions for a Class of Linear Impulsive Delay Differential Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **285**, 32-44. https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.01.034

[2] 张艳玲, 孙涛, 沙秋夫. 二阶常系数中立型微分方程零解的稳定性[J]. 鞍山科技大学学报, 2006, 29(4): 133-136.

[3] Fu, X.Z. and Zhu, Q.X. (2020) Exponential Stability of Neutral Stochastic Delay Differential Equation with Delay-Dependent Impulses. *Applied Mathematics and Computation*, **377**, 1-9. https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125146

[4] Yeniçerioğlu, A.F. and Yalçinbaş, S. (2004) On the Stability of the Second-Order Delay Differential Equations with Variable Coefficients. *Applied Mathematics and Computation*, **152**, 667-673. https://doi.org/10.1016/S0096-3003(03)00584-8

[5] Yeniçerioğlu, A.F. (2019) Stability of Linear Impulsive Neutral Delay Differential Equations with Constant Coefficients. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **479**, 2196-2213. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.07.049

[6] 郑祖庥. 泛函微分方程理论[M]. 合肥: 安徽教育出版社, 1994.