

# (2 + 1)维Hirota-Satsuma-Ito方程的呼吸波与不同非线性波之间的态转换

张丹丹

华北电力大学数理学院, 北京  
Email: 1442523091@qq.com

收稿日期: 2021年3月27日; 录用日期: 2021年4月15日; 发布日期: 2021年4月30日

## 摘要

本文基于Hirota双线性方法, 研究了(2 + 1)维Hirota-Satsuma-Ito方程。在特定情况下, 呼吸波可以转化为其他类型的非线性波, 包括W型、M型、振荡W型、振荡M型和准周期型波, 并分析了这些非线性波的动力学特性。基于特征线分析, 得到了呼吸波与其他非线性波之间的转换条件。研究结果丰富了(2 + 1)维非线性波的动力学特性。

## 关键词

态转换, (2 + 1)维Hirota-Satsuma-Ito方程, 非线性波, 双线性方法

# State Transformations between the Breather Wave and Different Nonlinear Waves for the (2 + 1)-Dimensional Hirota-Satsuma-Ito Equation

Dandan Zhang

School of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Beijing  
Email: 1442523091@qq.com

Received: Mar. 27<sup>th</sup>, 2021; accepted: Apr. 15<sup>th</sup>, 2021; published: Apr. 30<sup>th</sup>, 2021

## Abstract

In this paper, the (2 + 1)-dimensional Hirota-Satsuma-Ito equation is studied based on the Hirota bilinear method. Under certain circumstances, the breather wave can be transformed into other

types of nonlinear waves, including W-type, M-type, oscillating-W-type, oscillating-M-type and quasi-periodic-type waves, and the dynamic characteristics of these nonlinear waves are analyzed. Based on the characteristic line analysis, the conversion condition between the breather wave and other nonlinear waves is obtained. The results enrich the dynamic characteristics of the (2 + 1)-dimensional nonlinear waves.

## Keywords

State Transformation, (2 + 1)-Dimensional Hirota-Satsuma-Ito Equation, Nonlinear Waves, Hirota Bilinear Method

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

非线性演化方程的精确解在非线形科学领域，特别是在光学、流体、玻色-爱因斯坦凝聚体和等离子体等领域具有重要的意义[1]-[6]，它可以为我们提供更多的物理信息，加深人们对一些非线性波动现象的理解，从而得到广泛的应用。怪波[7]、孤立波[8]和 lump 波[9] [10]等都属于非线性波。

考虑(2 + 1)维 Hirota-Satsuma-Ito (HSI)方程[11]

$$u_x \left( 3 \int u_t dx + \gamma \right) + 3uu_t + u_{xxt} + \int u_{yt} dx = 0, \quad (1)$$

其中  $x, y$  表示空间坐标,  $t$  表示时间,  $u$  是关于  $x, y, t$  的函数,  $\gamma$  是任意常数。目前一些学者已经对 HSI 方程进行了研究[11] [12] [13], 而对于 HSI 方程的态转换在很大程度上仍未被探索。在本文中, 我们利用双线性方法求得 HSI 方程的呼吸波解, 进而通过分析特征线的性质找到呼吸波发生态转换的条件, 并研究这些转换波的动力学行为。

本文的结构安排如下: 第 2 部分给出了 HSI 方程的呼吸波解以及呼吸波发生态转换的条件。第 3 部分介绍了三类转换波的类型。第 4 部分给出了本文的一些结论。

## 2. 呼吸波解和态转换条件

通过变量变换[14]

$$u = 2 \left[ \ln f(x, y, t) \right]_{xx}, \quad (2)$$

可以得到方程(1)的双线性形式, 即

$$\left( D_t D_x^3 + \gamma D_x^2 + D_t D_y \right) f \cdot f = 0, \quad (3)$$

其中双线性算子  $D$  的定义如下[15]:

$$D_x^p D_y^q f \cdot g = \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^p \left( \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y'} \right)^q f(x, y) \cdot g(x', y') \Big|_{(x, y) = (x', y')}. \quad (4)$$

首先利用二阶孤子解来求呼吸波解, 下面给出  $f_2$ :

$$f_2 = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + e^{\theta_1 + \theta_2} d_{12}. \quad (5)$$

设  $\theta_i = k_i x + l_i y + \omega_i t + \delta_i, (i=1,2)$ , 其中

$$\omega_i = -\frac{\gamma k_i^2}{k_i^3 + l_i}, (i=1,2), d_{12} = -\frac{(\omega_1 - \omega_2)(k_1 - k_2)^3 + (\omega_1 - \omega_2)(l_1 - l_2) + \gamma(k_1 - k_2)^2}{(\omega_1 + \omega_2)(k_1 + k_2)^3 + (\omega_1 + \omega_2)(l_1 + l_2) + \gamma(k_1 + k_2)^2}, \quad (6)$$

$k_i, l_i, \delta_i (i=1,2)$  是一些自由参量, 我们对这些参量进行复数化, 即:

$$k_1 = a_1 + ib_1 = k_2^*, l_1 = c_1 + id_1 = l_2^*, \delta_1 = \ln \frac{\lambda_1}{2} + \beta_1 + i\eta_1 = \delta_2^*, \quad (7)$$

\*代表共轭,  $a_1, b_1, c_1, d_1, \lambda_1 (>0), \beta_1, \eta_1$  都是实常数. 将式(6)和(7)代入到式(5)中, 可以得到

$$f_2 \sim \lambda_1 \cos(\Lambda_1) + 2\sqrt{\lambda_2} \cosh\left(\xi_1 + \frac{1}{2} \ln \lambda_2\right), \quad (8)$$

其中

$$\xi_1 = a_1 x + c_1 y + \omega_{1R} t + \beta_1, \Lambda_1 = b_1 x + d_1 y + \omega_{1I} t + \eta_1, \lambda_2 = \frac{1}{4} \lambda_1^2 d_{12}, \quad (9)$$

$$\omega_{1R} = -\frac{\gamma(a_1^5 + 2a_1^3 b_1^2 + a_1^2 c_1 - b_1^2 c_1 + a_1(b_1^4 + 2b_1 d_1))}{(a_1^3 - 3a_1 b_1^2 + c_1)^2 + (3a_1^2 b_1 - b_1^3 + d_1)^2}, \quad (10)$$

$$\omega_{1I} = \frac{\gamma(a_1^4 b_1 + b_1^5 - 2a_1 b_1 c_1 - b_1^2 d_1 + a_1^2(2b_1^3 + d_1))}{(a_1^3 - 3a_1 b_1^2 + c_1)^2 + (3a_1^2 b_1 - b_1^3 + d_1)^2}.$$

把式(8)代入到式(2)里, 就得到了 HSI 方程的一阶呼吸波解, 表示为:

$$u[x, y, t] = \frac{8a_1 b_1 \lambda_1 \sqrt{\lambda_2} \sin(\Lambda_1) \sinh\left(\xi_1 + \frac{1}{2} \ln \lambda_2\right) + 8a_1^2 \lambda_2 - 2b_1^2 \lambda_1^2}{\left[\lambda_1 \cos(\Lambda_1) + 2\sqrt{\lambda_2} \cosh\left(\xi_1 + \frac{1}{2} \ln \lambda_2\right)\right]^2} + \frac{4(a_1^2 - b_1^2) \lambda_1 \sqrt{\lambda_2} \cos(\Lambda_1) \cosh\left(\xi_1 + \frac{1}{2} \ln \lambda_2\right)}{\left[\lambda_1 \cos(\Lambda_1) + 2\sqrt{\lambda_2} \cosh\left(\xi_1 + \frac{1}{2} \ln \lambda_2\right)\right]^2}. \quad (11)$$

呼吸波解的特征线方程可以求得如下:

$$L_1 = a_1 x + c_1 y + \omega_{1R} t + \beta_1 + \frac{1}{2} \ln \lambda_2 = 0, \quad (12)$$

$$L_2 = b_1 x + d_1 y + \omega_{1I} t + \eta_1 = 0.$$

通过分析特征线的性质, 可以发现当特征线方程满足以下条件时,

$$a_1 d_1 - b_1 c_1 = 0, \quad (13)$$

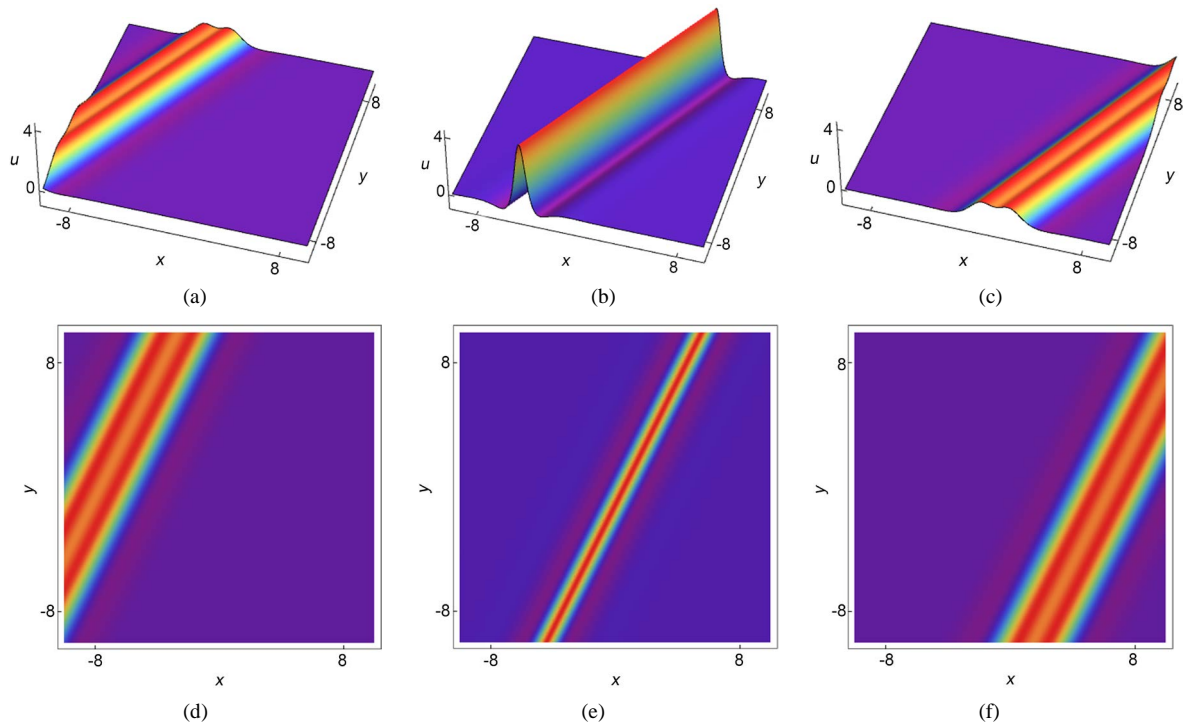
即两条特征线平行时, 呼吸波就发生了态转换. 下面我们详细分析这些转换波的动力学行为.

### 3. 转换波的类型

#### 3.1. W 型、M 型

根据转换条件(13), 我们来研究转换非线性波的动力学特征, 并且在计算模拟过程中发现波数  $a_1$  和  $b_1$  对转换波的类型有很大的影响. 首先考虑一种情况,  $a_1 = b_1 = 1, c_1 = d_1 = -0.5$ . 这时呼吸波在转换条件下

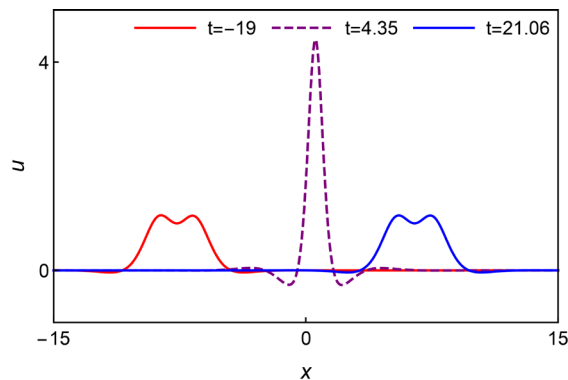
就变成了 W 型和 M 型波, 如图 1 所示。从图中可以看出, 随着时间的推移, 转换波的波形从 M 型变成了 W 型, 紧接着又从 W 型变回了 M 型。经过分析这组转换波随时间变化的动态图, 发现在这组参数下, 转换波的形状在 M 型和 W 型之间交替出现。通过观察这三个时刻的密度图, 可以清晰的看到, 随着时间的推移, 除了转换波的形状发生改变外, 它的位置也发生了变化, 但是波在运动过程中斜率没发生变化, 同时可以观察到 M 型波的宽度大于 W 型波。



**Figure 1.** Converted waves at different times: (a)  $t = -19$ ; (b)  $t = 4.35$ ; (c)  $t = 21.06$ ; (d), (e) and (f) are the corresponding density maps respectively

**图 1.** 不同时刻的转换波: (a)  $t = -19$ ; (b)  $t = 4.35$ ; (c)  $t = 21.06$ ; (d)、(e)和(f)分别是对应的密度图

通过图 2 可以直观地看出这三个时刻的转换波的横截面的形状, 其中两个 M 型波除了位置不同外, 它们的振幅和宽度都几乎相同, W 型波的振幅相对于这两个 M 型波来说更大一些, 而波的宽度更窄一些。M 型波有两个波峰和一个波谷, W 型波有一个波峰和两个波谷。

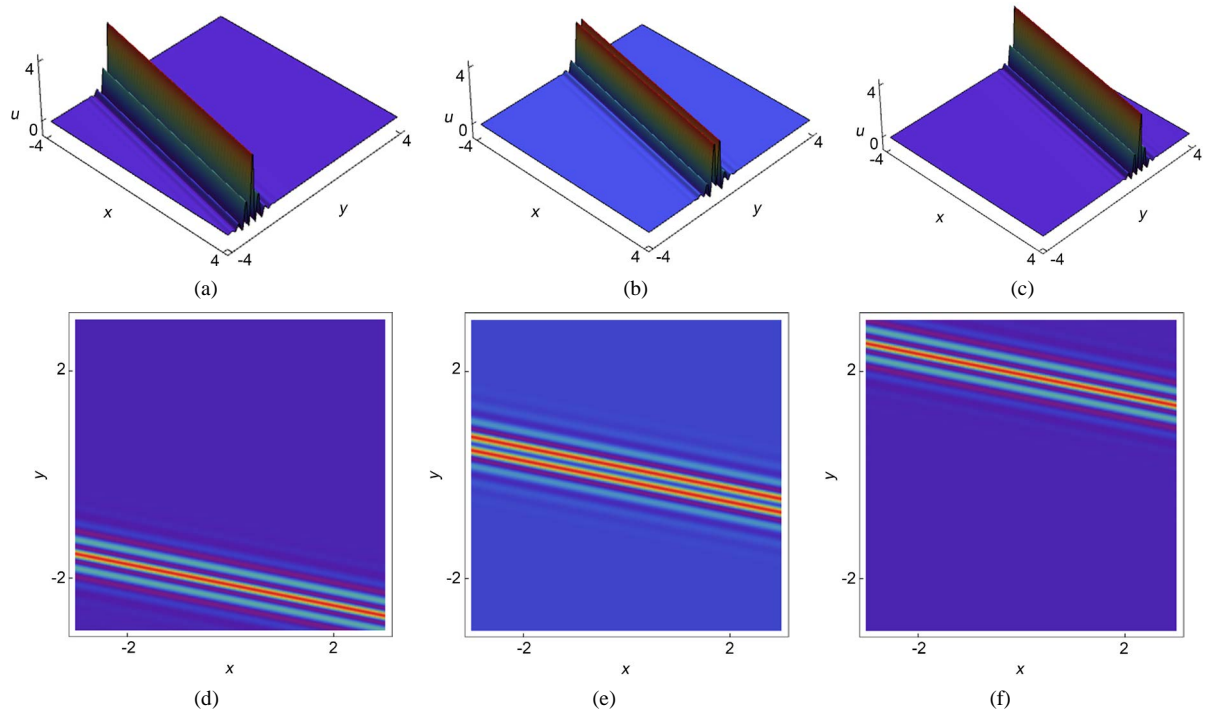


**Figure 2.** Sectional view of three moments

**图 2.** 三个时刻的截面图

### 3.2. 振荡 W 型、振荡 M 型

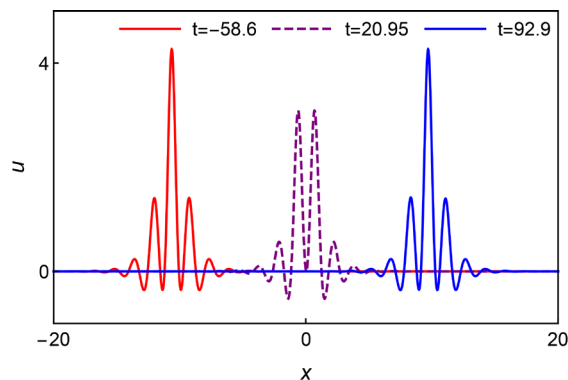
对比本章节中的第一部分 W 型波和 M 型波对应的参数, 现在保持  $a_1$  的值不变, 增大  $b_1$  的值, 取  $a_1 = 1, b_1 = 4, c_1 = 5, d_1 = 20$ , 此时的转换波就变成了带有振荡行为的 W 型和 M 型波, 即振荡 W 型波和振荡 M 型波, 如图 3 所示。与图 2 中的转换波相比, 此时的振荡 W 型和 M 型波的波峰和波谷都增加了许多。通过三维图和密度图都可以看出, 随着时间的变化, 振荡型波在平面上移动, 但是斜率保持不变。



**Figure 3.** Converted waves at different times: (a)  $t = -58.6$ ; (b)  $t = 20.95$ ; (c)  $t = 92.9$ ; (d), (e) and (f) are the corresponding density maps respectively

**图 3.** 不同时刻的转换波: (a)  $t = -58.6$ ; (b)  $t = 20.95$ ; (c)  $t = 92.9$ ; (d)、(e)和(f)分别是对应的密度图

通过图 4, 可以看到振荡型波的截面图的形状是在振荡 W 型和振荡 M 型之间交替出现的, 并且能明显看出波峰和波谷的数量比之前的 W 型和 M 型波增多了, 此时两个振荡 W 型波的振幅明显大于振荡 M 型波, 而且这两个振荡 W 型波的形状几乎完全相同, 只有位置发生了变化。

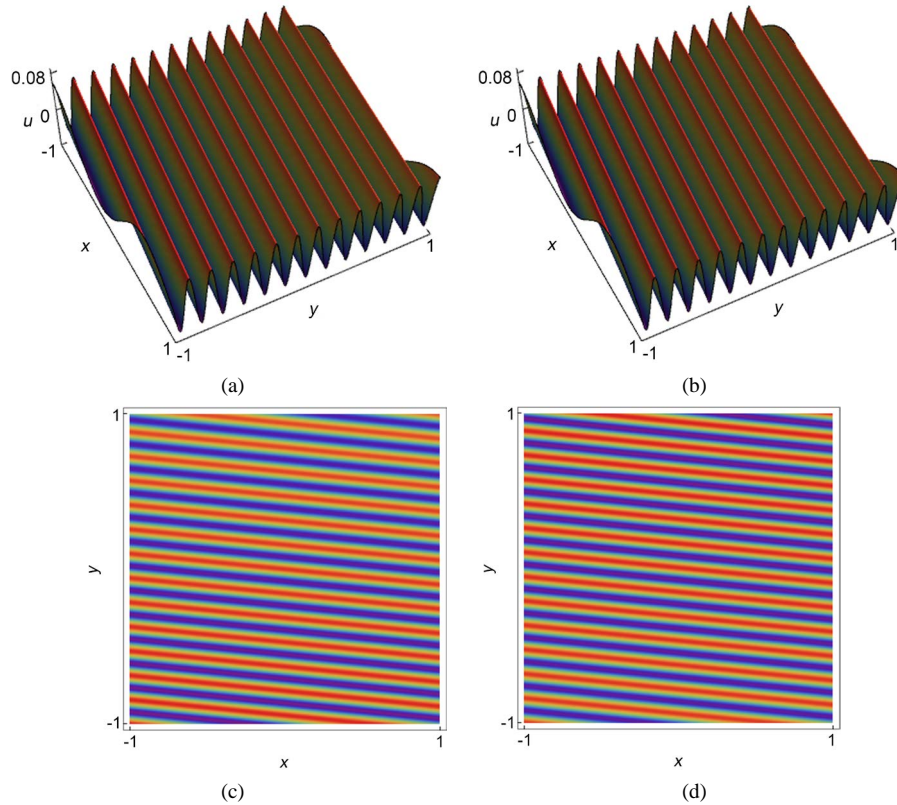


**Figure 4.** Sectional view of three moments

**图 4.** 三个时刻的截面图

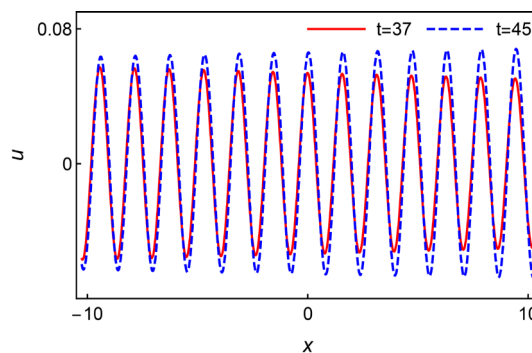
### 3.3. 准周期型

相反地，现在保持  $b_1$  的值不变，减小  $a_1$  的值，我们取  $a_1 = 0.01, b_1 = 4, c_1 = 0.1, d_1 = 40$ ，这时候转换波的振荡频率大大增加了，并表现出了一定的周期行为，我们把这种有周期行为的波叫做准周期波，图 5 给出了两个时刻的准周期波，它们可以看成是由一系列的 W 型或者 M 型波元构成的波。从三维图中几乎看不出两个波的区别，但是从密度图可以看出，在  $y = 1$  附近密度图上呈现出橘色，而第二个时刻的波在  $y = 1$  附近，密度图呈现红色，所以发现这两个时刻的波的高度是不同的，二者存在一定的区别。



**Figure 5.** Converted waves at different times: (a)  $t = 37$ ; (b)  $t = 45$ ; (c)  $t = 92.9$ ; (c) and (d) are the corresponding density maps respectively

**图 5.** 不同时刻的转换波：(a)  $t = 37$ ；(b)  $t = 45$ ；(c)和(d)分别是对应的密度图



**Figure 6.** Sectional view of two moments

**图 6.** 两个时刻的截面图

我们再来观察  $y = 0$  时的准周期波的截面图, 此时两个波的不同之处显而易见, 当  $t = 37$  时, 准周期波的振幅在  $x$  轴方向上从左到右逐渐减小, 而到了  $t = 45$  时刻, 准周期波的振幅从左到右逐渐增大。我们之所以称它们为准周期波, 是因为这些波只是表现出了一定的周期态, 但并不是完完全全的周期波。

#### 4. 结论

本文研究了  $2 + 1$  维 HSI 方程, 在特定的条件下, 可将 HSI 方程的呼吸波转换成其他类型的非线性波, 比如(振荡-)W 型和(振荡-)M 型波(见图 1~4), 准周期波(见图 5、图 6)。我们发现这些转换波在运动的过程中, 形状都发生了改变, 而斜率保持不变。此外, 波数  $a_1$  和  $b_1$  影响着转换波的类型, 固定  $a_1$  的值同时增大  $b_1$  的值, 转换波表现出一定的振荡行为, 固定  $b_1$  的值同时减小  $a_1$  的值, 转换波表现出一定的周期态, 从而发现  $b_1$  值的增大会使得转换波的频率增加。研究结果丰富了  $2 + 1$  维非线性波的动力学行为。

#### 参考文献

- [1] Solli, D.R., Ropers, C., Koonath, P. and Jalali, B. (2007) Optical Rogue Waves. *Nature*, **450**, 1054-1057. <https://doi.org/10.1038/nature06402>
- [2] Bludov, Y.V., Konotop, V.V. and Akhmediev, N. (2009) Matter Rogue Waves. *Physical Review A*, **80**, Article ID: 033610. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.80.033610>
- [3] Chabchoub, A., Hoffmann, N.P. and Akhmediev, N. (2011) Rogue Wave Observation in a Water Wave Tank. *Physical Review Letters*, **106**, Article ID: 204502. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.204502>
- [4] Kibler, B., Fatome, J., Finot, C., Millot, G., Dias, F., Genty, G., Akhmediev, N. and Dudley, J.M. (2010) The Peregrine Soliton in Nonlinear Fibre Optics. *Nature Physics*, **6**, 790-795. <https://doi.org/10.1038/nphys1740>
- [5] Bailung, H., Sharma, S.K. and Nakamura, Y. (2011) Observation of Peregrine Solitons in a Multi-Component Plasma with Negative Ions. *Physical Review Letters*, **107**, Article ID: 255005. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.255005>
- [6] Dai, C.Q., Wang, Y.Y. and Zhang, J.F. (2020) Managements of Scalar and Vector Rogue Waves in a Partially Nonlocal Nonlinear Medium with Linear and Harmonic Potentials. *Nonlinear Dynamics*, **102**, 379-391. <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05949-0>
- [7] Akhmediev, N., Soto-Crespo, J.M. and Ankiewicz, A. (2009) Extreme Waves That Appear from Nowhere: On the Nature of Rogue Waves. *Physics Letters A*, **373**, 2137-2145. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2009.04.023>
- [8] Agrawal, G.P. (2006) *Nonlinear Fiber Optics*. 4th Edition, Academic Press, San Diego. <https://doi.org/10.1016/B978-012369516-1/50011-X>
- [9] Ma, W.X. (2015) Lump Solutions to the Kadomtsev-Petviashvili Equation. *Physics Letters A*, **379**, 1975-1978. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2015.06.061>
- [10] Singh, N. and Stepanyants, Y. (2016) Obliquely Propagating Skew KP Lumps. *Wave Motion*, **64**, 92-102. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2016.03.005>
- [11] Zhou, Y., Manukure, S. and Ma, W.X. (2019) Lump and Lump-Soliton Solutions to the Hirota-Satsuma-Ito Equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **68**, 56-62. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.07.038>
- [12] Zhou, Y. and Manukure, S. (2019) Complexiton Solutions to the Hirota-Satsuma-Ito Equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **42**, 2344-2351. <https://doi.org/10.1002/mma.5512>
- [13] Liu, Y.Q., Wen, X.Y. and Wang, D.S. (2019) The N-Soliton Solution and Localized Wave Interaction Solutions of the (2+1)-Dimensional Generalized Hirota-Satsuma-Ito Equation. *Computers & Mathematics with Applications*, **77**, 947-966. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.10.035>
- [14] Liu, J.G., Zhu, W.H. and Li, Z. (2020) Multi-Wave, Breather Wave, and Interaction Solutions of the Hirota-Satsuma-Ito Equation. *European Physical Journal plus*, **135**, 20. <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-019-00049-4>
- [15] Hirota, R. (2004) *The Direct Method in Soliton Theory*. Cambridge University Press, Cambridge. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511543043>