

广义Mycielskian图的匹配相关性质的研究

周鑫¹, 边红^{1*}, 于海征², 杨晓英¹

¹新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

²新疆大学数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐

Email: ^{*}bh1218@163.com

收稿日期: 2020年10月7日; 录用日期: 2020年10月21日; 发布日期: 2020年10月28日

摘要

为了研究一类不含三角形, 但具有任意大色数的图类时, Mycielski介绍了一种图变换 $\mu(G)$, 称为图 G 的Mycielskian图。对于任意正整数 m , 图 G 的广义Mycielskian图 $\mu_m(G)$ 是图 G 的Mycielskian图的一种自然推广。在本文中, 我们研究了(广义) Mycielskian图的与匹配相关的一些性质, 包括正则性、分数完美匹配的存在性和完美2-匹配的存在性。

关键词

广义Mycielskian图, 分数完美匹配, 完美2-匹配

The Study of Some Matching-Related Properties of Generalized Mycielskian Graphs

Xin Zhou¹, Hong Bian^{1*}, Haizheng Yu², Xiaoying Yang¹

¹School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

²College of Mathematics and Systems Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang

Email: ^{*}bh1218@163.com

Received: Oct. 7th, 2020; accepted: Oct. 21st, 2020; published: Oct. 28th, 2020

Abstract

In order to study triangle-free graphs with arbitrarily large chromatic number, Mycielski introduced a graph transformation that transforms a graph G into a new graph $\mu(G)$, which is called the

*通讯作者。

Mycielskian of G . The generalized Mycielskian graph $\mu_m(G)$ is natural generalized of Mycielskian of G , where m is any positive integer. In this paper, we proved some properties of (generalized) Mycielskian of graph G related to matchings, such as regularizability, the existence of fractional perfect matchings and perfect 2-matchings.

Keywords

Generalized Mycielskian, Fractional Perfect Matching, Perfect 2-Matching

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

为了寻找一类不含三角形但具有任意大色数的图类, Mycielski 在 1955 年引入了一种新的图变换, 称为 Mycielskian 图[1]。令 G 是一个图, 顶点集 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 。图 G 的 Mycielskian 图记为 $\mu(G)$, 它的顶点集为 $V^0 \cup V^1 \cup \{u\} = \{v_1^0, \dots, v_n^0, v_1^1, \dots, v_n^1, u\}$, 边集为 $\{v_i^0 v_j^1, v_j^0 v_i^1 : v_i v_j \in E(G)\} \cup \{v_i^1 u\}$, $1 \leq i, j \leq n$ 。Mycielskian 图有许多与色临界性、连通性、色数和分数色数等有关的有趣性质。首先 Mycielski 构造的图 $\mu(G)$ 满足 $\omega(\mu(G)) = \omega(G)$, $\chi(\mu(G)) = \chi(G) + 1$, 这里 $\omega(G)$, $\chi(G)$ 分别代表图 G 的团数和色数。同年 Larsen 等人[2]推广了 Mycielski 的结果, 证明了 $\omega(\mu(G)) = \max(2, \omega(G))$, $\chi(\mu(G)) = \chi(G) + 1$ 。同时他们还研究了 Mycielskian 图的分数色数, 证明了 $\chi_f(\mu(G)) = \chi_f(G) + \frac{1}{\chi_f(G)}$, 其中 $\chi_f(G)$ 代表图 G 的分数色数。1998 年 Fisher 等人给出了 Mycielskian 图的团数、邻接矩阵、二部拆分数、直径、packing 数和控制数[3]。

对于一个简单连通图 G , 它的迭代 Mycielskian 图 $\mu^k(G)$ 定义为 $\mu^0(G) = G$, 并且对于任意 $k \geq 1$, 都有 $\mu^k(G) = \mu(\mu^{k-1}(G))$, 如图 1 为 K_2 和它的一次以及二次迭代 Mycielskian 图。Chang 等人[4]在 1999 年研究了迭代 Mycielskian 图的循环色数。2005 年 Došlić 研究了迭代 Mycielskian 图的因子临界性、正则性以及完美 2-匹配的存在性[5]。

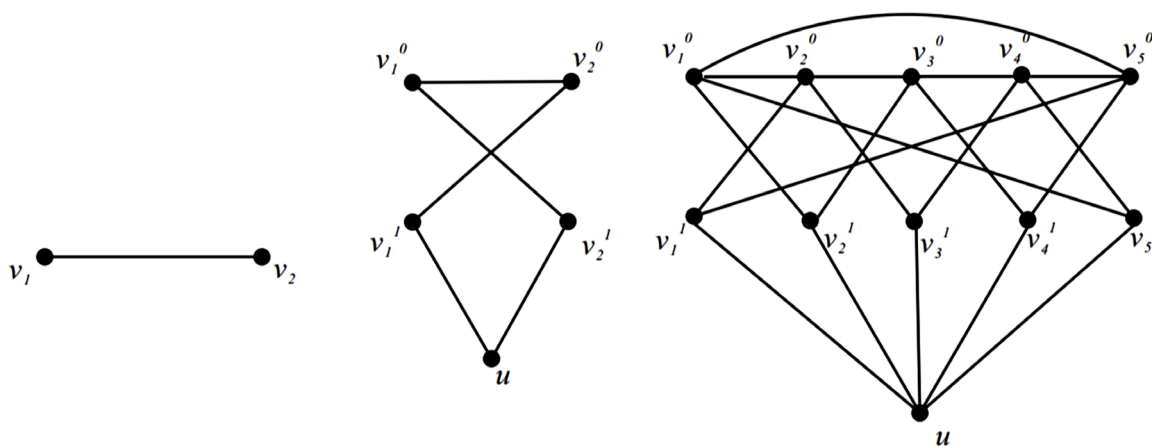


Figure 1. The graph K_2 , $\mu^1(K_2)$ and $\mu^2(K_2)$

图 1. 图 K_2 , $\mu^1(K_2)$ 和 $\mu^2(K_2)$

广义 Mycielskian 图是 Mycielskian 图的一个自然推广。对于任意一个正整数 $m(m \geq 1)$, 图 G 的广义 Mycielskian 图记为 $\mu_m(G)$ 。它的顶点集为 $V^0 \cup V^1 \cup V^2 \cup \dots \cup V^m \cup \{u\}$, 其中 $V^i = \{v_j^i : v_j^0 \in V^0\}$ 是 V^0 的第 i 个不同的拷贝, 这里 $i=1, 2, \dots, m$ 。 $\mu_m(G)$ 的边集为 $E^0 \cup \left(\bigcup_{i=0}^{m-1} \{v_j^i v_{j+1}^{i+1} : v_j^0 v_{j+1}^0 \in E^0\} \right) \cup \{v_j^m u : v_j^m \in V^m\}$, $j=1, 2, \dots, n$ 。如图 2 为 C_4 和 $\mu(C_4)$ 以及 $\mu_2(C_4)$ 。我们定义 $\mu_0(G)$ 是由图 G 增加一个全局点 u 而得到的图。显然, $\mu_1(G)$ 就是所谓的图 G 的 Mycielskian 图。关于广义 Mycielskian 图的很多基本性质已经有了明确的结果。2003 年 Lam 等人[6]完全确定了完全图 K_n 的广义 Mycielskian 图的循环色数。Lam 等人[7]在 2006 年研究了广义 Mycielskian 图的循环团数、全控制数、开 packing 数、分数开 packing 数、点覆盖数、行列式、谱和双团划分数等。

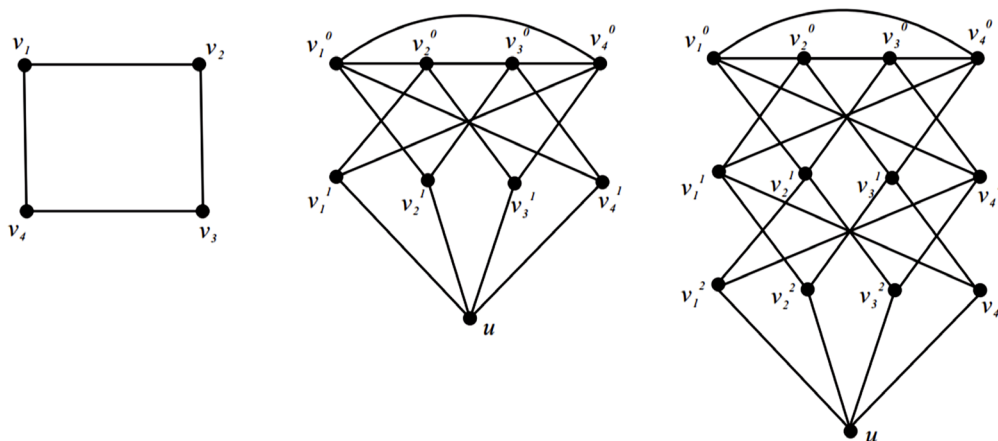


Figure 2. C_4 , $\mu(C_4)$ and $\mu_2(C_4)$

图 2. C_4 和 $\mu(C_4)$ 以及 $\mu_2(C_4)$

一个图 G 的分数匹配就是给图 G 中的每条边赋权值 $w, w \in [0, 1]$, 使得图 G 中与每个点相关联的边的权值之和不超过 1, 若图 G 中的每个点相关联的边的权值之和恰好等于 1, 则称图 G 具有分数完美匹配[4]。一个图 G 的 2-匹配就是给图 G 中每条边赋权值 $q, q \in \{0, 1, 2\}$, 使得与每个点相关联的边的权值之和不超过 2, 若图 G 中的每个点相关联的边权值之和恰好为 2, 则称图 G 具有完美 2-匹配[3]。

目前有关(广义) Mycielskian 图的结果已经有很多。本文在前人研究的基础上, 主要研究了 $\mu_m(G)$ 和 $\mu^k(G)$ 的正则性、分数完美匹配的存在性以及完美 2-匹配的存在性, 并给出了具体的赋值方式。

2. 主要结论

定理 1. 令图 G 是一个具有分数完美匹配的图, 那么 $\mu_m(G)$ 也是一个具有分数完美匹配的图。

证明. 我们在原图中选择一条具有最大权值 $a(a \geq 1/2)$ 的边 $e = v_k v_l$, 我们构造如下 $\mu_m(G)$ 的一个分数完美匹配(如图 3 所示)。

情形 1: 当 m 为偶数时, 给以下 e 的生成边 $\{v_k^m u, v_l^m u, v_k^q v_l^{q+1}, v_l^q v_k^{q+1}\}$ (q 为偶数)赋值 $1/2$; 给 $\{v_i^p v_j^{p+1}, v_j^p v_i^{p+1}, v_i^m u, v_j^m u\}$ (p 为偶数)赋值 0; 给以下 e 的生成边 $\{v_k^0 v_l^0, v_k^q v_l^{q+1}, v_l^q v_k^{q+1}\}$ (q 为奇数)赋值 $a-1/2$; 最后给以下 $v_i v_j$ 的生成边 $\{v_i^p v_j^{p+1}, v_j^p v_i^{p+1}, v_i^0 v_j^0\}$ (p 为奇数)的赋值与原图中 $v_i v_j$ 的权值相同。

情形 2: 当 m 为奇数时, 给以下 e 的生成边 $\{v_k^m u, v_l^m u, v_k^q v_l^{q+1}, v_l^q v_k^{q+1}\}$ (q 为奇数)赋值 $1/2$; 给 $\{v_i^0 v_j^0, v_i^p v_j^{p+1}, v_j^p v_i^{p+1}, v_i^m u, v_j^m u\}$ (p 为奇数)赋值 0; 给以下 e 的生成边 $\{v_k^q v_l^{q+1}, v_l^q v_k^{q+1}\}$ (q 为偶数)赋值 $a-1/2$; 最后给以下 $v_i v_j$ 的生成边 $\{v_i^p v_j^{p+1}, v_j^p v_i^{p+1}\}$ (p 为偶数)的赋值与原图中 $v_i v_j$ 的权值相同。

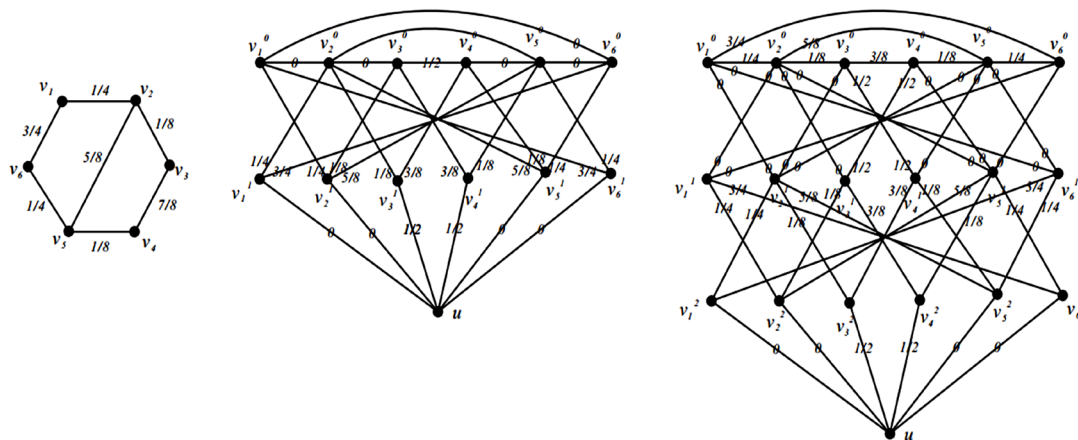


Figure 3. Fractional perfect matchings of the graph G , $\mu(G)$ and $\mu_2(G)$

图 3. 图 G , $\mu(G)$ 和 $\mu_2(G)$ 的分数完美匹配

根据广义 Mycielskian 图的定义, $\mu_1(G)$ 就是 Mycielskian 图, 根据定理 1 可知若图 G 具有分数完美匹配, 则 $\mu_1(G)$ 也具有分数完美匹配。故有如下结论:

推论 2. 令图 G 是一个具有分数完美匹配的图, 那么 $\mu^k(G)$ ($k \geq 1$) 也是一个具有分数完美匹配的图。

本文第二作者证明了, 若原图 G 是哈密尔顿图, 则 μ 也是一个哈密尔顿图[8]。事实上, 若一个图是哈密尔顿图, 则 G 一定有哈密尔顿圈, 只需给哈密尔顿圈上的每一条边赋权值为 $\frac{1}{2}$, 其余边赋权值为 0, 这样的赋权自然是一个图 G 的分数完美匹配。

推论 3. 若图 G 是一个具有分数完美匹配的哈密尔顿图, 那么 $\mu_m(G)$ 也是一个具有分数完美匹配的哈密尔顿图。

定理 4. 若图 G 具有完美 2-匹配, 那么 $\mu_m(G)$ 也具有完美 2-匹配。

证明. 令 F 是图 G 的一个完美 2-匹配。我们根据 F 中边的权值的不同分如下两种情形构造 $\mu_m(G)$ 的一个完美 2-匹配 F' :

情形 1: 若 F 至少包含一条边 $e = v_k v_l$ 的权值为 2, 根据 m 的奇偶性, 我们构造如下 $\mu_m(G)$ 的一个完美 2-匹配 F' (如图 4 所示): 当 m 为偶数时, 给以下 e 的生成边 $\{v_k^m u, v_l^m u, v_k^0 v_l^0, v_k^q v_l^{q+1}, v_l^q v_k^{q+1}\}$ 赋权值为 1; 给 $\{v_i^p v_j^{p+1}, v_j^p v_i^{p+1}, v_i^m u, v_j^m u\}$ (p 为偶数) 赋权值为 0; 最后给以下 $v_i v_j$ 的生成边 $\{v_i^p v_j^{p+1}, v_j^p v_i^{p+1}, v_i^0 v_j^0\}$ (p 为奇数) 的赋权值与原图中 $v_i v_j$ 的权值相同。当 m 为奇数时, 给以下 e 的生成边 $\{v_k^m u, v_l^m u, v_k^0 v_l^0, v_k^q v_l^{q+1}, v_l^q v_k^{q+1}\}$ 赋权值为 1; 给 $\{v_i^p v_j^{p+1}, v_j^p v_i^{p+1}, v_i^0 v_j^0, v_i^m u, v_j^m u\}$ (p 为奇数) 赋权值为 0; 最后给以下 $v_i v_j$ 的生成边 $\{v_i^p v_j^{p+1}, v_j^p v_i^{p+1}\}$ (p 为偶数) 的赋权值与原图中 $v_i v_j$ 的权值相同。通过这种方式, 对于 F 中的任何奇圈, 在 F' 中都会有一个和它相对应的偶圈, 对于 F 中的任何偶圈, 在 F' 中都会有一对相同长度的偶圈与之对应。因此 F' 是 $\mu_m(G)$ 的一个完美 2-匹配。

情形 2: 若 F 中没有权值为 2 的边, 取一个权值为 1 的边 $e = v_k v_l$ 。根据 m 的奇偶性, 我们构造如下 $\mu_m(G)$ 的一个完美 2-匹配 F' (如图 5 所示): 当 m 为偶数时, 给以下 e 的生成边 $\{v_k^m u, v_l^m u, v_k^q v_l^{q+1}, v_l^q v_k^{q+1}\}$ (q 为偶数) 赋权值为 1; 给 $\{v_i^p v_j^{p+1}, v_j^p v_i^{p+1}\}$ (p 为偶数), $\{v_i^m u, v_j^m u, v_k^q v_l^{q+1}, v_l^q v_k^{q+1}, v_i^0 v_j^0\}$ (q 为奇数) 赋权值为 0; 最后给以下 $v_i v_j$ 的生成边 $\{v_i^p v_j^{p+1}, v_j^p v_i^{p+1}, v_i^0 v_j^0\}$ (p 为奇数) 的赋权值与原图中 $v_i v_j$ 的权值相同。当 m 为奇数时, 给以下 e 的生成边 $\{v_k^m u, v_l^m u, v_k^0 v_l^0, v_k^q v_l^{q+1}, v_l^q v_k^{q+1}\}$ (q 为奇数) 赋权值为 1; 给 $\{v_k^q v_l^{q+1}, v_l^q v_k^{q+1}, v_i^0 v_j^0, v_i^m u, v_j^m u, v_i^p v_j^{p+1}, v_j^p v_i^{p+1}\}$ (p 为奇数, q 为偶数) 赋权值为 0; 最后给以下 $v_i v_j$ 的生成边 $\{v_i^p v_j^{p+1}, v_j^p v_i^{p+1}\}$ (p 为偶数) 的赋权值与原图中 $v_i v_j$ 的权值相同。

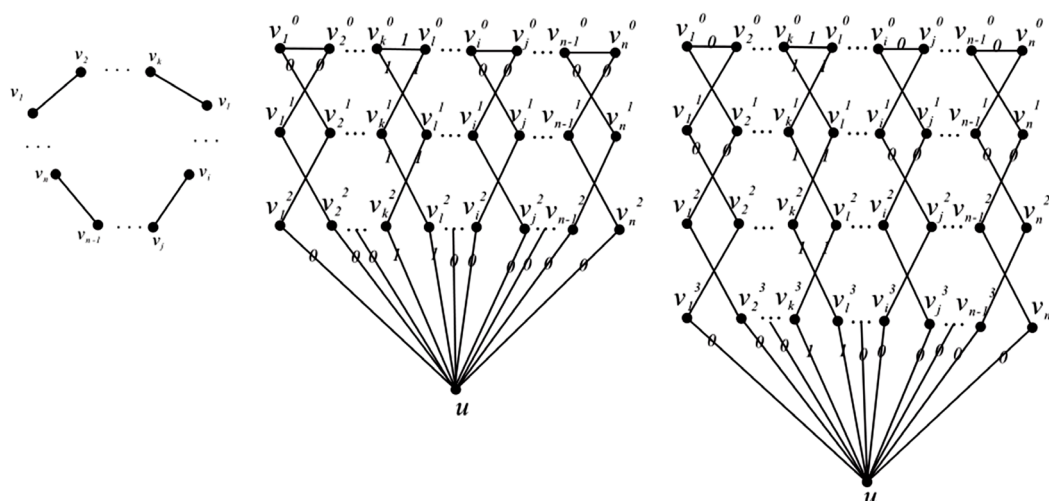


Figure 4. (Case 1) The perfect 2-matchings of the original graph G , $\mu_2(G)$ and $\mu_3(G)$

图 4. (情形 1) 原图 G , $\mu_2(G)$ 和 $\mu_3(G)$ 的完美 2-匹配

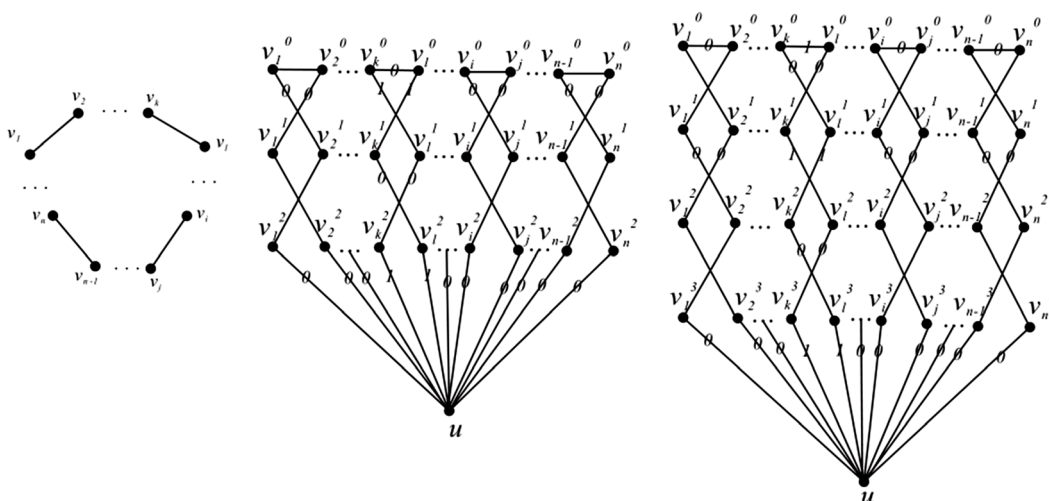


Figure 5. (Case 2) The perfect 2-matchings of the original graph G , $\mu_2(G)$ and $\mu_3(G)$

图 5. (情形 2) 原图 G , $\mu_2(G)$ 和 $\mu_3(G)$ 的完美 2-匹配

如果图 G 是一个哈密顿图，只需给图 G 的一个哈密顿圈上的所有边赋权值为 1，其余边赋权值为 0，这种赋值自然是图 G 的一个完美 2-匹配。因此，类似与推论 3，我们有如下结果：

推论 5. 若图 G 是一个具有完美 2-匹配的哈密顿图，那么 $\mu_m(G)$ 也是一个具有完美 2-匹配的哈密顿图。

具有完美 2-匹配的图与具有正则性的图相关，正则性是广义 Mycielskian 图结构所保留的另一个与匹配相关的性质。一个图 G 称为是可正则化的，若图 G 的每条边用一些非空的平行边代替之后，所得的图是一个正则图[9]。

引理 6. 一个图是可正则化的当且仅当图 G 的每条边 e 都存在一个完美 2-匹配，其中 e 的权值为 1 或 2 [9]。

定理 7. 若图 G 是可正则化的，那么 $\mu_m(G)$ 也是可正则化的。

证明. 根据引理 6，为了得到 $\mu_m(G)$ 的正则性，我们只需证明对于 $\mu_m(G)$ 的每条边 e ，存在一个权值为 1 或者 2 的完美 2-匹配。

情形 1: 若图 G 存在一个完美 2-匹配 F 使得 $e = v_k v_l \in E(G)$ 的权值为 2, 我们构造如下 $\mu_m(G)$ 的一个完美 2-匹配 F' : 给所有由 e 生成的边赋权值为 1, 当拷贝偶次时: 给 $\{v_i^p v_j^{p+1}, v_j^p v_i^{p+1}, v_i^m u, v_j^m u\}$ (p 为偶数) 赋权值为 0; 给以下 $v_i v_j$ 的生成边 $\{v_i^p v_j^{p+1}, v_j^p v_i^{p+1}, v_i^0 v_j^0\}$ (p 为奇数) 的赋值与原图中 $v_i v_j$ 的权值相同。当拷贝奇次时, 给所有由 e 生成的边赋权值为 1, 给 $\{v_i^p v_j^{p+1}, v_j^p v_i^{p+1}, v_i^0 v_j^0, v_i^m u, v_j^m u\}$ (p 为奇数) 赋权值为 0; 给以下 $v_i v_j$ 的生成边 $\{v_i^p v_j^{p+1}, v_j^p v_i^{p+1}\}$ (p 为偶数) 的赋值与原图中 $v_i v_j$ 的权值相同。

情况 2: 若图 G 存在一个完美 2-匹配 F 使得 $e = v_k v_l \in E(G)$ 的权值为 1, 我们构造如下 $\mu_m(G)$ 的一个完美 2-匹配 F' : 当 m 是偶数时, 给以下 e 的生成边 $\{v_k^m u, v_l^m u, v_k^q v_l^{q+1}, v_l^q v_k^{q+1}\}$ (q 为偶数) 赋权值为 1; 给 $\{v_i^p v_j^{p+1}, v_j^p v_i^{p+1}\}$ (p 为偶数), $\{v_i^m u, v_j^m u, v_k^q v_l^{q+1}, v_l^q v_k^{q+1}, v_i^0 v_j^0\}$ (q 为奇数) 赋权值为 0; 给以下 $v_i v_j$ 的生成边 $\{v_i^p v_j^{p+1}, v_j^p v_i^{p+1}, v_i^0 v_j^0\}$ (p 为奇数) 的赋值与原图中 $v_i v_j$ 的权值相同。当 m 是奇数时, 给以下 e 的生成边 $\{v_k^m u, v_l^m u, v_k^q v_l^{q+1}, v_l^q v_k^{q+1}\}$ (q 为奇数) 赋权值为 1; 给 $\{v_k^q v_l^{q+1}, v_l^q v_k^{q+1}, v_i^0 v_j^0, v_i^m u, v_j^m u, v_i^p v_j^{p+1}, v_j^p v_i^{p+1}\}$ (p 为奇数, q 为偶数) 赋权值为 0; 给以下 $v_i v_j$ 的生成边 $\{v_i^p v_j^{p+1}, v_j^p v_i^{p+1}\}$ (p 为偶数) 的赋值与原图中 $v_i v_j$ 的权值相同。这就证明了对于 $\mu_m(G)$ 的每条边 e , 存在一个权值为 1 或者 2 的完美 2-匹配。

如果图 G 的每条边都包含在某个完美匹配中, 那么称图 G 是 1-可扩的。下面给出 1-可扩图的广义 Mycielskian 图的正则性的结果。

推论 8. 若 G 是 1-可扩图, 那么 $\mu_m(G)$ 是可正则化的。

证明. 通过给图 G 中的某个完美匹配赋权值为 2, 我们可以得到一个完美 2-匹配, 这就说明每个完美匹配也是一个完美 2-匹配。根据引理 6 可知图 G 是可正则化的, 再根据定理 7 可知 $\mu_m(G)$ 是可正则化的。

基金项目

国家自然科学基金项目(11761070, 61662079); 2020 年度新疆自治区研究生创新基金项目(XJ2020G232); 新疆师范大学“十三五”校级重点学科数学资助(编号: 17SDKD11); 新疆师范大学重点实验室招标课题: XJNUSYS082017B04, XJNUSYS082017A02。

参考文献

- [1] Mycielski, J. (1995) Sur le coloriage des graphes. *Colloquium Mathematicum*, **3**, 23-29.
- [2] Larsen, M., Propp, J. and Ullman, D. (1995) The Fractional Chromatic Number of Mycielski's Graphs. *Journal of Graph Theory*, **19**, 411-416. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190190313>
- [3] Fisher, D.C., McKenna, P. and Boyer, E.D. (1998) Hamiltonicity, Diameter, Domination Number, Packing Number, and Biclique Partitions of Mycielski's Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **84**, 93-105. [https://doi.org/10.1016/S0166-218X\(97\)00126-1](https://doi.org/10.1016/S0166-218X(97)00126-1)
- [4] Chang, G.J., Huang, L. and Zhu, X. (1999) Circular Chromatic Numbers of Mycielski's Graphs. *Discrete Mathematics*, **205**, 23-37. [https://doi.org/10.1016/S0012-365X\(99\)00033-3](https://doi.org/10.1016/S0012-365X(99)00033-3)
- [5] Došlić, T. (2005) Mycielskians and Matchings, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **25**, 261-266. <https://doi.org/10.7151/dmgt.1279>
- [6] Bar Lam, P.C., Lin, W., Gu, G.H. and Song, Z.M. (2003) Circular Chromatic Number and a Generalization of the Construction of Mycielskian. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **89**, 195-205. [https://doi.org/10.1016/S0095-8956\(03\)00070-4](https://doi.org/10.1016/S0095-8956(03)00070-4)
- [7] Lin, W., Wu, J., Bar Lam, P.C. and Gu, G.H. (2006) Several Parameters of Generalized Mycielskians. *Discrete Applied Mathematics*, **154**, 1173-1182. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2005.11.001>
- [8] Ma, L., Bian, H. and Yu, H. (2020) Hamiltonicity and Factor-Critical of Generalized Mycielskian.
- [9] Lovász, L. and Plummer, M.D. (1986) Matching Theory, Annual Discrete Mathematics, North-Holland, Amsterdam.