Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(4), 1301-1306
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.104139

一类分数阶调和映射迭代算法的收敛性

李东雪

天津大学数学学院，天津
Email: lidongxue@tju.edu.cn

收稿日期：2021年3月27日；录用日期：2021年4月15日；发布日期：2021年4月29日

摘 要

基于能量泛函的极小值问题，本文给出了分数阶调和映射方程的一类迭代算法，我们证明了该算法的收敛性。

关键词

分数阶调和映射，迭代算法，收敛性

Convergence of Iterative Algorithm for a Class of Fractional Harmonic Maps

Dongxue Li

School of Mathematics, Tianjin University, Tianjin
Email: lidongxue@tju.edu.cn

Received: Mar. 27th, 2021; accepted: Apr. 15th, 2021; published: Apr. 29th, 2021

Abstract

This paper proposes an iterative algorithm for fractional harmonic maps and its convergence is proved.

Keywords

Fractional Harmonic Maps, Iterative Algorithm, Convergence

文章引用: 李东雪. 一类分数阶调和映射迭代算法的收敛性[J]. 应用数学进展, 2021, 10(4): 1301-1306.
DOI: 10.12677/aam.2021.104139

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

设Ω是$\mathbb{R}^N$中的光滑有界区域，$N=1,2,3$，$\mathbb{S}^2$是$\mathbb{R}^3$中的标准单位球，$0<s<1$。定义映射$u:\Omega\to\mathbb{S}^2$的非局部能量为

$$E_s(u)=\frac{1}{2}\iint_{\Omega\times\Omega}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{1}$$

我们称(1)的临界点为s-阶调和映射。令$\partial\Omega$表示Ω的边界，E_s'表示E_s在函数空间

$$H^s(\Omega,\mathbb{R}^3):=\left\{u:\Omega\to\mathbb{R}^3 \mid E_s(u)+\int_\Omega|u|^2\,\mathrm{d}x<\infty\right\}$$

中的 Frechet 导数，即：对任意的$u\in H^s(\Omega,\mathbb{S}^2)$和$v\in H_0^s(\Omega,\mathbb{R}^3)$，

$$E_s'(u)[v]=\iint_{\Omega\times\Omega}\frac{(u(x)-u(y))\cdot(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

这里，

$$H^s(\Omega,\mathbb{S}^2)=\left\{u \mid u\in H^s(\Omega,\mathbb{R}^3),|u|=1\,a.e.\,x\in\Omega\right\}$$

且

$$H_0^s(\Omega,\mathbb{R}^3)=\left\{u \mid u\in H^s(\Omega,\mathbb{R}^3),u|_{\partial\Omega}=\vec{0}\right\}.$$

于是具有固定边值条件的s-阶调和映射方程为：

$$\begin{cases} E_s'(u)(x)\perp \mathbf{T}_{u(x)}\mathbb{S}^2, & \forall x\in\Omega, \\ u(x)=\mathbf{n}_0(x), & \forall x\in\partial\Omega, \\ |u|=1, & \mathbf{a.e.}\,\forall x\in\bar{\Omega}. \end{cases} \tag{2}$$

这里$\mathbf{n}_0(x)$是一个固定的函数且对几乎处处的$x\in\partial\Omega$，$|\mathbf{n}_0|=1$。

设$u\in\dot{H}^s(\Omega,\mathcal{N})$，其中，$\mathcal{N}\subset\mathbb{R}^m$是无边的$k$-维光滑子流形。如果函数$u$是泛函$E_s(u)$在扰动$t\mapsto\Pi_{\mathcal{N}}(u+t\varphi)$下的临界点，则称$u$为$s$-阶调和映射。其中，$\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$，$\Pi_{\mathcal{N}}:\mathbb{R}^m\to\mathcal{N}$是$\mathbb{R}^m$到子流形$\mathcal{N}$上的投影映射。当$s=1$时，这是经典调和映射的概念，文献[1] [2]和[3]对调和映射的当前研究情况进行了系统的总结。近些年以来，人们对s为非整数的情形非常感兴趣，比如当靶流形$\mathcal{N}$为标准黎曼球面时，文献[4]利用三交换子估计方法，证明了 1/2-阶调和映射的光滑性；文献[5]得到了$n/2$-阶调和映射的光滑性；文献[6]分析了 1/2-阶调和映射的紧致性和爆破性质；文献[7]证明了$n/2$-阶调和映射的 Hölder 连续性。当靶流形$\mathcal{N}$为一般的紧致黎曼流形时，文献[8]得到了 1/2-阶调和映射的 Hölder 连续性。文献[9]证明了靶流形分别为球和黎曼齐次流形时积分微分调和映射热流整体弱解的存在性。Alouges 在文献[10]给出了一类经典调和映射能量极小问题的迭代算法，文献[11]讨论调和映射逼近格式的稳定性和收敛性，介绍了一种基于 Alouges 的迭代算法的有限元离散化方法，并证明了它仅对锐角型三角剖分是稳定和收敛的，并提出了一个后验准则，使我们能够得到一般三角剖分上调和映射弱收敛的充分条件和自适应网格细化的充分条件，数值模拟实验进一步表明，自适应策略可以自动细化典型奇异点附近的三角剖分，从而提高其运算效率。

在本文中，基于能量泛函(1)极小化问题，我们对 s-阶调和映射(2)提出一类迭代算法，将经典的 Alouges 算法[10]推广到分数阶方程的情形(2)。具体地，我们有：

算法 1 设 $u_0 \in H^s_{n_0}\left(\Omega,\mathbb{S}^2\right)$，对 $n=0,1,\cdots$，直至收敛，第一步，定义 $K_u = \{ w \in H^s_0\left(\Omega,\mathbb{R}^3\right)$ 使得 $w(x)\cdot u(x)=0$ 几乎处处成立}，求解极小值问题

$$\min_{w\in K_u}\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left|u_n(x)-w(x)-u_n(y)+w(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{3}$$

设 $w_n = w(u_n)$ 为此问题的解。第二步，令 $u_{n+1} := \dfrac{u_n - w_n}{|u_n - w_n|}$。

在算法 1 中，$H^s_{n_0}\left(\Omega,\mathbb{S}^2\right) := \left\{ u \mid u \in H^s\left(\Omega,\mathbb{S}^2\right), u(x) = \mathbf{n}_0\ a.e., x \in \partial\Omega \right\}$。于是我们有以下定理：

定理 1 算法 1 中的序列 $\{u_n\}_{n=0}^\infty$ 在 $H^s\left(\Omega,\mathbb{R}^3\right)$ 中弱收敛到 s-阶调和映射 $u_\infty \in H^s_{n_0}\left(\Omega,\mathbb{S}^2\right)$。进一步，$\{u_n\}_{n=0}^\infty$ 在 $H^s_0\left(\Omega,\mathbb{R}^3\right)$ 中强收敛到 $\vec{0}$。

注记 1 在(2)两边同时取内积可知，$u \in H^s_{n_0}\left(\Omega,\mathbb{S}^2\right)$ 在弱解意义下是 s-阶调和映射当且仅当

$$0 = \int_\Omega\int_\Omega \frac{\left(u(x)-u(y)\right)\cdot\left(\psi(x)-\psi(y)\right)}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad \forall \psi \in K_u.$$

2. 定理 1 的证明

我们将证明分成以下几步：

引理 2.1 我们有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left|u_n(x)-u_n(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left|u_n(x)-w_n(x)-u_n(y)+w_n(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left|w_n(x)-w_n(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

证明：因为 w_n 是问题(3)的解，对任意 $\psi \in K_{u_n}$ 我们有

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left(u_n(x)-w(x)-u_n(y)+w(y)\right)\left(\psi(x)-\psi(y)\right)}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

取 $\psi = w_n$，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left|u_n(x)-u_n(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left|u_n(x)-w_n(x)-u_n(y)+w_n(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left|w_n(x)-w_n(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\quad+2\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left(u_n(x)-w(x)-u_n(y)+w(y)\right)\left(\psi(x)-\psi(y)\right)}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left|u_n(x)-w_n(x)-u_n(y)+w_n(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left|w_n(x)-w_n(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

引理 2.2 我们有

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left|u_{n+1}(x)-u_{n+1}(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \int_\Omega\int_\Omega \frac{\left|u_n(x)-w_n(x)-u_n(y)+w_n(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明：因为 $u_n(x)\cdot w_n(x)=0$，我们有 $\left|u_n(x)-w_n(x)\right|^2=1+\left|w_n\right|^2\ge 1$，所以

$$\begin{aligned}\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left|u_{n+1}(x)-u_{n+1}(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_\Omega\int_\Omega \frac{\left|\frac{u_n-w_n}{|u_n-w_n|}(x)-\frac{u_n-w_n}{|u_n-w_n|}(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\int_\Omega\int_\Omega \frac{2-2\frac{\left(u_n(x)-w_n(x)\right)\cdot\left(u_n(y)-w_n(y)\right)}{\left|u_n(x)-w_n(x)\right|\left|u_n(y)-w_n(y)\right|}}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\le \int_\Omega\int_\Omega \frac{2\left|u_n(x)-w_n(x)\right|\left|u_n(y)-w_n(y)\right|-2\left(u_n(x)-w_n(x)\right)\cdot\left(u_n(y)-w_n(y)\right)}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\le \int_\Omega\int_\Omega \frac{\left|u_n(x)-w_n(x)-u_n(y)+w_n(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

引理 2.3 w_n 在空间 $H^s\left(\Omega,\mathbb{R}^3\right)$ 中强收敛至 $\vec{0}$。

证明：根据引理 2.1 和引理 2.2，我们有

$$\begin{aligned}\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left|u_{n+1}(x)-u_{n+1}(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &\le \int_\Omega\int_\Omega \frac{\left|u_n(x)-w_n(x)-u_n(y)+w_n(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left|u_n(x)-u_n(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left|w_n(x)-w_n(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

从而，我们有

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left|w_n(x)-w_n(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \int_\Omega\int_\Omega \frac{\left|u_n(x)-u_n(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left|u_{n+1}(x)-u_{n+1}(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

对这个不等式求和，设 N 为任意正整数，于是我们有

$$\sum_{n=0}^{N}\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left|w_n(x)-w_n(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \int_\Omega\int_\Omega \frac{\left|u_0(x)-u_0(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

所以级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left|w_n(x)-w_n(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛。

再根据 Sobolev 嵌入定理，w_n 在空间 $H^s\left(\Omega,\mathbb{R}^3\right)$ 中强收敛至 $\vec{0}$。

引理 2.4 u_n 在空间 $H^s\left(\Omega,\mathbb{R}^3\right)$ 中弱收敛到 $u_\infty\in H^s_{n_0}\left(\Omega,\mathbb{S}^2\right)$ 且 u_∞ 是 s-阶调和映射。

证明：根据引理 2.1 可知，u_n 在空间 $H^s\left(\Omega,\mathbb{R}^3\right)$ 中有界，从而存在 $u_\infty\in H^s\left(\Omega,\mathbb{R}^3\right)$ 使得 u_n 在空间 $H^s\left(\Omega,\mathbb{R}^3\right)$ 中弱收敛到 u_∞。因为 $u_n\in H^s_{n_0}\left(\Omega,\mathbb{S}^2\right)$ 且 $H^s_{n_0}\left(\Omega,\mathbb{S}^2\right)$ 在弱拓扑意义下是 $H^s_{n_0}\left(\Omega,\mathbb{R}^3\right)$ 的闭子集，从而 $u_\infty\in H^s_{n_0}\left(\Omega,\mathbb{S}^2\right)$。

下面我们证明 u_∞ 是 s-阶调和映射。注意到 w_n 满足的欧拉－拉格朗日方程为

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left(u_n(x)-w_n(x)-u_n(y)+w(y)\right)\left(\Psi(x)-\Psi(y)\right)}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\quad \Psi\in K_{u_n}.$$

取 $\Psi=\phi\times u_n$，这里 $\phi\in C_0^\infty\left(\Omega,\mathbb{R}^3\right)$，于是我们有

$$\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left(u_n(x)-w_n(x)-u_n(y)+w_n(y)\right)\left(\phi(x)\times u_n(x)-\phi(y)\times u_n(y)\right)}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

进一步，我们有

$$\begin{aligned}
0&=\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left(u_n(x)-w_n(x)-u_n(y)+w_n(y)\right)\left(\phi(x)\times u_n(x)-\phi(y)\times u_n(y)\right)}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left(u_n(x)-w_n(x)-u_n(y)+w_n(y)\right)\left(\phi(x)-\phi(y)\right)\times u_n(x)}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\quad+\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left(u_n(x)-w_n(x)-u_n(y)+w_n(y)\right)\left[\phi(y)\times\left(u_n(x)-u_n(y)\right)\right]}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left(u_n(x)-u_n(y)\right)\left(\phi(x)-\phi(y)\right)\times u_n(x)}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\quad-\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left(w_n(x)-w_n(y)\right)\left(\phi(x)-\phi(y)\right)\times u_n(x)}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\qquad-\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left(w_n(x)-w_n(y)\right)\left[\phi(y)\times\left(u_n(x)-u_n(y)\right)\right]}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\qquad=\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left(\phi(x)-\phi(y)\right)\cdot\left[u_n(x)\times\left(u_n(x)-u_n(y)\right)\right]}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\qquad-\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left(\phi(x)-\phi(y)\right)\cdot\left[u_n(x)\times\left(w_n(x)-w_n(y)\right)\right]}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\qquad-\int_\Omega\int_\Omega \frac{\phi(y)\cdot\left[\left(u_n(x)-u_n(y)\right)\times\left(w_n(x)-w_n(y)\right)\right]}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

取极限我们得到

$$0=\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left(\phi(x)-\phi(y)\right)\cdot\left[u_\infty(x)\times\left(u_\infty(x)-u_\infty(y)\right)\right]}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

这等价于

$$0=\int_\Omega\int_\Omega \frac{\left(u_\infty(x)-u_\infty(y)\right)\cdot\left[u_\infty(x)\times\phi(x)-u_\infty(y)\times\phi(y)\right]}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

最后，令 $\phi=u_\infty\times\psi$，$\psi\in C_0^\infty\left(\Omega,\mathbb{R}^3\right)$ 且 $\psi\in K_{u_\infty}$，于是根据向量恒等式：对于任意的 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{R}^3$，$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\langle\mathbf{a},\mathbf{c}\rangle\mathbf{b}-\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle\mathbf{c}$，我们有

$$\begin{aligned}
u_\infty(x)\times\phi(x)&=u_\infty(x)\times\left(u_\infty(x)\times\psi(x)\right)\\
&=\left(u_\infty(x)\cdot\psi(x)\right)u_\infty(x)-\left(u_\infty(x)\cdot u_\infty(x)\right)\psi(x)\\
&=\psi(x),
\end{aligned}$$

所以

$$0=\int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{\left(u_{\infty}(x)-u_{\infty}(y)\right)\cdot\left(\psi(x)-\psi(y)\right)}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因此，根据注记 1 可知u_{∞}在弱解意义下是 s-阶调和映射。

综上所述，定理 1 得证。

注记 2 设 $w(u)$ 是极小值问题(3)的解，则它是唯一的。事实上，设 w_1 和 w_2 都是解，则

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{\left(u(x)-w_1(x)-u(y)+w_1(y)\right)\cdot\left(w_1(x)-w_2(x)-w_1(y)+w_2(y)\right)}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

和

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{\left(u(x)-w_2(x)-u(y)+w_2(y)\right)\cdot\left(w_1(x)-w_2(x)-w_1(y)+w_2(y)\right)}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

成立，于是我们有 $\int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{\left|w_1(x)-w_2(x)-w_1(y)+w_2(y)\right|^2}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$。这意味着 $w_1=w_2$。

注记 3 设 $w(u)$ 是极小值问题(3)的解，则 u 是 s-阶调和映射当且仅当 $w(u)=0$。事实上，若 $w(u)=0$，我们有

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega}\frac{\left(u(x)-u(y)\right)\cdot\left(\Psi(x)-\Psi(y)\right)}{|x-y|^{n+2s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\quad \Psi\in K_u.$$

从而 u 是 s-阶调和映射。上述过程可逆，从而充分条件成立。

参考文献

[1] Helein, F. (1990) Regularite des applications faiblement harmoniques entre une surface et une sphere. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences—Series I—Mathematics*, **311**, 519-524.

[2] Lin, F. and Wang, C. (2008) The Analysis of Harmonic Maps and Their Heat Flows. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, HJ. https://doi.org/10.1142/6679

[3] Riviere, T. (2007) Conservation Laws for Conformally Invariant Variational Problems. *Inventiones Mathematicae*, **168**, 1-22. https://doi.org/10.1007/s00222-006-0023-0

[4] Da Lio, F. and Riviere, T. (2011) Three-Term Commutator Estimates and the Regularity of 1/2-Harmonic Maps into Spheres. *Analysis & PDE*, **4**, 149-190. https://doi.org/10.2140/apde.2011.4.149

[5] Da Lio, F. (2013) Fractional Harmonic Maps into Manifolds in Odd Dimension n > 1. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **48**, 421-445. https://doi.org/10.1007/s00526-012-0556-6

[6] Da Lio, F. (2015) Compactness and Bubble Analysis for 1/2-Harmonic Maps. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, **32**, 201-224. https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2013.11.003

[7] Schikorra, A. (2012) Regularity of n/2-Harmonic Maps into Spheres. *Journal of Differential Equations*, **252**, 1862-1911. https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.08.021

[8] Da Lio, F. and Riviere, T. (2011) Sub-Criticality of Non-Local Schrodinger Systems with Antisymmetric Potentials and Applications to Half-Harmonic Maps. *Advances in Mathematics*, **227**, 1300-1348. https://doi.org/10.1016/j.aim.2011.03.011

[9] Schikorra, A., Sire, Y. and Wang, C. (2017) Weak Solutions of Geometric Flows Associated to Integro-Differential Harmonic Maps. *Manuscripta Mathematica*, **153**, 389-402. https://doi.org/10.1007/s00229-016-0899-y

[10] Alouges, F. (1997) A New Algorithm for Computing Liquid Crystal Stable Configurations: The Harmonic Mapping Case. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **34**, 1708-1726. https://doi.org/10.1137/S0036142994264249

[11] Bartels, S. (2005) Stability and Convergence of Finite-Element Approximation Schemes for Harmonic Maps. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **43**, 220-238. https://doi.org/10.1137/040606594