

# 基于热传导方程的最优速度模型

李一鸣

辽宁师范大学，辽宁 大连  
Email: 1968319810@qq.com

收稿日期：2020年11月25日；录用日期：2020年12月10日；发布日期：2020年12月17日

---

## 摘要

本文主要研究回焊炉内的热传导问题。我们将回焊炉简化为一维热传导模型进行分析，建立基于差分方程的热传导模型，从而得到焊接区域中心温度变化情况。根据约束条件通过变步长搜索方法、离散化、五重循环遍历算法方法，对目标优化模型进行求解。以温度分布模型为基础，我们建立以允许的最大传送带过炉速度为目标的单变量优化模型。在一维非稳态热传导模型基础上，我们改变初始条件和边界条件，用变步长搜索进行求解。运用MATLAB编程，我们得到满足此优化模型里的全部约束条件的最大传送带过炉速度为96 cm/min。

---

## 关键词

一维热传导方程，差分方程，变步长搜索算法，参数优化

---

# The Optimal Velocity Model Based on the Heat Conduction Equation

Yiming Li

Liaoning Normal University, Dalian Liaoning  
Email: 1968319810@qq.com

Received: Nov. 25<sup>th</sup>, 2020; accepted: Dec. 10<sup>th</sup>, 2020; published: Dec. 17<sup>th</sup>, 2020

---

## Abstract

In this paper, we mainly research on the problem of heat conduction in a reflow furnace .We simplify the reflow furnace into a one-dimensional heat conduction model to analyze and establish heat conduction model based on difference equation, then we obtain the variation of the central temperature of the welding zone. According to the constraints condition, we solve the objective optimization model using the variable step-size search method, discretization, five-loop traversal algorithm. Based on the temperature distribution model, we set up the single variable optimiza-

tion model with the maximum allowable convey or pass rate as a goal. Based on a one-dimensional unsteady heat conduction model, we change the initial and boundary conditions, use variable step size search to solve. Through Matlab program, we obtain the maximum passing velocity of the conveyor belt is 96 cm/min, which satisfies all the constraints in the optimization model.

## Keywords

**One-Dimensional Heat Conduction Equation, Difference Equation, Variable Step-Size Search Algorithm, Parameter Optimization**

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 绪论

目前，在许多电子产品的加工生产中，需要运用回焊炉来实现电子软件表面贴装技术。集成电路板等许多电子产品的生产过程，需要将安装有各种电子元件的印刷电路板放置在回焊炉中，通过各个区域的加热，将电子元件自动焊接到电路板上。在这个生产过程中，让各个回焊炉的各部分保持工艺要求的温度，对生产出来的产品质量至关重要。

本文主要研究回焊炉内的热传导问题。已知一个回焊炉，前后各有一长为二十五厘米的炉前区域和炉后区域，中间为十一个长为三十点五厘米的小温区，并且每两个小温区之间有一长为五厘米的间隙。生产车间的温度为  $25^{\circ}\text{C}$ ，小温区 1~5（组一）、小温区 6（组二）、小温区 7（组三）、小温区 8~9（组四）、小温区 10~11（组五），即将炉内分为五个区域，各区域温度可在  $\pm 10^{\circ}\text{C}$  以内进行调整并且五个区域在调整后温度会保持一致。传速带迅速过炉，需焊接的区域厚度为零点一五毫米，当电路板进入回焊炉开始计时，温度传感器会在焊接区域中心温度为  $30^{\circ}\text{C}$  时开始工作。

## 2. 预备知识

在解决本文问题前，首先通过合理假设对回焊炉模型进行简化：焊接区域为锡金属；焊接区域接触的空气的温度等于小温区的温度，即不考虑空气层；回焊炉两侧完全对称，简化示意图如图 1 所示，我

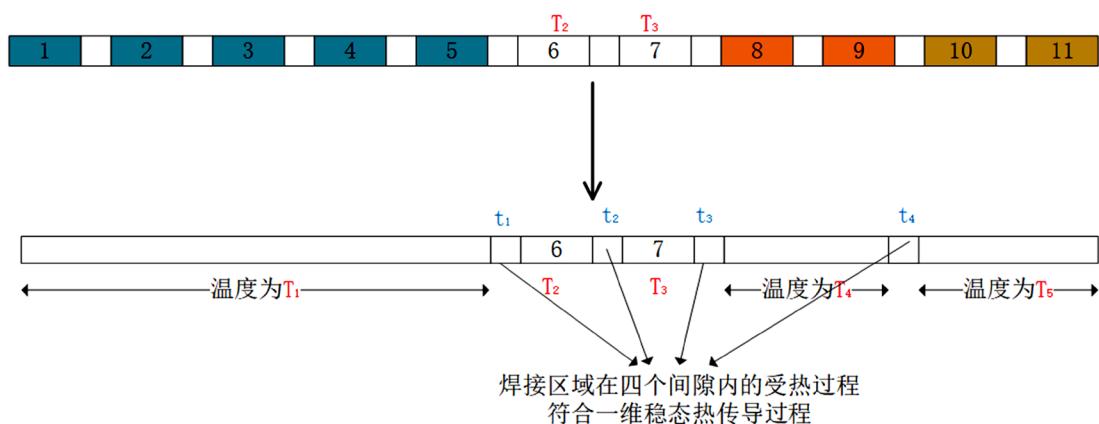


Figure 1. Simplified diagram

图 1. 简化示意图

们只需研究上一半焊接区域的传热过程。对简化后回焊炉内的传热过程进行模型分析得到：将各小温区对焊接区域加热的模型、各间隙处对于焊接区域的加热模型转化为一维非稳态热传导模型，将四个间隙内的热传递过程转化为一维稳态热传导模型。本文共选取了 10 个离散点，将微分方程差分化[1]运用 MATLAB 编程，进行求解。

给定了四组共九个小温区的温度条件，即小温区 1~5、小温区 6、小温区 7、小温区 8~9，如表 1 所示，并在制程界限的限制内，研究传送带最大的过炉速度。

**Table 1.** Process boundaries

**表 1.** 制程界限

界限名称	最低值	最高值	单位
温度上升斜率	0	3	°C/s
温度下降斜率	-3	0	°C/s
温度上升过程中在 150°C~190°C 的时间	60	120	s
温度大于 217°C 的时间	40	90	s
峰值温度	240	250	°C

本文以温度分布模型为基础，建立以表 1 制程界限为约束条件，最大传送带过炉速度为目标的单变量约束优化模型。将采用变步长搜索法来对此问题进行求解。

假设模型如下：

- 1) 假设没有热辐射和热对流，本文只考虑热传导。
- 2) 假设焊接区域是各项同性的。
- 3) 假设焊接区域与电路板不发生热交换。
- 4) 假设焊接区域为是一个有厚度的点。
- 5) 假设与焊接区域接触的空气的温度等于小温区的温度。
- 6) 假设相邻小温区交界处热传导达到稳态。
- 7) 假设焊接区域的材料为金属锡[2]。

符号说明：

符号	含义
$T_0$	生产车间的温度 25°C
$t_i$	各组间间隙的温度， $i=1$ 表示间隙一的温度，即组一和组二间间隙的温度 $i=1, 2, 3, 4$
$u(x, t)$	焊接区域温度随焊接区域上的距离和时间变化的函数
$\rho$	焊接区域的材料密度，锡的密度
$c$	焊接区域的材料比热容，锡的比热容
$\lambda$	焊接区域的材料热传导率，锡的热传导率
$h$	焊接区域在炉内加热区域及冷却区域内，受热过程的总时间
$h_i$	焊接区域通过各组的时间 $i=1, 3, 5, 7, 9$ 以及通过各组间隙内的时间 $i=2, 4, 6, 8$
$x$	表示焊接区域上一半的厚度
$l$	表示焊接区域沿着不同组之间不同间隙的距离
$\sigma$	表示各个相邻小温区之间的间隙长度

### 3. 模型建立

本文考虑以温度分布模型为基础，建立起以允许的最大传送带过炉速度为目标的单变量优化模型。在一维非稳态热传导模型基础上改变初始条件和边界条件，用变步长搜索进行求解。

设各组温度为  $Q_i (i=1,2,3,4,5)$ ，对于每一组焊接材料的加热，采用一维热传导非稳态模型[3]：

$$c\rho \frac{\partial u(x,h)}{\partial h} = \lambda \frac{\partial^2 u(x,h)}{\partial x^2} \quad (1)$$

初始条件：

$$u(x,0) = T_0 \quad (2)$$

边界条件：

$$u(0,h) = T_1, h \in [0, h_1] \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial u(x,h)}{\partial x} \right|_{x=\frac{L}{2}} = 0 \quad (4)$$

焊接区域两边对称受热，其温度分布以中心对称分布，由于中心对称点处可以视为绝热的，故其满足第三类边界条件[4]，所以本文只研究焊接区域上一半部分的传热过程。

对于每组之间的间隙焊接材料的加热，采用一维热传导稳态模型[5]：

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = 0 \quad (5)$$

边界条件：

$$l = 0, t = Q_i \quad (6)$$

$$l = \sigma, t = Q_{i+1} \quad (7)$$

对此微分方程式连续积分两次，得其通解为：

$$t = c_1 l + c_2 \quad (8)$$

上式中， $c_1$  和  $c_2$  为积分常数，由边界条件确定，最后解得小温区缝隙的温度随距离的温度分布为：

$$t_1 = \frac{Q_{i+1} - Q_i}{\sigma} l + Q_i \quad (9)$$

对于第一组和第二组间隙焊接材料的加热，采用一维热传导非稳态模型：

$$c\rho \frac{\partial u(x,h)}{\partial h} = \lambda \frac{\partial^2 u(x,h)}{\partial x^2} \quad (10)$$

初始条件：

$$u(x, h_i) = Q_i \quad (11)$$

边界条件：

$$u(0,h) = t_1, h \in [h_i, h_{i+1}] \quad (12)$$

$$\left. \frac{\partial u(x,h)}{\partial x} \right|_{x=\frac{L}{2}} = 0 \quad (13)$$

当只考虑优化  $v$  这一个变量时, 炉温曲线是关于  $v$  的一元函数, 因为  $v$  可以影响每组小温区的时间, 进而影响传热过程, 设炉温为  $y(s)$ ,  $s$  表示在制程界限范围内, 焊接区域在炉内加热区域及冷却区域内, 受热过程的总时间, 建立如下优化模型:

$$\begin{aligned} & \max v \\ \text{s.t. } & \begin{cases} 65 \leq v \leq 100 \\ 240 \leq y_{\max} \leq 250 \\ -3 \leq \frac{dy}{ds} \leq 3 \\ 60 \leq s_2 - s_1 \leq 120 \\ 40 \leq s_4 - s_3 \leq 90 \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

其中:

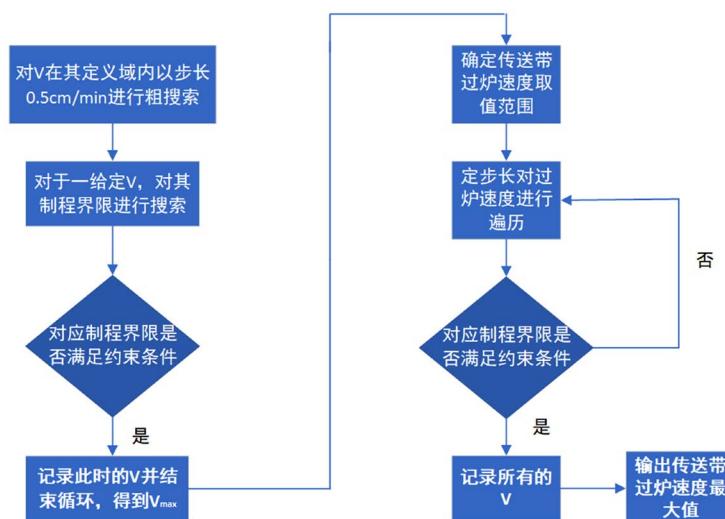
$$\begin{aligned} y(s_1) &= 150^{\circ}\text{C}, \quad y(s_2) = 190^{\circ}\text{C} \\ y(s_3) &= 217^{\circ}\text{C}, \quad y(s_4) = 217^{\circ}\text{C} \end{aligned} \quad (15)$$

由已知条件得, 炉温曲线是上凸的形状。若  $150^{\circ}\text{C}$  时有两个时刻, 则  $217^{\circ}\text{C}$  时也应有两个时刻。 $s_1$  为  $150^{\circ}\text{C}$  对应的时间,  $s_2$  为  $190^{\circ}\text{C}$  对应的时间,  $s_3, s_4$  为  $217^{\circ}\text{C}$  对应的时间其中  $s_4 > s_3$ 。

#### 4. 模型的求解

首先, 搜索在  $m$  范围内  $m \in [65, 100]$  以  $0.5 \text{ cm/min}$  为步长进行粗搜索: 遍历出  $v$  在  $m$  内的所有可能取值, 将这些数值分别带入对应的模型中进行检验。每将一给定的  $v$  值带入模型中后, 会得到相应的温度分布曲线, 易在温度分布曲线上得到最大正、负斜率、最大值  $y_{\max}$ 、 $s_1, s_2, s_3, s_4$ , 将这些得到的参数一一判定是否满足此优化模型里的全部约束条件。若不满足条件, 则舍掉该参数对应的  $v$  值。若满足条件, 则保留该参数对应的  $v$  值, 被保留的全部  $v$  即为此优化模型里的全部可行解, 全部可行解中最大的  $v$ , 记为  $v_{\max}$ , 粗搜索结束。在此基础搜索在  $n$  范围内  $n \in [v_{\max} - 0.5, v_{\max} + 0.5]$ , 以  $0.01 \text{ cm/min}$  为步长的精搜索, 作出算法流程图如图 2 所示。

利用 MATLAB 求得满足此优化模型里的全部约束条件的最大传送带过炉速度为  $96 \text{ cm/min}$ 。



**Figure 2.** Flow chart of variable step size search algorithm to solve Problem 2

**图 2.** 解决问题二的变步长搜索算法流程图

## 5. 模型推广

我们采用的搜索算法可以再进一步将搜索步长减小，提高结果的准确度。

## 参考文献

- [1] 史策. 热传导方程有限差分法的 MATLAB 实现[J]. 咸阳师范学院学报, 2009, 24(4): 27-29.
- [2] 汪健, 徐晨晨, 魏子陵, 等. 回流焊炉巧用若干例[C]//四川省电子学会. 2019 中国高端 SMT 学术会议论文集. 2019.
- [3] 盛宏玉, 李和平, 叶建乔, 张长会. 层状介质热传导瞬态分析的一种新半数值解法[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2010, 33(5): 709-712.
- [4] 方静, 蒋斌. AZ31 镁合金铸锭加热过程中的温度场模拟[C]//中国材料研究学会, 中国复合材料学会, 中国电子材料行业. 高技术新材料产业发展研讨会暨《材料导报》编委会年会论文集材料导报编辑部会议论文集. 2007.
- [5] 杨世铭, 陶文铨. 传热学[Heat Transfer] [M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2006: 116-117.