Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(12), 2301-2307
Published Online December 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.912269

Hans汉斯

一类带p-Laplacian算子的分数阶微分方程边值问题正解的存在性

段佳艳*，王文霞，郭晓珍

太原师范学院数学系，山西 晋中
Email: *1263882814@qq.com, wwxgg@126.com, 1933717964@qq.com

收稿日期：2020年11月27日；录用日期：2020年12月22日；发布日期：2020年12月30日

摘 要

本文研究了一类带有p-Laplacian算子的分数阶微分方程边值问题的正解的存在性，利用Leray-Schauder非线性抉择，得出边值问题至少存在一个正解的充分条件，并给出了一个具体的例子。

关键词

p-Laplacian算子，Leray-Schauder非线性抉择，正解

Existence of Positive Solutions for Boundary Value Problem of Fractional Differential Equations with p-Laplacian Operator

Jiayan Duan*, Wenxia Wang, Xiaozhen Guo

Department of Mathematics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi
Email: *1263882814@qq.com, wwxgg@126.com, 1933717964@qq.com

Received: Nov. 27th, 2020; accepted: Dec. 22nd, 2020; published: Dec. 30th, 2020

Abstract

This paper is concerned with the existence of positive solution for a class of boundary value problems of fractional differential equations with p-Laplacian operator. By using Leray-Schauder nonlinear choice, some sufficient conditions for the existence of at least one positive solution are obtained. In addition, an example is given to illustrate theoretical results.

*通讯作者。

文章引用: 段佳艳, 王文霞, 郭晓珍. 一类带 p-Laplacian 算子的分数阶微分方程边值问题正解的存在性[J]. 应用数学进展, 2020, 9(12): 2301-2307. DOI: 10.12677/aam.2020.912269

Keywords

p-Laplacian Operator, Leray-Schauder Nonlinear Alternative Theorem, Positive Solution

1. 引言

分数阶微积分是在整数阶微积分的理论基础上发展而来，近年来分数阶微分方程在物理学、工程学、机械、医学、生物学等许多领域得到了广泛应用[1] [2] [3] [4]。为了解决越来越多复杂的现象和问题，学者和专家开始研究带 p-Laplacian 算子的分数阶微分方程。文[5]研究如下带 p-Laplacian 算子的分数阶微分方程

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\beta}\left(\varphi_p\left(D_{0^+}^{\alpha}u\right)\right)(t)+f\left(t,u(t)\right)=0,0<t<1, \\ u(0)=0,u(1)+\sigma D_{0^+}^{\gamma}u(1)=0,D_{0^+}^{\alpha}u(0)=0, \end{cases}$$

这里 $D_{0^+}^{\alpha},D_{0^+}^{\beta}$ 和 $D_{0^+}^{\gamma}$ 是标准的 Riemann-Liouville 型分数阶导数，$1<\alpha\le 2$，$0<\beta\le 1$，$0<\gamma\le 1$，$\alpha-\gamma-1\ge 0$，常数 σ 是一个正数，$\varphi_p(s)=|s|^{p-2}s, p>1$。利用锥上的不动点定理，获得了正解的一些存在性和多重性结果。

文[6]研究如下带有 p-Laplacian 算子的 Riemann-Liouville 型分数阶微分方程边值问题

$$\begin{cases} D^{\alpha}\left(\varphi_p\left(D^{\beta}u(t)\right)\right)+f\left(t,u(t)\right)=0,0<t<1, \\ u(0)=0,u(1)=\lambda D^{\gamma}u(\xi),D^{\beta}u(0)=0, \end{cases}$$

应用凸锥上的不动点理获得了该问题正解的存在性结果。这里 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$，$0<\alpha<1$，$1<\beta\le 2$，$\gamma=\dfrac{\beta-1}{2}$，$0<\xi\le\dfrac{1}{2}$，$\lambda\in[0,+\infty)$，$\lambda\Gamma(\beta)\xi^{(\beta-1)/2}<\Gamma\left(\dfrac{\beta+1}{2}\right)$，$\varphi_p(s)=|s|^{p-2}s, p>1$。

基于上述文献中的研究，本文主要利用 Leray-Schauder 非线性抉择讨论如下带有 p-Laplacian 算子的 Riemann-Liouville 型分数阶微分方程边值问题

$$\begin{cases} \left(\phi_p\left(D_{0^+}^{\alpha}u(t)\right)\right)'+f\left(t,u(t),D_{0^+}^{\alpha}u(t)\right)=0,t\in[0,1], \\ u(0)=u(1)=D_{0^+}^{\alpha}u(0)=0, \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性，其中 $1<\alpha\le 2$，$\phi_p(s)=|s|^{p-2}s$。$q>1$，$\phi_p^{-1}=\phi_q$，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$。

2. 预备知识

定义 1 [7]函数 $y:(0,+\infty)\to R$ 的 $\alpha>0$ 阶 Riemann-Liouville 分数阶积分为

$$I_{0^+}^{\alpha}y(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s,$$

等式的右端在 $(0,+\infty)$ 有定义，其中 $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数。

定义 2 [7]连续函数 $y:(0,+\infty)\to R$ 的 $\alpha>0$ 阶 Riemann-Liouville 分数阶导数为

$$D_{0^+}^{\alpha}y(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n\int_0^t\frac{y(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}s,$$

等式的右端在 $(0,+\infty)$ 有定义，其中 $n=\min\{m\in Z:m\ge\alpha\}$，$\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数。

引理 1 [7] $\alpha>0$，$u\in C(0,1)\cap L(0,1)$，$D_{0^+}^{\alpha}u\in C(0,1)\cap L(0,1)$，则分数阶微分方程 $D_{0^+}^{\alpha}u(t)=0$ 有唯一解

$$u(t)=c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+c_nt^{\alpha-n},$$

其中 $n=\min\{m\in Z:m\ge\alpha\}$，$c_i\in R,i=1,2,\cdots,n$。

引理 2 [7] $\alpha>0$，$u\in C(0,1)\cap L(0,1)$，$D_{0^+}^{\alpha}u\in C(0,1)\cap L(0,1)$，则

$$I_{0^+}^{\alpha}D_{0^+}^{\alpha}u(t)=u(t)+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+c_nt^{\alpha-n},$$

其中 $n=\min\{m\in Z:m\ge\alpha\}$，$c_i\in R,i=1,2,\cdots,n$。

引理 3 若 $y(t)\in C[0,1]$，且 $1<\alpha\le2$，则分数阶微分方程

$$\begin{cases}\left(\phi_p\left(D_{0^+}^{\alpha}u(t)\right)\right)'+y(t)=0,0<t<1,\\ u(0)=u(1)=D_{0^+}^{\alpha}u(0)=0,\end{cases}$$

有唯一解

$$u(t)=\int_0^1G(t,s)\phi_q\left(\int_0^s y(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s,$$

其中

$$G(t,s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases}t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1},0\le s\le t\le1,\\ t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1},0\le t\le s\le1.\end{cases}$$

证明 由 $\left(\phi_p\left(D_{0^+}^{\alpha}u(t)\right)\right)'+y(t)=0$ 可得

$$\phi_p\left(D_{0^+}^{\alpha}u(t)\right)=-\int_0^t y(s)\mathrm{d}s+c_0,$$

于是

$$D_{0^+}^{\alpha}u(t)=-\phi_q\left(\int_0^t y(s)\mathrm{d}s+c_0\right).$$

根据引理 2 可得

$$u(t)=-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\int_0^s y(\tau)\mathrm{d}\tau+c_0\right)\mathrm{d}s+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}.$$

由 $D_{0^+}^{\alpha}u(0)=0$ 得 $c_0=0$，由 $u(0)=0$，得 $c_2=0$，由 $u(1)=0$，得

$$c_1=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\int_0^s y(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s.$$

所以

$$\begin{aligned}u(t)&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\int_0^s y(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\\&\quad-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\int_0^s y(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\left[t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}\right]\phi_q\left(\int_0^s y(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\\&\quad+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^1 t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}\phi_q\left(\int_0^s y(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\\&=\int_0^1 G(t,s)\phi_q\left(\int_0^s y(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

证毕。

注 由引理 3 的证明容易看到 $D_{0^+}^{\alpha}u(t)=-\phi_q\left(\int_0^t y(s)\mathrm{d}s\right),t\in[0,1]$。

引理 4 [8] $G(t,s)$ 有下面的性质

1) $G(t,s)\geq 0$，对 $\forall s,t\in(0,1)$；

2)存在正函数 $r\in C[0,1]$ 使得

$$\min_{1/4\leq t\leq 3/4}G(t,s)\geq r(s)\max_{t\in[0,1]}G(t,s)=r(s)G(s,s),0<s<1;$$

3) $\max\limits_{t\in[0,1]}\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s=\dfrac{1}{2^{2(\alpha-1)}\Gamma(\alpha)}$。

引理 5 [8] (Leray-Schauder 非线性抉择)假设 Ω 是线性赋范空间 X 中包含原点的开集，$F:\bar{\Omega}\to X$ 全连续，并且满足边界条件，即当 $x\in\partial\Omega$，$0<\lambda<1$ 时 $F\neq\lambda x$，则 F 在 $\bar{\Omega}$ 上至少有一个不动点。

3. 主要结果

下节将用到如下假设

(H1) $f:[0,1]\times[0,+\infty)\times R\to[0,+\infty)$ 为连续函数，假设存在非负连续函数 $j(t),l(t),w(t)$ 使得

$$|f(t,u,v)|\leq j(t)\phi_p(|u|)+l(t)\phi_p(|v|)+w(t),t\in[0,1].$$

设 $X=\left\{u(t)\in C[0,1]\middle|D_{0^+}^{\alpha}u(t)\in C[0,1]\right\}$，定义范数 $\|u\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|+\max\limits_{t\in[0,1]}\left|D_{0^+}^{\alpha}u(t)\right|$，容易证明 X 是 Banach 空间。定义算子

$$Tu(t)=\int_0^1 G(t,s)\phi_q\left(\int_0^s f\left(\tau,u(\tau),D_{0^+}^{\alpha}u(\tau)\right)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s,t\in[0,1].$$

定理 1 假设(H1)成立。若(H1)中的函数 j,l,w 满足存在常数 $\rho>0$ 使得

$$\frac{2^{2(\alpha-1)}\Gamma(\alpha)\rho}{\left[\rho^{p-1}\left(\int_0^1 j(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^1 l(\tau)\mathrm{d}\tau\right)+\int_0^1 w(\tau)\mathrm{d}\tau\right]^{q-1}}\leq 1,\tag{2.1}$$

则边值问题(1)存在解 $u=u(t)$ 且满足 $0<\|u\|<\rho$。

证明 首先证明 $T:X\to X$ 为全连续算子。由函数 f 的连续性容易证明 T 是连续算子。

以下证明 T 为紧的。设 Ω 是 X 中的有界子集，于是存在正数 $M>0$ 使得 $u\in\Omega$，$\|u\|\le M$。从而对于任意的 $u\in\Omega$ 有

$$\begin{aligned}|Tu(t)|&=\left|\int_0^1 G(t,s)\phi_q\left(\int_0^s f\left(\tau,u(\tau),D_{0^+}^{\alpha}u(\tau)\right)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\right|\\&\le\int_0^1 G(t,s)\phi_q\left(\left|\int_0^s f\left(\tau,u(\tau),D_{0^+}^{\alpha}u(\tau)\right)\mathrm{d}\tau\right|\right)\mathrm{d}s\\&\le\int_0^1 G(t,s)\phi_q\left(\int_0^s\left|f\left(\tau,u(\tau),D_{0^+}^{\alpha}u(\tau)\right)\right|\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\\&\le\int_0^1 G(t,s)\phi_q\left(\int_0^1\left(j(\tau)\phi_p\left(|u(\tau)|\right)+l(\tau)\phi_p\left(\left|D_{0^+}^{\alpha}u(\tau)\right|\right)+w(\tau)\right)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\\&\le\int_0^1 G(t,s)\phi_q\left(\int_0^1\left(j(\tau)\phi_p\left(\|u\|\right)+l(\tau)\phi_p\left(\|u\|\right)+w(\tau)\right)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\\&\le\frac{1}{2^{2(\alpha-1)}\Gamma(\alpha)}\left[M^{p-1}\left(\int_0^1 j(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^1 l(\tau)\mathrm{d}\tau\right)+\int_0^1 w(\tau)\mathrm{d}\tau\right]^{q-1},t\in[0,1],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left|D_{0^+}^{\alpha}Tu(t)\right|&=\left|-\phi_q\left(\int_0^t f\left(s,u(s),D_{0^+}^{\alpha}u(s)\right)\mathrm{d}s\right)\right|\\&\le\phi_q\left(\int_0^t\left|f\left(s,u(s),D_{0^+}^{\alpha}u(s)\right)\right|\mathrm{d}s\right)\\&\le\phi_q\left(\int_0^1\left(j(s)\phi_p\left(|u(s)|\right)+l(s)\phi_p\left(\left|D_{0^+}^{\alpha}u(s)\right|\right)+w(s)\right)\mathrm{d}s\right)\\&\le\left[\phi_q\left(\phi_p\left(\|u\|\right)\int_0^1 j(s)\mathrm{d}s+\phi_p\left(\|u\|\right)\int_0^1 l(s)\mathrm{d}s+\int_0^1 w(s)\mathrm{d}s\right)\right]\\&\le\left[M^{p-1}\left(\int_0^1 j(s)\mathrm{d}s+\int_0^1 l(s)\mathrm{d}s\right)+\int_0^1 w(s)\mathrm{d}s\right]^{q-1},t\in[0,1].\end{aligned}$$

因此 $T(\Omega)$ 和 $\left\{D_{0^+}^{\alpha}Tu\,|\,u\in\Omega\right\}$ 皆为一致有界的子集合。

再证 $T(\Omega)$ 和 $\left\{D_{0^+}^{\alpha}Tu\,|\,u\in\Omega\right\}$ 皆是等度连续的。对任意的 $0\le t_1<t_2\le1$，$u\in\Omega$ 有

$$\begin{aligned}|Tu(t_2)-Tu(t_1)|&=\left|\int_0^1 G(t_2,s)\phi_q\left(\int_0^s f\left(\tau,u(\tau),D_{0^+}^{\alpha}u(\tau)\right)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\right.\\&\quad\left.-\int_0^1 G(t_1,s)\phi_q\left(\int_0^s f\left(\tau,u(\tau),D_{0^+}^{\alpha}u(\tau)\right)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\right|\\&=\left|\int_0^1\left[G(t_2,s)-G(t_1,s)\right]\phi_q\left(\int_0^s f\left(\tau,u(\tau),D_{0^+}^{\alpha}u(\tau)\right)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\right|\\&\le\left[M^{p-1}\left(\int_0^1 j(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^1 l(\tau)\mathrm{d}\tau\right)+\int_0^1 w(\tau)\mathrm{d}\tau\right]^{q-1}\int_0^1\left|G(t_2,s)-G(t_1,s)\right|\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

注意到 $G(t,s)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上的一致连续性可知，$T(\Omega)$ 是等度连续的。此外

$$\begin{aligned}&\left|D_{0^+}^{\alpha}Tu(t_2)-D_{0^+}^{\alpha}Tu(t_1)\right|\\&=\left|-\left[\phi_q\left(\int_0^{t_2} f\left(s,u(s),D_{0^+}^{\alpha}u(s)\right)\mathrm{d}s\right)-\phi_q\left(\int_0^{t_1} f\left(s,u(s),D_{0^+}^{\alpha}u(s)\right)\mathrm{d}s\right)\right]\right|\\&=\left|\left(\int_0^{t_2} f\left(s,u(s),D_{0^+}^{\alpha}u(s)\right)\mathrm{d}s\right)^{q-1}-\left(\int_0^{t_1} f\left(s,u(s),D_{0^+}^{\alpha}u(s)\right)\mathrm{d}s\right)^{q-1}\right|,\end{aligned}$$

当 $0<q-1<1$ 时，根据不等式 $b^m+c^m\ge(b+c)^m,b\ge0,c\ge0,0<m<1$ 可得

$$
\begin{aligned}
0 &\le \left(\int_0^{t_2} f\left(s,u(s),D_{0^+}^{\alpha}u(s)\right)\mathrm{d}s\right)^{q-1} - \left(\int_0^{t_1} f\left(s,u(s),D_{0^+}^{\alpha}u(s)\right)\mathrm{d}s\right)^{q-1} \\
&\le \left(\int_{t_1}^{t_2} f\left(s,u(s),D_{0^+}^{\alpha}u(s)\right)\mathrm{d}s\right)^{q-1} \\
&\le \left(\int_{t_1}^{t_2}\left(j(s)\phi_p\left(\left|u(s)\right|\right)+l(s)\phi_p\left(\left|D_{0^+}^{\alpha}u(s)\right|\right)+w(s)\right)\mathrm{d}s\right)^{q-1} \\
&\le \left(\phi_p\left(\|u\|\right)\int_{t_1}^{t_2} j(s)\mathrm{d}s+\phi_p\left(\|u\|\right)\int_{t_1}^{t_2} l(s)\mathrm{d}s+\int_{t_1}^{t_2} w(s)\mathrm{d}s\right)^{q-1} \\
&\le \left(M^{p-1}\left(\int_{t_1}^{t_2} j(s)\mathrm{d}s+\int_{t_1}^{t_2} l(s)\mathrm{d}s\right)+\int_{t_1}^{t_2} w(s)\mathrm{d}s\right)^{q-1},
\end{aligned}
$$

再根据积分第一中值定理，因 $j(s),l(s),w(s)$ 在 $[t_1,t_2]$ 上连续，则至少存在三点 $\mu,\eta,\kappa\in[t_1,t_2]$，使得

$$
\int_{t_1}^{t_2} j(s)\mathrm{d}s = j(\mu)(t_2-t_1),\int_{t_1}^{t_2} l(s)\mathrm{d}s = l(\eta)(t_2-t_1),\int_{t_1}^{t_2} w(s)\mathrm{d}s = w(\kappa)(t_2-t_1),
$$

于是

$$
\left|D_{0^+}^{\alpha}Tu(t_2)-D_{0^+}^{\alpha}Tu(t_1)\right| \le \left[M^{p-1}\left(j(\mu)+l(\eta)\right)+w(\kappa)\right]^{q-1}(t_2-t_1)^{q-1},
$$

当 $q-1\ge 1$ 时，由拉格朗日中值定理有

$$
\begin{aligned}
0 &\le \left(\int_0^{t_2} f\left(s,u(s),D_{0^+}^{\alpha}u(s)\right)\mathrm{d}s\right)^{q-1} - \left(\int_0^{t_1} f\left(s,u(s),D_{0^+}^{\alpha}u(s)\right)\mathrm{d}s\right)^{q-1} \\
&= (q-1)\left(\int_0^{\xi} f\left(s,u(s),D_{0^+}^{\alpha}u(s)\right)\mathrm{d}s\right)^{q-2} f\left(\xi,u(\xi),D_{0^+}^{\alpha}u(\xi)\right)(t_2-t_1) \\
&\le (q-1)\left[M^{p-1}\left(\int_0^{\xi} j(s)\mathrm{d}s+\int_0^{\xi} l(s)\mathrm{d}s\right)+\int_0^{\xi} w(s)\mathrm{d}s\right]^{q-2}\left(M^{p-1}\left(j(\xi)+l(\xi)\right)+w(\xi)\right)(t_2-t_1),
\end{aligned}
$$

其中 ξ 是 (t_1,t_2) 之间某个确定的值。故

$$
\begin{aligned}
&\left|D_{0^+}^{\alpha}Tu(t_2)-D_{0^+}^{\alpha}Tu(t_1)\right| \\
&\le (q-1)\left[M^{p-1}\left(\int_0^{\xi} j(s)\mathrm{d}s+\int_0^{\xi} l(s)\mathrm{d}s\right)+\int_0^{\xi} w(s)\mathrm{d}s\right]^{q-2}\left(M^{p-1}\left(j(\xi)+l(\xi)\right)+w(\xi)\right)(t_2-t_1).
\end{aligned}
$$

由此可得 $\left\{D_{0^+}^{\alpha}Tu \middle| u\in\Omega\right\}$ 是等度连续的。

既然集合 $T(\Omega)$ 和 $\left\{D_{0^+}^{\alpha}Tu \middle| u\in\Omega\right\}$ 都是一致有界且等度连续的，根据 Arzela-Ascoli 定理可知 $T(\Omega)$ 和 $\left\{D_{0^+}^{\alpha}Tu \middle| u\in\Omega\right\}$ 皆为 $C[0,1]$ 中的相对紧集，进而可知 T 是全连续算子。

令 $U=\left\{u\in X \middle| \|u\|\le\rho\right\}$，有 $U\subset X$，由上述证明可知 $T:\bar{U}\to X$ 是全连续的。我们断言当 $u\in\partial U$，$\lambda\in(0,1)$ 时 $u\neq\lambda Tu$。如若不然存在 $u_0\in\partial U$，$\lambda_0\in(0,1)$ 使 $u_0=\lambda_0 Tu_0$。于是有

$$
\rho=\|u_0\|=\|\lambda_0 Tu_0\|\le\frac{1}{2^{2(\alpha-1)}\Gamma(\alpha)}\left[\rho^{p-1}\left(\int_0^1 j(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^1 l(\tau)\mathrm{d}\tau\right)+\int_0^1 w(\tau)\mathrm{d}\tau\right]^{q-1},
$$

进而有

$$
\frac{2^{2(\alpha-1)}\Gamma(\alpha)\rho}{\left[\rho^{p-1}\left(\int_0^1 j(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^1 l(\tau)\mathrm{d}\tau\right)+\int_0^1 w(\tau)\mathrm{d}\tau\right]^{q-1}}\le 1,
$$

此与(2.1)式矛盾。由引理 5 可知边值问题(1)存在解 $u(t)$ 使得 $0\le\|u\|\le\rho$。证毕。

4. 举例

考虑下列具有 p-laplacian 算子分数阶微分方程边值问题

$$\begin{cases}\left(\phi_3\left(D_{0^+}^{3/2}u(t)\right)\right)'+\left(\dfrac{\sqrt{t}}{2}+\dfrac{u^2(t)}{1+t^2}+\mathrm{e}^{-t}\left|D_{0^+}^{3/2}u(t)\right|^2\right)=0, 0\le t\le 1,\\ u(0)=u(1)=D_{0^+}^{3/2}u(0)=0,\end{cases}$$

其中 $p=3,\alpha=3/2$，

$$f(t,u,v)=\left(\frac{\sqrt{t}}{2}+\frac{u^2}{1+t^2}+\mathrm{e}^{-t}|v|^2\right), 0\le t\le 1,$$

选取 $j(t)=\mathrm{e}^t, l(t)=\mathrm{e}^{-t}, w(t)=\sqrt{t}$，有

$$|f(t,u,v)|\le \mathrm{e}^t\phi_3(|u|)+\mathrm{e}^{-t}\phi_3(|v|)+\sqrt{t}, 0\le t\le 1,$$

令 $\rho=1$，有

$$\frac{2^{2(\alpha-1)}\Gamma(\alpha)\rho}{\left[\rho^{p-1}\left(\int_0^1 j(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_0^1 l(\tau)\mathrm{d}\tau\right)+\int_0^1 w(\tau)\mathrm{d}\tau\right]^{q-1}}>1,$$

定理 1 的条件皆满足，所以该边值问题至少存在一个解。

基金项目

国家自然科学基金(11361047)。

参考文献

[1] Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. and Trujillo, J.J. (2006) Theory and Applications of Differential Equations. Elsevier Science Ltd., Amsterdam.

[2] Chai, G.Q. (2012) Positive Solutions for Boundary Value Problem of Fractional Differential Equation with p-Laplacian Operator. *Boundary Value Problems*, **18**, 1-20. https://doi.org/10.1186/s13661-016-0548-0

[3] Lu, H.L., Han, Z.L., Sun, S.R. and Liu, J. (2013) Existence on Positive Solutions for Boundary Value Problems of Nonlinear Fractional Differential Equations with p-Laplacian. *Advances in Difference Equations*, **30**, 1-16.

[4] Liang, S.H. and Zhang, J.H. (2010) Existence of Multiple Positive for M-Point Fractional Boundary Value Problems on an Infinite Interval. *Mathematical and Computer Modelling*, **54**, 1334-1446. https://doi.org/10.1186/1687-1847-2013-30

[5] Wang, W.X. and Guo, X.T. (2016) Eigenvalue Problem for Fractional Differential Equations with Nonlinear Integral and Disturbance Parameter in Boundary Conditions. *Boundary Value Problems*, **42**, 1-23. https://doi.org/10.1186/1687-2770-2012-18

[6] Bai, Z.B. and Lu, H.S. (2005) Positive Solutions for Boundary Value Problem of Nonlinear Fractional Differential Equation. *Mathmatical Analysis and Applications*, **311**, 495-505. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.02.052

[7] 白占兵. 分数阶微分方程边值问题理论及其应用[M]. 北京: 中国科学技术出版社, 2013.

[8] 李小平, 李辉来. 带 p-Laplace 算子分数阶微分方程边值问题正解的存在性[J]. 吉林大学学报(理学版), 2017, 55(3): 481-489.