

有遗失边的 n 维超立方体和折叠超立方体在MM*模型下的诊断度

樊畅畅, 王世英*, 马晓蕾

河南师范大学, 数学与信息科学学院, 河南 新乡
Email: fcc0820@163.com, wangshiying@htu.edu.cn, 954631457@qq.com

收稿日期: 2020年12月19日; 录用日期: 2021年1月15日; 发布日期: 2021年1月21日

摘要

一个多重处理器系统的诊断度是测量互连网络错误容忍度的一个重要研究参数。 n 维折叠超立方体 FQ_n 是由 n 维超立方体 Q_n 添加 2^{n-1} 条边得到。在这篇文章中, 我们首先研究了 Q_n 在 MM* 模型下的诊断度, 证明了 Q_n 即使存在 $n-2$ 条遗失边仍具有强局部诊断性, 并且证明了 $n-2$ 是最优值。然后, 我们研究了 FQ_n 在 MM* 模型下的诊断度, 证明了 FQ_n 即使存在 $n-1$ 条遗失边仍具有强局部诊断性, 并且证明了 $n-1$ 是最优值。

关键词

互连网络, 局部诊断度, n 维超立方体, n 维折叠超立方体, MM* 模型

Diagnosability of n -Dimensional Hypercubes and Folded Hypercubes with Missing Edges under the MM* Model

Changchang Fan, Shiying Wang*, Xiaolei Ma

College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang Henan
Email: fcc0820@163.com, wangshiying@htu.edu.cn, 954631457@qq.com

Received: Dec. 19th, 2020; accepted: Jan. 15th, 2021; published: Jan. 21st, 2021

*通讯作者。

Abstract

Diagnosability of a multiprocessor system is an important research parameter to measure the fault tolerance of interconnection networks. The n -dimensional folded hypercube FQ_n is obtained by adding 2^{n-1} edges to the n -dimensional hypercube Q_n . In this paper, we firstly study the diagnosability of Q_n and prove that Q_n has the strong local diagnosability property even if there exist $n-2$ missing edges in it under the MM* model and the result is optimal with respect to the number of missing edges. Then we study the diagnosability of FQ_n and prove that FQ_n has the strong local diagnosability property even if there exist $n-1$ missing edges in it under the MM* model and the result is optimal with respect to the number of missing edges.

Keywords

Interconnection Networks, Local Diagnosability, n -Dimensional Hypercubes, n -Dimensional Folded Hypercubes, MM* Model

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随着互连网络变得越来越复杂,多重处理器系统的规模变得越来越庞大。一些处理器在诊断时可能会出现故障,所以发现哪些处理器发生了故障是非常重要的。只有找到了故障的处理器,整个系统诊断的可靠性才能得到保证。识别故障处理器的过程叫做系统的诊断。在之前的研究中,研究者已经提出了许多系统诊断模型,其中被广泛使用的是比较模型(MM模型)。MM模型是由 Maeng 和 Malek 首次提出的[1]。之后, Sengupta 和 Dahbura [2]提出了 MM*模型,它是 MM模型的一个特例。在 MM*模型中,一个节点必须测试它的每一对相邻节点。Sengupta 和 Dahbura [2]在 MM*模型下为有 n 个处理器的一般诊断系统提出了一个 $O(n^5)$ 诊断算法。在故障处理器的数量不超过 t 的情况下,如果所有故障的处理器可以被识别出来并且不被替换,我们就称这个系统是 t -可诊断的。一个系统 G 的诊断度 $t(G)$ 是使得 G 是 t -可诊断的 t 的最大值[3] [4] [5] [6]。

在之前的研究中,人们一直考虑的是一个多重处理器系统的全局诊断度。在文献[7]中, Hau 和 Tan 首次提出了一种测量多重处理器系统的局部诊断度的概念。这种新的概念更关注每个处理器的局部性质。在 2009 年, Chiang 和 Tan [8]提出了一种确定系统诊断度的新方法,即延展星结构法。自此以后,该方法被广泛使用。在文献[9]中, Chiang 等证明了 $n(n \geq 4)$ 维星图的诊断度是 $n-1$,且即使它存在高达 $n-3$ 条遗失边,仍保持强局部诊断性。Cheng 等又研究了置换树生成的 Cayley 图[10]和 (n, k) 星图和 2 树生成的 Cayley 图[11]。在 2018 年, Wang 和 Ma [12]证明了交错群图 AG_n 在 MM*模型下即使存在 $2n-7$ 条遗失边,仍保持强局部诊断性。在 2020 年, Ren 和 Wang [13]证明了完全图生成的 Cayley 图 CK_n 在 MM*模型下即使存在 $\frac{1}{2}n(n-1)-2$ 条遗失边,仍保持强局部诊断性。2020 年, Wang 和 Ma [14]证明了排列图 $A_{n,k}$ 在 MM*模型下即使存在 $(k-1)(n-k)-1$ 条遗失边,仍保持强局部诊断性。2020 年, Zhou [15]等证明了扩

展 k 元 n 立方体 XQ_n^k 在比较模型下即使存在 $4n-5$ 条遗失边, 仍保持强局部诊断性。

n 维超立方体 Q_n 和 n 维折叠超立方体 FQ_n 都有许多优良性质。比如点传递性, 边传递性, 递归结构, 高连通性等[16]。在这篇文章中, 我们首先证明了 Q_n 的诊断度是 n , 且在 MM*模型下即使存在高达 $n-2$ 条遗失边仍保持强局部诊断性并且是最优的。然后, 我们证明了 FQ_n 的诊断度是 $n+1$, 且在 MM*模型下即使存在 $n-1$ 条遗失边仍保持强局部诊断性并且是最优的。

2. 基本概念

我们用一个无向简单图 $G=(V, E)$ 表示一个多重处理器系统, 其中点集 $V(G)$ 代表处理器, 边集 $E(G)$ 代表处理器之间的通信链接。一个顶点 v 的度 $d_G(v)$ 是 v 在 G 中关联的边的数目。 $\delta(G)$ 表示 G 的顶点的最小度。 G 中任意一个点 v 的邻集 $N_G(v)$ 是与 v 相邻的所有顶点组成的集合。对于度、邻集这些概念, 在没有歧义产生时, 我们通常省略下标 G 。如果对于所有的 $v \in V$ 都满足 $d(v)=k$, 则这个图是 k -正则的。 G 的一条途径是指一个有限非空序列 $P=v_0e_1v_1e_2v_2 \cdots e_nv_n$, 它的项交替地为顶点和边, 使得对 $1 \leq i \leq n$, e_i 的端点是 v_{i-1} 和 v_i , 称 P 是从 v_0 到 v_n 的一条途径。 v_0 和 v_n 分别称为 P 的起点和终点, 整数 n 称为 P 的长。若途径 P 的顶点 v_0, v_1, \dots, v_n 互不相同, 则 P 称为路。我们用 $P=\langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle$ 表示一条长为 n 的起点是 v_0 , 终点是 v_n 的路。假设 V' 是 V 的一个非空子集, 以 V' 为顶点集, 以两端点均在 V' 中的边的全体为边集所组成的子图, 称为 G 的由 V' 导出的子图, 记为 $G[V']$, $G[V']$ 称为 G 的导出子图。如果把 G 的点集任意划分为两个非空子集 X 和 Y , 总存在一条边满足其中一个端点在 X 中, 另一个端点在 Y 中, 那么 G 是连通的。一个图 G 的连通度 $\kappa(G)$ 和边连通度 $\lambda(G)$ 分别是把图 G 变成一个不连通图或仅一个点所需移除的点和边的最小数量。文中其它未定义而直接使用的符号和术语参见文献[17]。

3. MM*模型

在 MM 模型中, 一个处理器发送同样的任务给一对不同的邻点, 然后比较它们的反馈结果。一个系统 $G=(V(G), E(G))$ 的比较方案被模型化为一个多重图, 用 $M=(V(G), L)$ 表示, 其中 L 是被标记的边集。一条被标记的边 $(u, v)_w \in L$ 代表用一个顶点 w 去比较两个相邻顶点 u 和 v , 这意味着 $uw, vw \in E(G)$ 。如果节点 w 是非故障的(故障的), 那么测试结果是可靠的(不可靠的)。如果 $u, v \in F$ 且 $w \in V(G) \setminus F$, 则 $(u, v)_w \rightarrow 1$ 。如果 $u \in F$ 且 $v, w \in V(G) \setminus F$, 则 $(u, v)_w \rightarrow 1$ 。如果 $v \in F$ 且 $u, w \in V(G) \setminus F$, 则 $(u, v)_w \rightarrow 1$ 。如果 $u, v, w \in V(G) \setminus F$, 则 $(u, v)_w \rightarrow 0$ 。 $M=(V(G), L)$ 中所有比较结果的集合称为诊断的症候, 用 σ 表示。如果比较 $(u, v)_w$ 不一致, 则 $\sigma((u, v)_w)=1$; 否则, $\sigma((u, v)_w)=0$ 。因此, 一个症候是从 L 到 $\{0, 1\}$ 的一个函数。MM*中每个节点必须测试其任意一对相邻节点。即如果 $uw, vw \in E(G)$, 则 $(u, v)_w \in L$ 。在系统中, 所有故障处理器的集合叫作一个故障集, 它可以是 $V(G)$ 的任意一个子集。在 MM*模型下, 对于一个给定的症候 σ , 如果对任意的 $(u, v)_w \in L$ 满足 $w \in V \setminus F$, $\sigma((u, v)_w)=1$ 当且仅当 $u, v \in F$ 或 $u \in F$ 或 $v \in F$, 则我们称故障子集 $F \subseteq V(G)$ 和 σ 是一致的。我们用 $\sigma(F)$ 表示和 F 一致的所有症候的集合。设 F_1 和 F_2 是 $V(G)$ 中两个不同的子集。如果 $\sigma(F_1) \cap \sigma(F_2) \neq \emptyset$, 则 (F_1, F_2) 是不可区分对; 否则, (F_1, F_2) 是可区分对。 $F_1 \Delta F_2 = (F_1 \setminus F_2) \cup (F_2 \setminus F_1)$ 。

定理 3.1 [2] [18] 一个系统 $G=(V, E)$ 在 MM*模型下是 t -可诊断的, 当且仅当对于 V 的每一对不同的故障子集 F_1 和 F_2 , 其中 $|F_1| \leq t$, $|F_2| \leq t$, 满足下列条件之一:

- 1) 有两个顶点 $u, w \in V \setminus (F_1 \cup F_2)$, 有一个顶点 $v \in F_1 \Delta F_2$, 使得 $uw \in E$, $vw \in E$ 。
- 2) 有两个顶点 $u, v \in F_1 \setminus F_2$, 有一个顶点 $w \in V \setminus (F_1 \cup F_2)$, 使得 $uw \in E$, $vw \in E$ 。
- 3) 有两个顶点 $u, v \in F_2 \setminus F_1$, 有一个顶点 $w \in V \setminus (F_1 \cup F_2)$, 使得 $uw \in E$, $vw \in E$ 。

4. 局部诊断度

定义 4.1 [8] 系统 $G=(V,E)$ 中, 如果 $x \in F_1 \Delta F_2$ 且对于 V 的每一对不同的故障子集 F_1 和 F_2 是可区分的, 其中 $|F_1| \leq t$, $|F_2| \leq t$, 则点 x 是局部 t -可诊断的。

引理 4.1 [8] 一个系统 $G=(V,E)$ 是 t -可诊断的当且仅当 G 中每个点都是局部 t -可诊断的。

定义 4.2 [8] 一个系统 $G=(V,E)$ 中, G 中 x 点是局部 t -可诊断的 t 的最大值被定义为点 x 的局部诊断度 $t_l(x)$ 。即 $t_l(x) = \max\{t: G \text{ 在 } x \text{ 点是局部 } t\text{-可诊断的}\}$ 。

引理 4.2 [8] 一个系统 $G=(V,E)$ 的诊断度 $t(G)$ 等于 G 中每个点的局部诊断度的最小值, 即 $t(G) = \min\{t_l(x): \text{对于所有的 } x \in V(G)\}$ 。

定义 4.3 [8] 设 x 是一个图 $G=(V,E)$ 中的一个点。若 $d_G(x) \geq n$, 我们定义一个延展星图 $ES(x;n)$, 其中 $d_{ES(x;n)}(x) = n$, 点集 $V(ES(x;n)) = \{x\} \cup \{v_{ij}: i=1,2,\dots,n, j=1,2,3,4\}$, 边集 $E(ES(x;n)) = \{(x, v_{i1}), (v_{i1}, v_{i2}), (v_{i2}, v_{i3}), (v_{i3}, v_{i4}): i=1,2,\dots,n\}$ 。

引理 4.3 [8] 设 x 是系统 $G=(V,E)$ 中的一个点且 $d_G(x) = n$ 。如果点 x 在 G 中存在一个延展星图 $ES(x;n)$, 则 x 的局部诊断度是 n 。

引理 4.4 [8] 设 x 是图 $G=(V,E)$ 中的一个点。如果 x 的局部诊断度等于它在 G 中的度, 即 $t_l(x) = d_G(x)$, 则这个点 x 有强局部诊断性。

引理 4.5 [8] 设 $G=(V,E)$ 是一个图。如果 G 中每个点的局部诊断度都等于它在 G 中的度, 即对于所有的 $x \in V(G)$ 都有 $t_l(x) = d_G(x)$, 则 G 有强局部诊断性。

5. n 维超立方体 Q_n

定义 5.1 [19] 设 $n \geq 1$ 。 n 维超立方体 Q_n 的点集是 $V(Q_n) = \{u_1 u_2 \cdots u_{n-1} u_n : u_k \in \{0,1\}, 1 \leq k \leq n\}$, 其中任意两个顶点相邻当且仅当只有一位 $u_k (1 \leq k \leq n)$ 是不同的。

Q_n 是 n 正则的, $|V(Q_n)| = 2^n$, $|E(Q_n)| = n2^{n-1}$ 。 $V(Q_n^{ki})$ 表示 $V(Q_n)$ 中点的第 k 位是 i , $1 \leq k \leq n$, $i \in \{0,1\}$ 。 Q_n^{ki} 是由 $V(Q_n^{ki})$ 导出的 Q_n 的子图。 Q_n 可以沿第 k 位分解为两个子图 Q_n^{k0} 和 Q_n^{k1} 。为了简便, 我们把 Q_n^{ki} 简记作 Q_n^i 。

引理 5.1 [19] Q_n^i 同构于 Q_{n-1} , 对于每个 $i \in \{0,1\}$ 。

引理 5.2 [16] n 维超立方体是点传递的和边传递的。

引理 5.3 [16] $\kappa(Q_n) = \lambda(Q_n) = n$ 。

6. n 维折叠超立方体 FQ_n

定义 6.1 [16] 设 $n \geq 2$ 。 n 维折叠超立方体 FQ_n 的点集是 $V(FQ_n) = \{u_1 u_2 \cdots u_{n-1} u_n : u_k \in \{0,1\}, 1 \leq k \leq n\}$, 其中两个顶点相邻当且仅当这两个点的 n 位中只有一位不同或全不同。

$V(FQ_n^{ki})$ 表示 $V(FQ_n)$ 中点的第 k 位是 i , $1 \leq k \leq n$, $i \in \{0,1\}$ 。 FQ_n^{ki} 是由 $V(FQ_n^{ki})$ 导出的 FQ_n 的子图。 FQ_n 可以沿第 k 位分解成两个子图 FQ_n^{k0} 和 FQ_n^{k1} , 且 FQ_n^{ki} 同构于 Q_{n-1} , 对于每个 $i \in \{0,1\}$ 。端点在不同子图 FQ_n^{ki} 和 FQ_n^{kj} 中的边称为外边, 端点在同一个子图 FQ_n^{ki} 中的边称为内边。 FQ_n 是 $n+1$ 正则的, $|V(FQ_n)| = 2^n$, $|E(FQ_n)| = (n+1)2^{n-1}$ 。为了简便, 我们把 FQ_n^{ki} 简记为 FQ_n^i 。

引理 6.1 [16] n 维折叠超立方体是点传递的和边传递的。

引理 6.2 [16] n 维折叠超立方体有下列性质:

- 1) $\kappa(FQ_n) = \lambda(FQ_n) = n+1$ 。
- 2) FQ_n 中每个点与 $n-1$ 条内边关联, 与 2 条外边关联。

3) FQ_n^i 中每个点有 2 个外邻点。

7. n 维超立方体 Q_n 的诊断度

引理 7.1 设 F 是 Q_n ($n \geq 5$) 中任意的遗失边集, $|F| \leq n-2$ 。 $Q_n - F$ 中存在一个延展星图 $ES(x; d_{Q_n-F}(x))$, 其中 $x \in V(Q_n)$ 。

证明 我们通过对 n 进行归纳来证明这个引理。由引理 5.2, Q_n 是点传递的。不失一般性, 取 $x = 00 \cdots 0 \in V(Q_n)$ 。当 $n = 5$, $x = 00000$ 。我们可以在 Q_5 中 x 点处找到四个延展星图 $ES(00000; 5)$ (见图 1~4)。显然, 这些图中除了与 00000 关联的边外, 其它所有边都不相同。由 $|F| \leq n-2 = 3$, 我们可以在 Q_5 中 x 点处找到一个不包含遗失边 F 的延展星图 $ES(x; d_{Q_5-F}(x))$ 。假设定理对于 Q_{n-1} 成立, 即当 $|F| \leq n-3$ 且 $n \geq 6$ 时, 在 $Q_{n-1} - F$ 中 x 点处存在一个延展星图 $ES(x; d_{Q_{n-1}-F}(x))$ 。现在我们证明定理对于 Q_n ($n \geq 6$) 成立。 Q_n 可以沿第 n 位分解成两个同构的子图 Q_n^0 和 Q_n^1 。由引理 5.1, Q_n^i 同构于 Q_{n-1} ($i = 0, 1$)。假设 $F_i = F \cap E(Q_n^i)$, $|F_0| = \max\{|F_0|, |F_1|\}$ 。由于 $|F| \leq n-2$, $|F_i| \leq n-2$ 对于 $i \in \{0, 1\}$ 。令 x' 是 x 在 Q_n^1 中的邻点。由 $x = 00 \cdots 00 \in V(Q_n^0)$, 于是, $x' = 00 \cdots 01 \in V(Q_n^1)$ 。我们使用 $P_{x'}$ 代表以 x' 作为起始点的路。为了证明这个引理, 我们首先需要在 $Q_n^0 - F_0$ 中 x 点处找一个延展星图 $ES(x; d_{Q_n^0-F_0}(x))$, 然后在 $Q_n^1 - F_1$ 中找一条三长的路 $P_{x'}$, 并连接 $P_{x'}$ 到 x 。

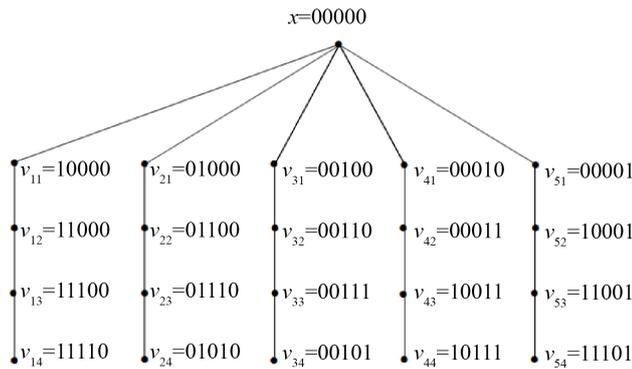


Figure 1. The first extended star graph $ES(x; 5)$ of Q_n
图 1. Q_n 的第一个延展星图 $ES(x; 5)$

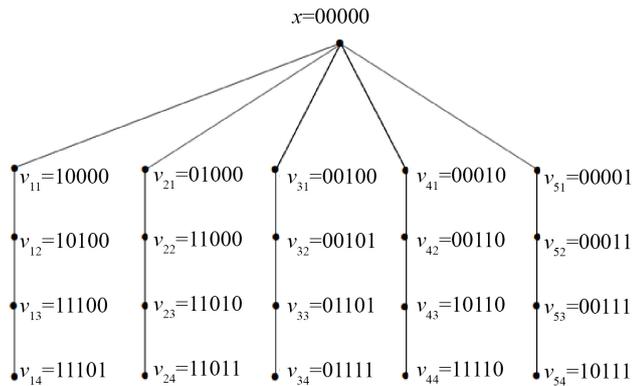


Figure 2. The second extended star graph $ES(x; 5)$ of Q_n
图 2. Q_n 的第二个延展星图 $ES(x; 5)$

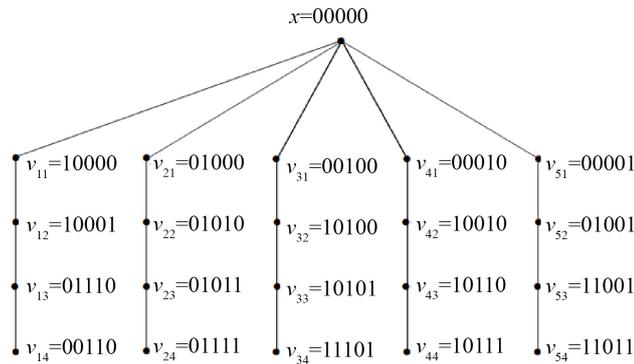


Figure 3. The third extended star graph $ES(x;5)$ of Q_n

图 3. Q_n 的第三个延展星图 $ES(x;5)$

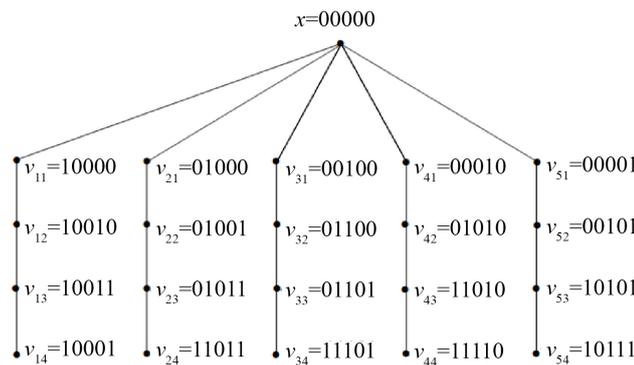


Figure 4. The fourth extended star graph $ES(x;5)$ of Q_n

图 4. Q_n 的第四个延展星图 $ES(x;5)$

情形 1 $|F_0| \leq n-3$

由归纳假设, 在 $Q_n^0 - F_0$ 中 $x = 00 \cdots 0$ 点处存在一个延展星图 $A = ES(x; d_{Q_n^0 - F_0}(x))$ 。根据 n 维超立方体的定义, x 在 Q_n^1 中仅有一个邻点 x' 。如果 $xx' \in F$, 我们就不需要找一条通过 x' 的路。因此, 假设 $xx' \notin F$ 。由引理 5.3, $\lambda(Q_n^1) = n-1 > n-3 \geq |F_1|$ 。于是, $Q_n^1 - F_1$ 是连通的。由 $n \geq 6$ 时, $|V(Q_n^1)| = 2^{n-1} \geq 2^5 = 32$, 故 $Q_n^1 - F_1$ 中存在一条三长的路 $P_{x'}$ 。所以 $P_{x'} \cup \{xx'\}$ 是 $Q_n - F$ 中一条四长的路。我们再把它与 A 相结合就得到 $ES(x; d_{Q_n - F}(x))$ 。

情形 2 $|F_0| = n-2$

假设 $f \in F_0$ 且 $F' = F_0 \setminus \{f\}$ 。此时 $|F'| = n-3$ 。由 $Q_n^0 \cong Q_{n-1}$ 和归纳假设, 在 $Q_n^0 - F'$ 中 x 点处存在延展星图 $ES(x; d_{Q_n^0 - F'}(x))$ 。假设 $A = ES(x; d_{Q_n^0 - F'}(x))$ 。如果 $f \notin E(A)$, 我们在 $Q_n^0 - F_0$ 中 x 点处得到一个延展星图 $ES(x; d_{Q_n^0 - F_0}(x)) = A$ 。假设 $f \in E(A)$ 。若 f 直接与 x 关联, 则在 A 中删除这条包含 f 的路得到 $ES(x; d_{Q_n^0 - F_0}(x))$ 。假设 f 不与 x 关联。设 f 在 A 中一条三长的路 P_u 中, 其中 $u \in N_{Q_n^0}(x)$ 。由 n 维超立方体的定义, $N_{Q_n^0}(x) = N_{Q_n^0}(000 \cdots 000) = \{100 \cdots 000, 010 \cdots 000, \dots, 000 \cdots 010\}$ 。不失一般性, 设 $u = 100 \cdots 000$, 得到 $P_u = P_{100 \cdots 000}$ 。我们删除 A 中包含 f 的路, 然后再找到另一条没有遗失边的三路 $P_{u'}$ 。由 n 维超立方体的定义, u 在 Q_n^1 中有且仅有一个邻点 u' , $u' = 100 \cdots 001 \in V(Q_n^1)$ 。设

$P_u = \langle 1000 \cdots 00, 1000 \cdots 01, 1100 \cdots 01, 1110 \cdots 01 \rangle$, $P_x = \langle 0 \cdots 00001, 0 \cdots 00011, 0 \cdots 00111, 0 \cdots 01111 \rangle$ 。由于 $|F| \leq n-2$ 且 $|F_0| = n-2$, 故 Q_n^0 之外没有遗失边。 P_u 和 P_x 是 $Q_n - F$ 中两条没有遗失边的点不交的三长路。然后连接 P_u 和 P_x 到 x 。因此在 $Q_n - F$ 中 x 点处得到了一个延展星图 $ES(x; d_{Q_n - F}(x))$ 。

当遗失边个数 $|F| = 0$ 时, 由引理 4.2, 4.3 和 7.1, 我们得到以下推论。

推论 7.1 n 维超立方体 $Q_n (n \geq 5)$ 的诊断度是 n , 即 $t(Q_n) = n$ 。

定理 7.1 设 F 是 $n (n \geq 5)$ 维超立方体 Q_n 中任意边子集且 $|F| \leq n-2$ 。对 Q_n 中的每个点 x , $Q_n - F$ 有强局部诊断性, 其中 F 的个数是最优的。

证明 由引理 4.3 和 7.1, 在 $Q_n - F$ 中, 每个点 x 的局部诊断度等于它的度。由引理 4.4 和 4.5, $Q_n - F$ 有强局部诊断性。现在我们证明 F 的个数是最优的。接下来我们举例说明当 $|F| = n-1$ 时, $Q_n - F$ 不具有强局部诊断性。由于 Q_n 是点传递的, 不失一般性, 假设 $x = 00 \cdots 0 \in V(Q_n)$ 。我们假设 Q_n 中 $n-1$ 条遗失边 F 都与 x 关联, 那么在 $Q_n - F$ 中 x 的度就变成了 1, 即 $d_{Q_n - F}(x) = 1$ 。假设 u 是 x 在 $Q_n - F$ 中唯一的邻点。令 $F_1 = (\{u\} \cup N(u)) \setminus \{x\}$, $F_2 = N(u)$ 。此时 $|F_1| = |F_2| = n$ 。显然, $V(Q_n) \setminus (F_1 \cup F_2)$ 和 $F_1 \Delta F_2$ 之间没有边。由定理 3.1 和引理 4.4, $Q_n - F$ 中 u 点在 MM* 模型下不是局部 n 可诊断的。然而, $d_{Q_n - F}(u) = n$ 。故在 $Q_n - F$ 中 u 的局部诊断度 (少于 n) 不等于它的度 (等于 n)。因此, u 没有强局部诊断性。故 n 维超立方体有 $n-1$ 条遗失边时, 就不具有强局部诊断性了。

8. n 维折叠超立方体 FQ_n 的诊断度

引理 8.1 假设 F 是 $FQ_n (n \geq 6)$ 中任意边子集, $|F| \leq n-1$ 。 $FQ_n - F$ 中存在一个延展星图 $ES(x; d_{FQ_n - F}(x))$, 其中 $x \in V(FQ_n)$ 。

证明 FQ_n 可以沿第 n 位分解为 FQ_n^0 和 FQ_n^1 两个子图。当 $i \in \{0, 1\}$ 时, FQ_n^i 同构于 Q_{n-1} 。由于 FQ_n 是点传递的, 不失一般性, 我们假定 $x = 00 \cdots 00 \in V(FQ_n^0)$ 。由引理 6.2, FQ_n^i 中每个点都有两个外部邻点。设 y_0, y_1 是 x 在 FQ_n^i 中的邻点。假设 $y_0 = 00 \cdots 01$, $y_1 = 11 \cdots 11$ 。设 $F_i = F \cap E(FQ_n^i)$ 对于 $i \in \{0, 1\}$, $|F_0| = \max\{|F_0|, |F_1|\}$ 。因此 $|F_i| \leq n-1$ 对于 $i \in \{0, 1\}$ 。为了证明这个引理, 我们首先需要在 $FQ_n^0 - F_0$ 中 x 点处找到一个延展星图 $ES(x; d_{FQ_n^0 - F_0}(x))$, 然后在 $FQ_n^1 - F_1$ 中找两条点不交的三长路 P_{y_0} 和 P_{y_1} , 其中 P_{y_i} 代表以 y_i 作为起始点的路 ($i \in \{0, 1\}$)。最后我们连接 P_{y_0} 和 P_{y_1} 到 x , 并结合 $ES(x; d_{FQ_n^0 - F_0}(x))$ 。因此我们就在 $FQ_n - F$ 中 x 点处找到了一个延展星图 $ES(x; d_{FQ_n - F}(x))$ 。

情形 1 $|F_0| \leq n-3$

由 $FQ_n^0 \cong Q_{n-1}$, $|F_0| \leq n-3$ 和引理 7.1, 我们在 $FQ_n^0 - F_0$ 中 x 点处得到一个延展星图 $ES(x; d_{FQ_n^0 - F_0}(x))$ 。设 $A = ES(x; d_{FQ_n^0 - F_0}(x))$ 。如果 $xy_0 \in F$, $xy_1 \in F$, 我们就不需要发现两条分别通过 y_0, y_1 的路。如果 xy_0 和 xy_1 中仅有一条属于 F , 则不妨假设 $xy_1 \in F$ 。此时我们只需要在 $FQ_n^1 - F_1$ 中找一条以 y_0 开头的三长路 P_{y_0} 。由于 $\lambda(FQ_n^1) = \lambda(Q_{n-1}) = n-1 > n-3 \geq |F_1|$ 。因此 $FQ_n^1 - F_1$ 是连通的。当 $n \geq 6$ 时, $|V(FQ_n^1)| = 2^{n-1} \geq 2^5 = 32$ 。因此在 $FQ_n^1 - F_1$ 中存在一条以 y_0 开头的三长路 P_{y_0} 。我们连接 P_{y_0} 到 x , 然后结合 A , 我们就可以在 $FQ_n - F$ 中 x 点处得到一个延展星图 $ES(x; d_{FQ_n - F}(x))$ 。如果 xy_0 和 xy_1 都不属于 F , 此时我们需要在 $FQ_n^1 - F_1$ 中找到一条以 y_0 开头的三长路 P_{y_0} 和一条以 y_1 开头的三长路 P_{y_1} , 且两条路是点不交的。设 $H_i (i \in \{0, 1\})$ 是由第 $n-1$ 位是 i 、第 n 位是 1 的点集导出的 FQ_n^1 的子图。于是, $y_i \in V(H_i)$ 。由 n 维超立方体和折叠超立方体的定义, H_i 同构于 Q_{n-2} 。由于 $\lambda(H_i) = \lambda(Q_{n-2}) = n-2 > n-3 \geq |F_1|$, 故 $H_i - F_1$ 是连通的。由 $n \geq 6$ 时, $|V(H_i)| = 2^{n-2} \geq 2^4 = 16$, 因此我们可以在 $H_i - F_1$ 中找到一条以 y_i 开头的三长路 $P_{y_i} (i \in \{0, 1\})$ 。显然, 这两条三长路是点不交的, 然后我们连接 P_{y_0} 和 P_{y_1} 到 x , 最后结合 A 。因此我们在 $FQ_n - F$ 中 x 点处得到了一个延展星图 $ES(x; d_{FQ_n - F}(x))$ 。

情形 2 $|F_0| = n - 2$

设 $f \in F_0$, $F' = F_0 \setminus \{f\}$ 。故 $|F'| = n - 3$ 。由 $FQ_n^0 \cong Q_{n-1}$ 和引理 7.1, 在 $FQ_n^0 - F'$ 中 x 点处存在延展星图 $ES(x; d_{FQ_n^0 - F'}(x))$, 设 $A = ES(x; d_{FQ_n^0 - F'}(x))$ 。如果 $f \notin E(A)$, 则 $ES(x; d_{FQ_n^0 - F_0}(x)) = A$ 。假定 $f \in E(A)$ 。如果 f 与 x 关联, 我们删除这条包含 f 的路。假定 f 不与 x 关联。令 f 在 A 中一条三长路 P_u 中, $u \in N_{FQ_n^0}(x)$ 。由 n 维折叠超立方体的定义, $N_{FQ_n^0}(x) = \{100 \cdots 000, 010 \cdots 000, \dots, 000 \cdots 010\}$ 。不失一般性, 设 $u = 100 \cdots 000$ 。我们得到 $P_u = P_{100 \cdots 000}$ 。我们需要找到另一条没有遗失边的三长路 P_{u_1} 。由 n 维折叠超立方体的定义, u 在 FQ_n^1 中有两个邻点 u_0, u_1 。不妨设 $u_0 = 011 \cdots 111, u_1 = 100 \cdots 001$ 。设 H_{ij} 是由第 1 位是 i , 第 2 位是 j , 第 n 位是 1 的点集导出的 FQ_n^1 的子图, 其中 $i, j \in \{0, 1\}$ 。由 n 维超立方体和折叠超立方体的定义, H_{ij} 同构于 Q_{n-3} 。于是, $u_0 \in V(H_{01}), u_1 \in V(H_{10}), y_0 \in V(H_{00}), y_1 \in V(H_{11})$ 。由于 $\lambda(H_{ij}) = \lambda(Q_{n-3}) = n - 3 > 1 \geq |F_1|$, 故 $H_{ij} - F_1$ 是连通的。由 $n \geq 6, |V(H_{ij})| = 2^{n-3} \geq 2^3 = 8$ 。因此我们可以在 $H_{01} - F_1$ 中找到一条二长路 P_{u_0} , $H_{10} - F_1$ 中找到一条二长路 P_{u_1} , $H_{00} - F_1$ 中找到一条三长路 P_{y_0} , $H_{11} - F_1$ 中找到一条三长路 P_{y_1} 。显然, 这四条路是点不交的。注意到 $|F| - |F_0| \leq 1$ 。如果存在某个 $i \in \{0, 1\}$ 使得 $uu_i \in F$, 那么 $uu_j \notin F, j \in \{0, 1\} \setminus \{i\}$ 。然后我们连接 P_{u_j} 与 u 得到一条没有遗失边的三长路 P_u 。如果存在某个 $i \in \{0, 1\}$ 使得 $xy_i \in F$, 那么我们就不要找以 y_i 开始的路。否则, 我们需要连接 P_{y_0}, P_{y_1} 到 x 。最后我们在 $FQ_n - F$ 中 x 点处得到一个延展星图 $ES(x; d_{FQ_n - F}(x))$ 。

情形 3 $|F_0| = n - 1$

设 $f, f' \in F_0, F' = F_0 \setminus \{f, f'\}$ 。故 $|F'| = n - 3$ 。由 $FQ_n^0 \cong Q_{n-1}$ 和引理 7.1, 在 $FQ_n^0 - F'$ 中 x 点处存在延展星图 $ES(x; d_{FQ_n^0 - F'}(x))$, 设 $A = ES(x; d_{FQ_n^0 - F'}(x))$ 。如果 x 与遗失边 $\{f, f'\}$ 关联, 则我们删除有遗失边的路。假定 x 不与遗失边 $\{f, f'\}$ 关联。如果 f 和 f' 中至多有一条属于 A , 证明类似于情形 2。故我们假设 f 和 f' 分别属于 A 中两条不同的路 P_u 和 P_v , 其中 $u, v \in N_{FQ_n^0}(x)$ 。我们删除这两条包含遗失边的路, 再重新找两条不含遗失边的路 P_u 和 P_v 。由 n 维折叠超立方体的定义, $N_{FQ_n^0}(x) = \{100 \cdots 000, 010 \cdots 000, \dots, 000 \cdots 010\}$ 。不失一般性, 设 $u = 100 \cdots 000, v = 010 \cdots 000$ 。于是, $P_u = P_{100 \cdots 000}, P_v = P_{010 \cdots 000}$ 。不妨设 $u_0 = 100 \cdots 001$ 是 u 在 FQ_n^1 中的一个邻点, $v_0 = 010 \cdots 001$ 是 v 在 FQ_n^1 中的一个邻点。设 $H_{ij} (i, j \in \{0, 1\})$ 是由第 1 位是 i , 第 2 位是 j , 第 n 位是 1 的点集导出的 FQ_n^1 的子图。由 n 维超立方体和折叠超立方体的定义, H_{ij} 同构于 Q_{n-3} 。于是, $u_0 \in V(H_{10}), v_0 \in V(H_{01}), y_0 \in V(H_{00}), y_1 \in V(H_{11})$ 。因为 $|F| - |F_0| = 0$, 所以 $H_{ij} - F_1$ 是连通的。由 $n \geq 6, |V(H_{ij})| = 2^{n-3} \geq 2^3 = 8$ 。因此我们可以在 $H_{10} - F_1, H_{01} - F_1, H_{00} - F_1$ 和 $H_{11} - F_1$ 中分别找到一条二长路 P_{u_0} , 二长路 P_{v_0} , 三长路 P_{y_0} 和三长路 P_{y_1} 。显然, 这些路是点不交的。我们分别连接 P_{u_0} 到 u, P_{v_0} 到 v, P_{y_0} 到 x, P_{y_1} 到 x 。于是, 我们就在 $FQ_n - F$ 中 x 点处得到了一个延展星图 $ES(x; d_{FQ_n - F}(x))$ 。

当遗失边个数 $|F| = 0$ 时, 由引理 4.2, 4.3 和 8.1, 我们得到以下推论。

推论 8.1 n 维折叠超立方体 $FQ_n (n \geq 6)$ 的诊断度是 $n + 1$ 。即 $t(FQ_n) = n + 1$ 。

定理 8.1 设 F 是 $n (n \geq 6)$ 维折叠超立方体 FQ_n 中任意边子集且 $|F| \leq n - 1$ 。 $FQ_n - F$ 有强局部诊断性, 其中 F 的个数是最优的。

证明 由引理 4.3 和 8.1, 在 $FQ_n - F$ 中, 每个点 x 的局部诊断度都等于它的度。由引理 4.4 和 4.5, $FQ_n - F$ 有强局部诊断性。现在我们证明 F 的个数是最优的。接下来我们举例说明当 $|F| = n$ 时, $FQ_n - F$ 不具有强局部诊断性。由于 FQ_n 是点传递的, 不失一般性, 假设 $x = 00 \cdots 00 \in V(FQ_n)$ 。我们假设 FQ_n 中 n 条遗失边 F 都与 x 关联, 那么在 $FQ_n - F$ 中 x 的度就变成了 1。即 $d_{FQ_n - F}(x) = 1$ 。假设 u 是 x 在 $FQ_n - F$ 中唯一的邻点。令 $F_1 = (\{u\} \cup N(u)) \setminus \{x\}, F_2 = N(u)$ 。此时 $|F_1| = |F_2| = n + 1$ 。显然, $V(FQ_n) \setminus (F_1 \cup F_2)$ 和

$F_1\Delta F_2$ 之间没有边。由定理 3.1 和引理 4.4, $FQ_n - F$ 中 u 在 MM^* 模型下不是局部 $n+1$ 可诊断的。然而, $d_{FQ_n - F}(u) = n+1$ 。故在 $FQ_n - F$ 中 u 的局部诊断度(少于 $n+1$)不等于它的度(等于 $n+1$)。因此, u 没有强局部诊断性。故 n 维折叠超立方体有 n 条遗失边时, 就不具有强局部诊断性了。

9. 结论

在这篇文章中, 我们研究了 n 维超立方体和 n 维折叠超立方体在 MM^* 模型下的局部诊断度。我们证明了 n 维超立方体 Q_n 的诊断度是 n , n 维折叠超立方体 FQ_n 的诊断度是 $n+1$, 以及即使 Q_n 和 FQ_n 中分别存在高达 $n-2$ 和 $n-1$ 条遗失边, 它们仍保持这种强的性质。因此, 在 n 维超立方体和 n 维折叠超立方体的遗失边数分别不超过 $n-2$ 和 $n-1$ 的条件下, 它们的诊断度等于每个处理器剩余度的最小值。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(61772010)。

参考文献

- [1] Maeng, J. and Malek, M. (1981) A Comparison Connection Assignment for Self-Diagnosis of Multiprocessors Systems. *Proceeding of the 11th International Symposium on Fault-Tolerant Computing*, Vol. 11, 173-175.
- [2] Sengupta, A. and Dahbura, A. (1992) On Self-Diagnosable Multiprocessor Systems: Diagnosis by the Comparison Approach. *IEEE Transactions on Computers*, **41**, 1386-1396. <https://doi.org/10.1109/12.177309>
- [3] Fan, J.X. (2002) Diagnosability of Crossed Cubes under the Comparison Diagnosis Model. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **13**, 1099-1104. <https://doi.org/10.1109/TPDS.2002.1041887>
- [4] Gu, M.-M., Hao, R.-X., Feng, Y.-Q. and Yu, A.-M. (2018) The 3-Extra Connectivity and Faulty Diagnosability. *The Computer Journal*, **61**, 672-686. <https://doi.org/10.1093/comjnl/bxx089>
- [5] Gu, M.-M., Hao, R.-X. and Zhou, S.M. (2019) Fault Diagnosability of Data Center Networks. *Theoretical Computer Science*, **776**, 138-147. <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2019.01.020>
- [6] Lai, P.-L., Tan, J.J.M., Chang, C.-P. and Hsu, L.-H. (2005) Conditional Diagnosability Measures for Large Multiprocessor Systems. *IEEE Transactions on Computers*, **54**, 165-175. <https://doi.org/10.1109/TC.2005.19>
- [7] Hsu, G.-H. and Tan, J.J.M. (2007) A Local Diagnosability Measure for Multiprocessor Systems. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **18**, 598-607. <https://doi.org/10.1109/TPDS.2007.1022>
- [8] Chiang, C.-F. and Tan, J.J.M. (2009) Using Node Diagnosability to Determine t-Diagnosability under the Comparison Diagnosis Model. *IEEE Transactions on Computers*, **58**, 251-259. <https://doi.org/10.1109/TC.2008.158>
- [9] Chiang, C.-F., Hsu, G.-H., Shih, L.-M. and Tan, J.J.M. (2012) Diagnosability of Star Graphs with Missing Edges. *Information Sciences*, **188**, 253-259. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2011.11.012>
- [10] Cheng, E. and Liptak, L. (2013) Diagnosability of Cayley Graphs Generated by Transposition Trees with Missing Edges. *Information Sciences*, **238**, 250-252. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2013.03.009>
- [11] Cheng, E., Liptak, L. and Steffy, D.E. (2013) Strong Local Diagnosability of (n,k)-Star Graphs and Cayley Graphs Generated by 2-Trees with Missing Edges. *Information Processing Letters*, **113**, 452-456. <https://doi.org/10.1016/j.ipl.2013.03.002>
- [12] Wang, S.Y. and Ma, X.L. (2018) Diagnosability of Alternating Group Graphs with Missing Edges. *Recent Advances Electrical and Electronic Engineering*, **11**, 51-57. <https://doi.org/10.2174/2352096510666171107155511>
- [13] Ren, Y.X. and Wang, S.Y. (2020) Diagnosability of the Cayley Graph Generated by Complete Graph with Missing Edges under the MM^* Model. *The Computer Journal*, **63**, 1438-1447. <https://doi.org/10.1093/comjnl/bxz096>
- [14] Wang, S.Y. and Ma, X.L. (2020) Diagnosability of Arrangement Graphs with Missing Edges under the MM^* Model. *International Journal of Parallel, Emergent and Distributed Systems*, **35**, 69-80. <https://doi.org/10.1080/17445760.2019.1600688>
- [15] Zhou, Z.P., Wang, S.Y., Ma, X.L. and Ren, Y.X. (2020) Diagnosability of Expanded k-Ary n-Cubes with Missing Edges under the Comparison Model. *International Journal of Parallel, Emergent and Distributed Systems*, **35**, 16-28. <https://doi.org/10.1080/17445760.2019.1649404>
- [16] El-Amawy, A. and Latifi, S. (1991) Properties and Performance of Folded Hypercubes. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **2**, 31-42. <https://doi.org/10.1109/71.80187>

-
- [17] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (2007) Graph Theory. Springer, New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-84628-970-5>
- [18] Dahbura, A.T. and Masson, G.M. (1984) An $O(n^{2.5})$ Fault Identification Algorithm for Diagnosable Systems. *IEEE Transactions on Computers*, **33**, 486-492. <https://doi.org/10.1109/TC.1984.1676472>
- [19] Saad, Y. and Schultz, M.H. (1988) Topological Properties of Hypercubes. *IEEE Transactions on Computers*, **37**, 867-872. <https://doi.org/10.1109/12.2234>