Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(1), 48-51
Published Online January 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.101005

矩阵算子的广义正交问题的研究

边春阳，计东海

哈尔滨理工大学理学院，黑龙江 哈尔滨
Email: 1057600569@qq.com

收稿日期：2020年12月14日；录用日期：2021年1月3日；发布日期：2021年1月15日

摘 要

本文考虑了在算子空间中，取T_1，T_2都为$n \times n$矩阵，给出了T_1和T_2满足Birkhoff正交、等腰正交与Roberts正交的等价条件。

关键词

算子空间，Birkhoff正交，等腰正交，Roberts正交

Study on Generalized Orthogonal Problems of Matrix Operators

Chunyang Bian, Donghai Ji

Faculty of Science, Harbin Institute of Technology, Harbin Heilongjiang
Email: 1057600569@qq.com

Received: Dec. 14th, 2020; accepted: Jan. 3rd, 2021; published: Jan. 15th, 2021

Abstract

This paper considers that in the operator space, taking T_1, T_2 and as $n \times n$ matrices, the equivalent conditions of T_1 and T_2 satisfying the orthogonal Birkhoff, isospheric orthogonal and Roberts are given.

Keywords

Operator Space, Birkhoff Orthogonal, Isospheric Orthogonal, Roberts Orthogonal

文章引用: 边春阳, 计东海. 矩阵算子的广义正交问题的研究[J]. 应用数学进展, 2021, 10(1): 48-51.
DOI: 10.12677/aam.2021.101005

1. 引言

本文将借助于赋范线性空间空间下广义正交的相关理论，探究算子空间下的广义正交的若干性质。特别是矩阵作为算子空间中的元素，取T_1，T_2都为$n\times n$矩阵，给出了T_1和T_2满足Birkhoff正交、等腰正交[1]与Roberts正交的等价条件。

2. 算子空间中 $n\times n$ 矩阵广义正交的等价条件

定义1 [2]设X是一个赋范线性空间，$x,y\in X$，如果对于任意$\alpha\in R$都有

$$\|x+\alpha y\|\geq\|x\|$$

则称x Birkhoff正交于y。

定义2 [3]设X是一个赋范线性空间，$x,y\in X$，如果

$$\|x+y\|=\|x-y\|$$

则称x等腰正交于y。

定义3 [4]设X是一个赋范线性空间，$x,y\in X$，如果对于任意$\alpha\in R$都有

$$\|x+\alpha y\|=\|x-\alpha y\|$$

则称x Roberts正交于y。

定义4 [3] 295设X是一个赋范线性空间，$x,y\in X$，如果

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$$

则称x勾股正交于y。

定义5 [5]任意给出矩阵$A\in C^{n\times n}$，定义矩阵A的一个实函数，记作$\|A\|$，若此函数满足：

1) 正定性：$\|A\|\geq 0$，当$A=0$时等号成立。
2) 齐次性：任意给出$k\in C, A\in C^{n\times n}$，都有$\|kA\|=|k|\|A\|$。
3) 三角不等式：任意给出$A,B\in C^{n\times n}$，都有$\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$。
4) 任意给出$A,B\in C^{n\times n}$，都有$\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$。

定理1 设A和B是两个lp空间，$T_1,T_2\in\mathcal{B}(A,B)$，$T_1\perp_B T_2$当且仅当存在一个单位向量$x\in A$有$\|T_1x\|=\|T_1\|$且$\langle T_1x,T_2x\rangle=0$。

证明：首先证明充分性。假设x是空间A上的一个单位向量，对于任意的$\lambda\in R$有

$$\begin{aligned}\|T_1+\lambda T_2\|^2&\geq\|(T_1+\lambda T_2)x\|^2=\|T_1x\|^2+\lambda^2\|T_2x\|^2+2\lambda\operatorname{Re}\langle T_1x,T_2x\rangle\\&=\|T_1x\|^2+\lambda^2\|T_2x\|^2\geq\|T_1x\|^2=\|T_1\|^2\end{aligned}$$

所以$\|T_1+\lambda T_2\|\geq\|T_1\|$，充分性得证。

下面证明必要性。让$T_1\perp_B T_2$，即为$\|T_1+\lambda T_2\|\geq\|T_1\|$。对于空间$A$上的一个单位向量$x$有$\|x\|=1$。因为$\|T_1x\|\geq\|T_1\|$，又因为$\|T_1x\|\leq\|T_1\|\|x\|=\|T_1\|$。所以有$\|T_1x\|=\|T_1\|$。

如果T_1是一个半正定矩阵并且$T_2\in\mathcal{B}(A,B)$，使得$\|T_1+\lambda T_2\|\geq\|T_1\|$成立。则存在一个单位向量$x$使得

$T_1x=\|T_1\|x$ 和 $\mathrm{Re}\langle T_1x,T_2x\rangle=0$。

集合 $\{\langle u,T_2u\rangle:\|u\|=1,T_1u=\|T_1\|u\}$ 是集合 $\{u:\|u\|=1,T_1u=\|T_1\|u\}$ 在二次形式 $u\to\langle u,T_2u\rangle$ 下的像，我们称之 T_2 的数值范围对应于最大特征值为 $\|T_1\|$ 的 T_1 的特征空间的限制，根据 Hausdorff-toeplitz [6]定理，这是一个凸集，因此集合 $\{\mathrm{Re}\langle u,T_2u\rangle:\|u\|=1,T_1u=\|T_1\|u\}$ 是一个凸集。我们得到存在一个单位向量 x 有

$$T_1x=\|T_1\|x \text{ 和 } \mathrm{Re}\langle T_1x,T_2x\rangle=0$$

意味着 $\mathrm{Re}\langle T_1x,T_2x\rangle=0$ 所以必要性得证。

定理 2 设 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{K}$ 是两个有限维 Hilbert 空间，让 $T_1,T_2\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$。$T_1\perp_I T_2$ 当且仅当存在一个单位向量 $x\in\mathcal{H}$ 有 $\|T_1x\|=\|T_1\|$，$\|T_2x\|=\|T_2\|$ 且 $\langle T_1x,T_2x\rangle=0$。

证明：首先我们证明充分性，假设 x 是空间 $\mathcal{H}$ 上的一个单位向量，有

$$\begin{aligned}\|T_1+T_2\|^2&=\|(T_1+T_2)x\|^2=\|T_1x\|^2+\|T_2x\|^2+2\,\mathrm{Re}\langle T_1x,T_2x\rangle\\&=\|T_1x\|^2+\|T_2x\|^2=\|T_1\|^2+\|T_2\|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|T_1-T_2\|^2&=\|(T_1-T_2)x\|^2=\|T_1x\|^2+\|T_2x\|^2-2\,\mathrm{Re}\langle T_1x,T_2x\rangle\\&=\|T_1x\|^2+\|T_2x\|^2=\|T_1\|^2+\|T_2\|^2\end{aligned}$$

所以 $\|T_1+T_2\|^2=\|T_1-T_2\|^2$ 即为 $\|T_1+T_2\|=\|T_1-T_2\|$ 因此 $T_1\perp_I T_2$ 充分性得证。

反过来我们证必要性，让 $T_1\perp_I T_2$ 即为 $\|T_1+T_2\|=\|T_1-T_2\|$ 所以有 $\|(T_1+T_2)x\|^2=\|(T_1-T_2)x\|^2$ 整理得

$$\left(\|(T_1+T_2)x\|^2-\|(T_1-T_2)x\|^2\right)=4\,\mathrm{Re}\langle T_1x,T_2x\rangle=0$$

因此 $\langle T_1x,T_2x\rangle=0$。

对于空间 $\mathcal{H}$ 上的一个单位向量是 x 有 $\|x\|=1$ 因此有 $\|T_1x\|\le\|T_1\|\|x\|=\|T_1\|$ 又因为 $\|T_1x\|\ge\|T_1\|$ 所以有 $\|T_1x\|=\|T_1\|$。同理可得 $\|T_2x\|=\|T_2\|$。因此必要性得证。

定理 3 设 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{K}$ 是两个有限维 Hilbert 空间，让 $T_1,T_2\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$。$T_1\perp_R T_2$ 当且仅当存在一个单位向量 $x\in\mathcal{H}$ 有 $\|T_1x\|=\|T_1\|$，$\|T_2x\|=\|T_2\|$ 且 $\langle T_1x,T_2x\rangle=0$。

证明：首先我们证明充分性，假设 x 是空间 $\mathcal{H}$ 上的一个单位向量，对于任意的 $\lambda\in C$ 有

$$\begin{aligned}\|T_1+\lambda T_2\|^2&=\|(T_1+\lambda T_2)x\|^2=\|T_1x\|^2+|\lambda|^2\|T_2x\|^2+2\,\mathrm{Re}\,\tilde{\lambda}\langle T_1x,T_2x\rangle\\&=\|T_1x\|^2+|\lambda|^2\|T_2x\|^2=\|T_1\|^2+|\lambda|^2\|T_2\|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|T_1-\lambda T_2\|^2&=\|(T_1-\lambda T_2)x\|^2=\|T_1x\|^2+|\lambda|^2\|T_2x\|^2-2\,\mathrm{Re}\,\tilde{\lambda}\langle T_1x,T_2x\rangle\\&=\|T_1x\|^2+|\lambda|^2\|T_2x\|^2=\|T_1\|^2+|\lambda|^2\|T_2\|^2\end{aligned}$$

所以 $\|T_1+\lambda T_2\|^2=\|T_1-\lambda T_2\|^2$ 即为 $\|T_1+\lambda T_2\|=\|T_1-\lambda T_2\|$ 因此 $T_1\perp_R T_2$ 充分性得证。

反过来我们证必要性，让 $T_1\perp_R T_2$ 即为 $\|T_1+\lambda T_2\|=\|T_1-\lambda T_2\|$ 所以有 $\|(T_1+\lambda T_2)x\|^2=\|(T_1-\lambda T_2)x\|^2$ 整理得

$$\left(\|(T_1+\lambda T_2)x\|^2-\|(T_1-\lambda T_2)x\|^2\right)=4\,\mathrm{Re}\,\tilde{\lambda}\langle T_1x,T_2x\rangle=0$$

因此 $\langle T_1x,T_2x\rangle=0$。

对于空间 $\mathcal{H}$ 上的一个单位向量是 x 有 $\|x\|=1$ 因此有 $\|T_1x\|\le\|T_1\|\|x\|=\|T_1\|$ 又因为 $\|T_1x\|\ge\|T_1\|$ 所以有 $\|T_1x\|=\|T_1\|$。同理可得 $\|T_2x\|=\|T_2\|$。因此必要性得证。

定理 4 设 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{K}$ 是两个有限维 Hilbert 空间，让 $T_1,T_2\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$。$T_1$ 勾股正交 T_2 当且仅当存在一个

单位向量 $x\in\mathcal{H}$ 有 $\|T_1x\|=\|T_1\|$，$\|T_2x\|=\|T_2\|$ 且 $\mathrm{Re}\langle T_1x,T_2x\rangle=0$。

证明：首先我们证明充分性，假设 x 是空间 $\mathcal{H}$ 上的一个单位向量，有

$$\begin{aligned}\|T_1+T_2\|^2&=\|(T_1+T_2)x\|^2=\|T_1x\|^2+\|T_2x\|^2+2\,\mathrm{Re}\langle T_1x,T_2x\rangle\\&=\|T_1x\|^2+\|T_2x\|^2=\|T_1\|^2+\|T_2\|^2\end{aligned}$$

因此有 $\|T_1+T_2\|^2=\|T_1\|^2+\|T_2\|^2$，所以 T_1 勾股正交 T_2。充分性得证。

下面我们证必要性。让 T_1 勾股正交 T_2，即为 $\|T_1+T_2\|^2=\|T_1\|^2+\|T_2\|^2$。

对于空间 $\mathcal{H}$ 上的一个单位向量是 x 有 $\|x\|=1$ 因此有 $\|T_1x\|\le\|T_1\|\|x\|=\|T_1\|$ 又因为 $\|T_1x\|\ge\|T_1\|$ 所以有 $\|T_1x\|=\|T_1\|$。同理可得 $\|T_2x\|=\|T_2\|$。由 $\|T_1+T_2\|^2=\|T_1\|^2+\|T_2\|^2$ 可得

$$\|(T_1+T_2)x\|^2=\|T_1x\|^2+\|T_2x\|^2 \tag{1}$$

对于空间 $\mathcal{H}$ 上的一个单位向量是 x 有

$$\|(T_1+T_2)x\|^2=\|T_1x\|^2+\|T_2x\|^2+2\,\mathrm{Re}\langle T_1x,T_2x\rangle \tag{2}$$

综合(1)和(2)可以得到 $\mathrm{Re}\langle T_1x,T_2x\rangle=0$ 所以必要性得证。

3. 结论

本文讨论了在算子空间中当算子是 $n\times n$ 方阵时，算子之间的广义正交性问题。分别给出了算子之间 Birkhoff 正交、等腰正交与 Roberts 正交的等价条件。

参考文献

[1] 吴森林, 计东海. 正交性相关问题的研究[D]: [硕士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨理工大学, 2006: 34-46.

[2] Birkhoff, G. (1935) Orthogonality in Linear Metric Spaces. *Duke Mathematical Journal*, **1**, 169-172. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-35-00115-6

[3] James, R.C. (1945) Orthogonality in Normed Linear Spaces. *Duke Mathematical Journal*, **12**, 291-301. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-45-01223-3

[4] Roberts, B.D. (1934) On the Geomrtry of Abstract Vector Spaces. *Tohoku Mathematic Journal*, **39**, 42-59.

[5] 任芳国, 高莹. 随机矩阵的范数[J]. 东北师大学报(自然科学版), 2012, 44(1): 28-31.

[6] Gustafson, K. (1970) The Toeplitz-Hausdorff Theorem for Linear Operators. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **25**, 203-204. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1970-0262849-9