Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(3), 740-746
Published Online March 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.103081

关于$A(n,d,w)$的一个注记

寇永芳，吕梦欣，胡晓敏，杨卫华*

太原理工大学数学学院，山西 晋中
Email: 1351003433@qq.com, 840165986@qq.com, hxm_xju@163.com, *ywh222@163.com

收稿日期：2021年2月23日；录用日期：2021年3月19日；发布日期：2021年3月26日

摘 要

编码理论中的一个基本问题是求$A(n,d,w)$的值，即最小Hamming距离为d的最大n长二元常重码集的大小。而$A(n,d,w)$又可看作是n维超立方体$d-1$次幂图中所有重量为w的点导出子图$Q_n^{(d-1,w)}$的最大独立集。故为探索$Q_n^{(d,w)}$的最大独立集，本文首次给出了图$Q_n^{(d,w)}$的定义，对其一些基本性质进行了研究并得到如下主要结果：$Q_n^{(d,w)}$是$\sum_{i=1}^{\lfloor d/2\rfloor}\binom{w}{w-i}\binom{n-w}{i}$-正则图；$Q_n^{(d,w)}$是点传递图；对于$2\le d\le 3$，若$w\ge\lceil n/2\rceil$，则$\omega\left(Q_n^{(d,w)}\right)=w+1$；若$w<\lceil n/2\rceil$，则$\omega\left(Q_n^{(d,w)}\right)=n-w+1$；当$3\le d\le 4$时，有

$$A(n,d,w)=\alpha\left(Q_n^{(d-1,w)}\right)\le\frac{\binom{n}{w}}{w+1}\text{或}\frac{\binom{n}{w}}{n-w+1}。$$

关键词

超立方体，最大独立集，编码理论，常重码

A Note on $A(n,d,w)$

Yongfang Kou, Mengxin Lv, Xiaomin Hu, Weihua Yang*

School of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Jinzhong Shanxi
Email: 1351003433@qq.com, 840165986@qq.com, hxm_xju@163.com, *ywh222@163.com

Received: Feb. 23rd, 2021; accepted: Mar. 19th, 2021; published: Mar. 26th, 2021

Abstract

A basic problem in coding theory is to find the value of $A(n,d,w)$, that is the size of the maximum

*通讯作者。

文章引用: 寇永芳, 吕梦欣, 胡晓敏, 杨卫华. 关于$A(n,d,w)$的一个注记[J]. 应用数学进展, 2021, 10(3): 740-746.
DOI: 10.12677/aam.2021.103081

***n*-length binary constant weight code with the minimum Hamming distance *d*. However, it can be regarded as the size of the maximum independent set of $Q_n^{(d-1,w)}$ which is a subgraph of $d-1^{th}$ power of *n*-dimensional hypercube induced by all vertices with constant weight *w*. To explore the maximum independent set of $Q_n^{(d,w)}$, this paper gives the definition of $Q_n^{(d,w)}$ for the first time. Furthermore, some basic properties of the graph are studied and the main results are obtained as follows: $Q_n^{(d,w)}$ is $\sum_{i=1}^{\lfloor d/2 \rfloor}\binom{w}{w-i}\binom{n-w}{i}$-regular. $Q_n^{(d,w)}$ is vertex transitive. For $2 \le d \le 3$, if $w \ge \lceil n/2 \rceil$, then $\omega\left(Q_n^{(d,w)}\right)=w+1$; if $w < \lceil n/2 \rceil$, then $\omega\left(Q_n^{(d,w)}\right)=n-w+1$. For $3 \le d \le 4$, $A(n,d,w)=\alpha\left(Q_n^{(d-1,w)}\right) \le \frac{\binom{n}{w}}{w+1}$ or $\frac{\binom{n}{w}}{n-w+1}$.**

Keywords

Hypercube, Maximum Independent Set, Coding Theory, Constant Weight Code

1. 引言

在编码理论中，常重码是一种带有检错和纠错能力的重要编码，被广泛地应用于光导纤维中的码分多址系统、雷达和声纳的信号设计、高数据率数字通信等领域。由于其广泛的应用背景，常重码吸引了相当多的学者参与其讨论研究。数学家们尝试用代数、图论以及组合等方法来研究满足一定条件的最大常重码的个数及其结构，并取得了很大的进展。

n 维二元向量空间 $Z_2^n = Z_2 \times Z_2 \times \cdots \times Z_2$，可以将 Z_2^n 中的每个 n 维二元向量看作是一个 n 长二元码字，码字构成的集合称为码集。码字 x 中非零码元的个数为码字 x 的 Hamming 重量，简称码重，记为 $wt(x)$。1950 年，Hamming [1] [2]定义两个码字 x, y 间的 Hamming 距离为其不同码元的位数，记为 $d_H(x,y)$，即 $d_H(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$，$i\in[1,n]$。

如文献[2]中所述，$A(n,d,w)$ 为最小 Hamming 距离为 d、码重为 w 的最大 n 长二元常重码集的大小，即 $A(n,d,w)=\max\{|M|: M\text{是}n\text{长二元码集,且任取}x,y\in M,\text{有}wt(x)=w,d_H(x,y)\ge d\}$。

由于二元常重码广泛的应用背景，许多学者对二元常重码进行了深入的研究，研究的主题主要集中在确定 $A(n,d,w)$ 的值。二十世纪六十年代，Johnson 在[3] [4] [5]中给出了关于 $A(n,d,w)$ 的一些比较经典的性质：$A(n,d,w)\le\left[\frac{dn}{dn-2w(n-w)}\right]$；$A(n,d,w)\le\left[\frac{n}{w}A(n-1,d,w-1)\right](n\ge w\ge 1)$；$A(n,d,w)\le\left[\frac{n}{n-w}A(n-1,d,w)\right](n>w\ge 0)$；$A(n,d,w)=1(d>2w)$；$A(n,d,w)=\left[\frac{n}{w}\right](d=2w)$；若 d 为奇数，则 $A(n,d,w)=A(n,d+1,w)$ 等。1977 年，MacWilliams 和 Sloane 在[2]中系统给出了 $n\le 24$，$d\le 10$ 时 $A(n,d,w)$ 的上下界。随后，Best 等人[6]、Graham [7]及 Sloane [8]继续对这些关于 $A(n,d,w)$ 的上下界进行研究改进。直到 1990 年，Brouwer 等人[9]给出了 $n\le 28$，$d\le 18$ 时 $A(n,d,w)$ 的最优下界。2000 年，

Vardy 等人[10]将 $A(n,d,w)$ 的上下界扩大到了 $n\le 28$，$d\le 14$ 的范围，对已知的 $n\le 24$，$d\le 12$ 时 $A(n,d,w)$ 的上界做出了极大的改进，并证明了若 d 为偶数，则 $A(n,d,w)\le \frac{\binom{n}{w-1}}{w}$。此后，学者们继续利用半正定规划、Terwilliger 代数等方法对 $A(n,d,w)$ 的上下界进行讨论，但大多都是对 d 取 6，8，10，12 时 $A(n,d,w)$ 的上下界有了一定的改进[11] [12] [13]。

总的来看，不少研究都致力于求 $A(n,d,w)$ 确切的值，但是迄今为止还没有统一的方法研究 $A(n,d,w)$ 的值。本文提出从图论的角度去研究 $A(n,d,w)$，并非常简洁地给出了 $3\le d\le 4$ 时的一个上界。

本文定义图 $Q_n^{(d,w)}$ 为 n 维超立方体 d 次幂图中所有重量为 w 的点导出的子图，即 $V\left(Q_n^{(d,w)}\right)=\left\{u\in Q_n^d : \sum_{i=1}^n u_i = w\right\}$。由上述定义可知 $A(n,d,w)$ 对应于图 $Q_n^{(d-1,w)}$ 的最大独立集的大小，即 $A(n,d,w)=\alpha\left(Q_n^{(d-1,w)}\right)$。为探索 $Q_n^{(d,w)}$ 的最大独立集，本文对其基本性质进行了研究并得到如下一些结果：$Q_n^{(d,w)}$ 是 $\sum_{i=1}^{\lfloor d/2\rfloor}\binom{w}{w-i}\binom{n-w}{i}$ - 正则图；$Q_n^{(d,w)}$ 是点传递图；对于 $2\le d\le 3$，若 $w\ge\lceil n/2\rceil$，则 $\omega\left(Q_n^{(d,w)}\right)=w+1$；若 $w<\lceil n/2\rceil$，则 $\omega\left(Q_n^{(d,w)}\right)=w+1$；对于 $3\le d\le 4$，若 $w\ge\lceil n/2\rceil$，则有 $A(n,d,w)=\alpha\left(Q_n^{(d-1,w)}\right)\le\frac{\binom{n}{w}}{w+1}$，若 $w<\lceil n/2\rceil$，则 $A(n,d,w)\le\frac{\binom{n}{w}}{n-w+1}$。与 2000 年 Vardy 等人[10]得到的 $3\le d\le 4$ 时 $A(n,d,w)$ 的上界 $\frac{\binom{n}{w-1}}{w}$ 相比，当 $w<\lceil n/2\rceil$ 时，本文得到的 $A(n,d,w)$ 的上界 $\frac{\binom{n}{w}}{n-w+1}=\frac{\binom{n}{w-1}}{w}$；当 $w\ge\lceil n/2\rceil$ 时，本文得到的 $A(n,d,w)$ 的上界 $\frac{\binom{n}{w}}{w+1}<\frac{\binom{n}{w-1}}{w}$。

2. 预备知识

本节给出了本文需要的一些基本概念和符号。

令 $G=(V(G),E(G))$ 为简单无向图，其中 $V(G)$ 是图 G 的顶点集，$E(G)$ 是图 G 的边集。任取 $v\in V(G)$，G 中与点 v 关联的边的数目称为点 v 的度，记为 $d_G(v)$。若图 G 中所有点的度都为 k，则称图 G 是 k-正则的。令 M 是 $V(G)$ 的一个子集，若 M 中任意两个顶点在图 G 中均不相邻，则称 M 为图 G 的独立集。若图 G 中不包含满足 $|M^*|>|M|$ 的独立集 M^*，则称 M 为图 G 的最大独立集。图 G 的最大独立集的顶点数称为图 G 的独立数，记为 $\alpha(G)$。反之，若 M 中任意两个顶点在图 G 中均相邻，则称 M 为图 G 的团。若图 G 中不包含满足 $|M^*|>|M|$ 的团 M^*，则称 M 为图 G 的最大团，最大团的顶点数称为图 G 的团数，记为 $\omega(G)$。

定义 2.1：图 Q_n 表示 n 维超立方体图，其顶点集 $V(Q_n)=\left\{x\mid x\in Z_2^n\right\}$，且对于任意的 $x,y\in V(Q_n)$，有边 $x\sim y$ 当且仅当 $d_H(x,y)=1$。

定义 2.2：图 Q_n^d 表示 n 维超立方体 Q_n 的 d 次幂图，其顶点集 $V\left(Q_n^d\right)=\left\{x\mid x\in Z_2^n\right\}$，且对于任意的 $x,y\in V\left(Q_n^d\right)$，有边 $x\sim y$ 当且仅当 $d_H(x,y)\le d$。

定义 2.3：$G=(V(G),E(G))$ 是一个图，φ 是从 $V(G)$ 到其自身的一个双射。任取 $x,y\in V(G)$，若 $x\sim y$ 当且仅当 $\varphi(x)\sim\varphi(y)$，则称 φ 是图 G 的一个自同构。图 G 的所有自同构构成一个群，称为图 G 的自同

构群，记为 $\mathrm{Aut}(G)$。

定义 2.4：给出两个 n 长二元码字 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$， $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，定义 $x\cap y=\{i\mid x_i=y_i=1,1\le i\le n\}$。

定义 2.5：$G=(V(G),E(G))$ 为简单无向图，若对于任意的 $x,y\in G$，存在 $\varphi\in\mathrm{Aut}(G)$ 满足 $\varphi(x)=y$，则称图 G 为点传递图。

定理 2.6 ([14], Lemma 7.2.2)：若图 $G=(V(G),E(G))$ 为点传递图，则有 $\alpha(G)\omega(G)\le|V(G)|$。

3. $Q_n^{(d,w)}$ 的基本性质

由定义可得 $A(n,d,w)=\alpha\left(Q_n^{(d-1,w)}\right)$，即 n 维超立方体 $d-1$ 次幂图中由所有重量为 w 的点导出子图的独立数等于给定最小 Hamming 距离为 d，重量为 w 的最大 n 长二元常重码集的大小。现令 $u_0=(0,0,\cdots,0)$，$D_i=\left\{u\in V\left(Q_n^d\right)\mid d_H(u,u_0)\le i\right\}(0\le i\le n)$。为便于观察，给出如下对 Q_n^d 的距离划分(见图 1)，则 $Q_n^{(d,w)}$ 就是由 D_w 导出的子图。在此基础上，本节对 $Q_n^{(d,w)}$ 进行了研究，并得到了它的一些基本性质。

D_0	D_1	D_2	$\cdots$	D_{n-1}	D_n
$(0,0,\cdots,0)$	$(1,0,0,\cdots,0)$	$(1,1,0,0,\cdots,0)$	$\cdots$	$(1,1,\cdots,1,0)$	$(1,1,\cdots,1)$
	$(0,1,0,\cdots,0)$	$(1,0,1,0,\cdots,0)$	$\cdots$	$(1,0,1,\cdots,1)$	
	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	
	$(0,0,\cdots,0,1)$	$(0,0,\cdots,0,1,1)$	$\cdots$	$(0,1,1,\cdots,1)$	

Figure 1. The distance division graph of Q_n^d

图 1. Q_n^d 的距离划分图

定理 3.1： $Q_n^{(d,w)}$ 是 k-正则图，其中 $k=\sum_{i=1}^{\lfloor d/2\rfloor}\binom{w}{w-i}\binom{n-w}{i}$。

证明：对于任意的 $x,y\in V\left(Q_n^{(d,w)}\right)$，设 $|x\cap y|=t$，则 $d_H(x,y)=2(w-t)$。x 与 y 相邻当且仅当 $d_H(x,y)=2(w-t)\le d$，即 $t\ge w-\lfloor d/2\rfloor$。因此，对于 $Q_n^{(d,w)}$ 中的任意一点 x 有

$$d(x)=\binom{w}{w-1}\binom{n-w}{1}+\binom{w}{w-2}\binom{n-w}{2}+\cdots+\binom{w}{w-\frac{d}{2}}\binom{n-w}{\frac{d}{2}}=\sum_{i=1}^{\lfloor d/2\rfloor}\binom{w}{w-i}\binom{n-w}{i}，$$

即 $Q_n^{(d,w)}$ 是 $Q_n^{(d,w)}$ -正则图。

定理 3.2： $Q_n^{(d,w)}$ 是点传递图。

证明：根据定义 2.5，要证明 $Q_n^{(d,w)}$ 是点传递图，我们只需证明对于任意的 $x,y\in V\left(Q_n^{(d,w)}\right)$，存在 $\varphi\in\mathrm{Aut}\left(Q_n^{(d,w)}\right)$ 满足 $\varphi(x)=y$ 即可。不妨设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$， $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，其中

$$x_1=x_2=\cdots=x_k=x_{k+1}=\cdots=x_w=1，\quad x_{w+1}=\cdots=x_n=0，$$

$$y_1=y_2=\cdots=y_k=1，\quad y_{k+1}=\cdots=y_w=0，\quad y_{w+1}=\cdots=y_{2w-k}=1，\quad y_{2w-k+1}=\cdots=y_n=0。$$

现假设 $f\in S_n$，即 f 是集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上的一个置换，且

$$f=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k&k+1&k+2&\cdots&w&w+1&\cdots&2w-k&2w-k+1&\cdots&n\\1&2&\cdots&k&w+1&w+2&\cdots&2w-k&k+1&\cdots&w&2w-k+1&\cdots&n\end{pmatrix}。$$

对于任意的 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)\in V\left(Q_n^{(d,w)}\right)$，令 $\varphi(u_1,u_2,\cdots,u_n)=\left(u_{f(1)},u_{f(2)},\cdots,u_{f(n)}\right)$。显然，$\varphi$ 是点集 $V\left(Q_n^{(d,w)}\right)$ 到其本身的一个映射，且 $\varphi(x)=y$。下面只需要证明 $\varphi\in\mathrm{Aut}\left(Q_n^{(d,w)}\right)$。

1) φ 为双射。

φ 为单射：任取 $u,v\in V\left(Q_n^{(d,w)}\right)$，若 $u\neq v$，则一定存在 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 有 $u_i\neq v_i$。而对于 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 存在 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$ 使得 $f(j)=i$，故 $u_{f(j)}\neq v_{f(j)}$，即 $\varphi(u)\neq\varphi(v)$，故 φ 为单射。

φ 为满射：对于任意的 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)\in V\left(Q_n^{(d,w)}\right)$，存在 $v=(v_1,v_2,\cdots,v_n)\in V\left(Q_n^{(d,w)}\right)$，其中

$$v_i=u_i\,(1\le i\le k \text{ 或 } 2w-k+1\le i\le n),$$

$$v_{k+j}=u_{w+j}\,(1\le j\le w-k),$$

$$v_{w+j}=u_{k+j}\,(1\le j\le w-k),$$

使得 $\varphi(v)=u$，故 φ 为满射。

2) 对于任意的 $u,v\in V\left(Q_n^{(d,w)}\right)$，$u\sim v$ 当且仅当 $\varphi(u)\sim\varphi(v)$。

由 φ 和 f 定义可知，$d_H\left(\varphi(u),\varphi(v)\right)=\sum_{i=1}^{n}\left|u_{f(i)}-v_{f(i)}\right|=\sum_{i=1}^{n}\left|u_i-v_i\right|=d_H(u,v)$，故 $u\sim v$ 当且仅当 $\varphi(u)\sim\varphi(v)$。

综上，$\varphi\in\mathrm{Aut}\left(Q_n^{(d,w)}\right)$，故 $Q_n^{(d,w)}$ 是点传递图。

定理 3.3：当 $2\le d\le 3$ 时，$Q_n^{(d,w)}$ 的团数

$$\omega\left(Q_n^{(d,w)}\right)=\begin{cases}w+1\left(w\ge\lceil n/2\rceil\right)\\ n-w+1\left(w<\lceil n/2\rceil\right)\end{cases}。$$

证明：令点 $u^0=\left(u_1^0,u_2^0,\cdots,u_n^0\right)\in V\left(Q_n^{(d,w)}\right)$，其中 $u_1^0=u_2^0=\cdots=u_w^0=1$，$u_{w+1}^0=\cdots=u_n^0=0$。为了便于观察，我们给出如下对图 $Q_n^{(d,w)}$ 的距离划分(见图 2)，其中 $D_i^w=\left\{u\in V\left(Q_n^{(d,w)}\right)\mid d_H\left(u,u^0\right)=i\right\}$，$i$ 为偶数，而且若 $w<\dfrac{n}{2}$，则 $2\le i\le 2w$，否则 $2\le i\le 2(n-w)$。

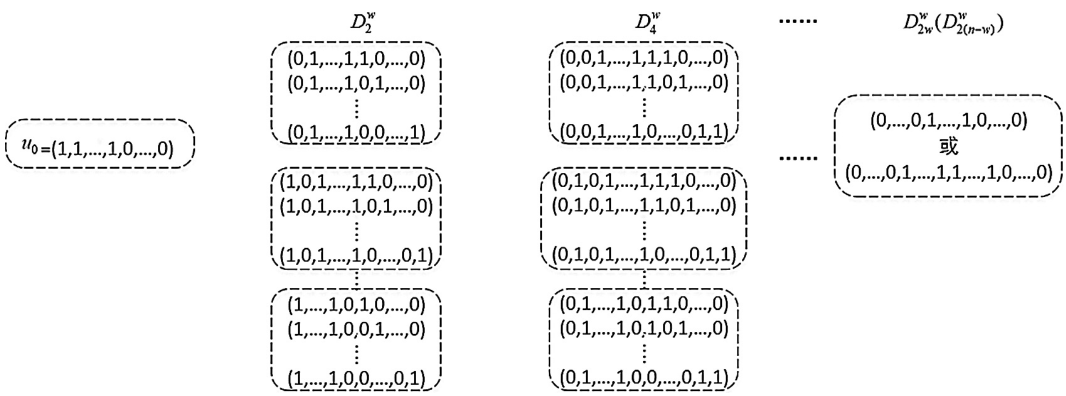

Figure 2. The distance division graph of $Q_n^{(d,w)}$

图 2. $Q_n^{(d,w)}$ 的距离划分图

由 $Q_n^{(d,w)}$ 的点传递性，我们只需考虑其包含点 u^0 的最大团即可得 $Q_n^{(d,w)}$ 的团数。求 $Q_n^{(2,w)}$ 与 $Q_n^{(3,w)}$ 最大团的方法完全一样，下面我们只给出 $Q_n^{(2,w)}$ 最大团的构造过程。

当 $d=2$ 时，假设 T 为 $Q_n^{(2,w)}$ 中包含点 u^0 的团，则任取 $u\in T$，$d_H\left(u,u^0\right)=2\left(w-\left|u^0\cap u\right|\right)\le 2$，故 $\left(T-\left\{u^0\right\}\right)\subseteq D_2^w$。令 $D_2^{(w,i)}=\left\{u\in D_2^w\mid u_i=0\right\}(1\le i\le w)$，$I=\left\{i:\left(T-\left\{u^0\right\}\right)\cap D_2^{(w,i)}\neq\varnothing\right\}$。

1) 若 $|I|\ge 2$，则为满足 $\forall u,v\in T$，$d_H(u,v)\le 2$，任取 $i\in I$，$\left|\left(T-\{u^0\}\right)\cap D_2^{(w,i)}\right|=1$。此时，$T$ 最大可取为 $T=\bigcup_{i=1}^{w}D_2^{(w,i,j)}\left(j\in[w+1,n]\right)$，其中 $D_2^{(w,i,j)}=\left\{u\in D_2^{(w,i)}\mid u_j=1\right\}\left(j\in[w+1,n]\right)$，而且 $|T|=w+1$。

2) 若 $|I|\le 1$，由于对于任意的 $u,v\in D_2^{(w,i)}$，$d_H(u,v)=2$，故此时 T 最大可取为 $T=\{u^0\}\cup D_2^{(w,i)}\left(i\in[1,w]\right)$，而且 $|T|=n-w+1$。

综上，$\omega\left(Q_n^{(2,w)}\right)=\begin{cases}w+1\left(w\ge\lceil n/2\rceil\right)\\ n-w+1\left(w<\lceil n/2\rceil\right)\end{cases}$。

推论 3.4：当 $2\le d\le 3$ 时，$Q_n^{(d,w)}$ 的独立数 $\alpha\left(Q_n^{(d,w)}\right)\le\begin{cases}\dfrac{\binom{n}{w}}{w+1}\left(w\ge\lceil n/2\rceil\right)\\ \dfrac{\binom{n}{w}}{n-w+1}\left(w<\lceil n/2\rceil\right)\end{cases}$，即当 $3\le d\le 4$ 时，

$$A(n,d,w)\le\begin{cases}\dfrac{\binom{n}{w}}{w+1}\left(w\ge\lceil n/2\rceil\right)\\ \dfrac{\binom{n}{w}}{n-w+1}\left(w<\lceil n/2\rceil\right)\end{cases}。$$

证明：结合定理 2.6，定理 3.2 及定理 3.3 很容易得证。

4. 结语

本文将 $A(n,d,w)$ 看作是 n 维超立方体 $d-1$ 次幂图中由所有重量为 w 的点导出子图 $Q_n^{(d,w)}$ 的最大独立集的大小，通过对 $Q_n^{(d,w)}$ 结构特点的分析讨论，我们得到了一些 $Q_n^{(d,w)}$ 的基本性质及 $A(n,d,w)$ 的一个上界：$Q_n^{(d,w)}$ 是 $\sum_{i=1}^{\lfloor d/2\rfloor}\binom{w}{w-i}\binom{n-w}{i}$-正则图；$Q_n^{(d,w)}$ 是点传递图；对于 $2\le d\le 3$，若 $w\ge\lceil n/2\rceil$，则 $\omega\left(Q_n^{(d,w)}\right)=w+1$；若 $w<\lceil n/2\rceil$，则 $\omega\left(Q_n^{(d,w)}\right)=w+1$；对于 $3\le d\le 4$，有 $A(n,d,w)=\alpha\left(Q_n^{(d-1,w)}\right)\le\dfrac{\binom{n}{w}}{w+1}$ 或 $\dfrac{\binom{n}{w}}{n-w+1}$。

本文我们只是对几个特殊的 n,d,w 的值讨论了 $Q_n^{(d,w)}$ 的结构特点、性质特征及对应的 $A(n,d,w)$ 的上界。对于一般的 $A(n,d,w)$ 的值，后续我们考虑可以从下面几个方面进行研究：

1) 对于一般的 n,d,w 的值 $Q_n^{(d,w)}$ 的最大团及分布特点是怎么样的？其最大独立集是怎么样的？从而我们可以得到 $A(n,d,w)$ 的一般的上界，甚至其确切的值。

2) $Q_n^{(d,w)}$ 的色数 $\chi\left(Q_n^{(d,w)}\right)$ 等于什么？因为图的独立数大于等于点数与色数的比值，从而我们可以得到 $A(n,d,w)$ 的一个下界。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11671296)。

参考文献

[1] Hamming, R.W. (1950) Error Detecting and Error Correcting Codes. *Bell System Technical Journal*, **29**, 147-160. https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1950.tb00463.x

[2] MacWilliams, F.J. and Sloane, N.J.A. (1977) The Theory of Error-Correcting Codes. North-Holland Mathematical Library, Amsterdam-New York-Oxford, Vol. 16, 370-762.

[3] Johnson, S. (1962) A New Upper Bound for Error-Correcting Codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, **8**, 203-207. https://doi.org/10.1109/TIT.1962.1057714

[4] Johnson, S. (1963) Improved Asymptotic Bounds for Error-Correcting Codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, **9**, 198-205. https://doi.org/10.1109/TIT.1963.1057841

[5] Johnson, S.M. (1971) On Upper Bounds for Unrestricted Binary-Error-Correcting Codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, **17**, 466-478. https://doi.org/10.1109/TIT.1971.1054656

[6] Best, M.R., Brouwer, A.E., Macwilliams, F.J., *et al*. (1978) Bounds for Binary Codes of Length less than 25. *IEEE Transactions on Information Theory*, **24**, 81-93. https://doi.org/10.1109/TIT.1978.1055827

[7] Graham, R.L. and Sloane, N.J.A. (1980) Lower Bounds for Constant Weight Codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, **26**, 37-43. https://doi.org/10.1109/TIT.1980.1056141

[8] Conway, J.H. and Sloane, N.J.A. (1988) Sphere Packings, Lattices and Groups. Springer-Verlag, New York, NY. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2016-7

[9] Brouwer, A.E., Shearer, J.B., Sloane, N.J.A., *et al.* (1990) A New Table of Constant Weight Codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, **36**, 1334-1380. https://doi.org/10.1109/18.59932

[10] Agrell, E. and Vardy, A. (2000) Upper Bounds for Constant-Weight Codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, **46**, 2373-2395. https://doi.org/10.1109/18.887851

[11] Schrijver, A. (2005) New Code Upper Bounds from the Terwilliger Algebra and Semidefinite Programming. *IEEE Transactions on Information Theory*, **51**, 2859-2866. https://doi.org/10.1109/TIT.2005.851748

[12] Chee, Y.M., Xing, C. and Yeo, S.L. (2010) New Constant-Weight Codes from Propagation Rules. *IEEE Transactions on Information Theory*, **56**, 1596-1599. https://doi.org/10.1109/TIT.2010.2040964

[13] Kang, B.G., Kim, H.K. and Toan, P.Y. (2012) Delsarte's Linear Programming Bound for Constant-Weight Codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, **58**, 5956-5962. https://doi.org/10.1109/TIT.2012.2201445

[14] Godsil, C. and Royle, G. (2001) Algebraic Graph Theory. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0163-9