

开放式基金投资组合风险度量

——基于Copula-ARMA-GARCH模型

孙志芳¹, 卢俊香^{1,2}

¹西安工程大学理学院, 陕西 西安

²西安理工大学经济与管理学院, 陕西 西安

Email: 1050029171@qq.com, jun-xianglu@163.com

收稿日期: 2021年3月15日; 录用日期: 2021年4月3日; 发布日期: 2021年4月20日

摘要

本文构建Copula-ARMA-GARCH模型, 研究开放式基金投资组合的风险度量问题。所选数据为景顺长城和泰达宏利的每日单位净值序列, 采用ARMA-GARCH-t模型拟合其边缘分布, 选取拟合效果较好的t-Copula函数描述资产之间的相关结构, 建立联合分布模型, 进而采用蒙特卡洛模拟方法计算投资组合的VaR。结果表明, 景顺长城和泰达宏利之间对称相关, 当置信水平相同时, 不同权重组合的VaR不同, 投资组合权重相同时, 随着置信水平提高, VaR增大, 应用Copula-ARMA-GARCH模型计算投资组合VaR对研究基金市场的风险具有重要的理论意义和实用价值。

关键词

开放式基金, Copula-ARMA-GARCH模型, Monte Carlo模拟, VaR

The Risk Measurement on Portfolio of Open-End Fund

—Based on Copula-ARMA-GARCH Model

Zhifang Sun¹, Junxiang Lu^{1,2}

¹School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an Shaanxi

²School of Economics and Management, Xi'an University of Technology, Xi'an Shaanxi

Email: 1050029171@qq.com, jun-xianglu@163.com

Received: Mar. 15th, 2021; accepted: Apr. 3rd, 2021; published: Apr. 20th, 2021

Abstract

The Copula-ARMA-GARCH model is constructed to study the risk measurement on portfolio of open-end funds. The selected data are the daily unit net worth series of Invesco Great Wall and

文章引用: 孙志芳, 卢俊香. 开放式基金投资组合风险度量[J]. 应用数学进展, 2021, 10(4): 946-952.

DOI: 10.12677/aam.2021.104103

Teda Manulife. The ARMA-GARCH-t model is used to fit the edge distribution, and t-Copula function with good fitting effect is selected to describe the correlation structure between assets. The joint distribution model is built, and then the Monte Carlo simulation method is used to calculate the VaR of the portfolio. The results show that there is a symmetric correlation between Invesco Great Wall and Teda Manulife, and at the same confidence level, the VaR of different weight combinations is different; when the portfolio weight is the same, with the increase of confidence level, VaR increases. The application of Copula-ARMA-GARCH model to calculate portfolio VaR has important theoretical significance and practical value for studying the risk of fund market.

Keywords

Open-End Fund, Copula-ARMA-GARCH Model, Monte-Carlo Simulation, VaR

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

近年来, 开放式基金在我国的金融市场中占据了越来越重要的位置, 然而, 其所承受的风险也越来越大, 其中市场风险尤为突出。因此, 如何有效地度量、规避基金市场风险成为投资者极为关注的问题。

由于金融资产波动剧烈, 传统的线性相关建模方法并不能准确度量资产间的相关结构, Sklar 提出了 Copula 函数不仅可以描述金融资产之间非线性相关关系, 还消除了对边缘分布和联合分布正态性假设的依赖[1], 因此 Copula 理论在金融风险度量的研究中得到广泛的应用[2]。Embrechts 等把 Copula 理论引入到金融风险度量中, 且进一步探讨了传统的线性相关系数在实际运用当中的不足, 证实了此理论在研究相依关系的有效性[3] [4] [5]。由于 GARCH 模型可以刻画金融时间序列的波动聚集现象, Jondeau 和 Rockinger 提出了 Copula-GARCH 模型, 并基于此模型分析国际上四个主要股票市场之间的相关性[6]。然后国内学者也开始研究 Copula 理论在金融领域的应用。张尧庭研究分析了 Copula 模型在我国金融市场的可应用性[7]。也有学者用 Copula 函数模型对不同的相依性进行研究[8] [9], Copula 函数是将多个一元分布连接起来构成联合分布的连接函数, 度量风险时单个金融资产边缘分布的准确刻画至关重要。GARCH 族模型是用以刻画金融时间序列最常用的波动模型, 吴振翔等结合 Copula 和 GARCH 两个函数优势建立了 Copula-GARCH 模型, 对我国股票市场的风险进行精准分析[10]。何其祥等运用 Copula-GARCH 模型对金融投资组合的风险度量问题进行实证研究[11] [12] [13] [14] [15]。韦艳华和张世英提出了可用于资产投资组合分析的多元 Copula-GARCH 模型, 结合 Monte Carlo 模拟法, 对上海股市进行了实证研究[16]。以上学者对投资组合风险的研究主要集中于股票、期货、外汇市场, 对开放式基金风险的研究相对较少。因此文中将基于 Copula 理论对开放式基金的在险价值进行研究。

2. 模型构建

2.1. Copula 函数

2.1.1. 椭圆 Copula 族函数

1) 二元正态 Copula 分布函数:

$$C(u, v, \rho) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{2(1-\rho^2)}\right] ds dt \quad (1)$$

正态 Copula 函数适合刻画对称相关性, 具有显著的对称性, 但难以捕捉尾部相关关系, 会低估实际风险。

2) 二元 t -Copula 分布函数:

$$C(u, v; \rho, k) = \int_{-\infty}^{t_k^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_k^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left[1 + \frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{k(1-\rho^2)} \right]^{-(k+2)/2} ds dt \quad (2)$$

t -Copula 函数适合描绘较厚尾部对称的相关性, 对风险相关性更敏感。

2.1.2. 阿基米德 Copula 族函数

1) 二元 Gumbel Copula 分布函数:

$$C(u, v; \alpha) = \exp \left\{ - \left((-\ln u)^\alpha + (-\ln v)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\} \quad (3)$$

Gumbel Copula 函数适合描述非对称相关关系, 更快地捕捉上尾的变化。

2) 二元 Clayton Copula 发布函数:

$$C(u, v; \theta) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}} \quad (4)$$

Clayton Copula 适合描绘非对称相关关系, 并且对下尾的风险更敏感。

3) 二元 Frank Copula 分布函数:

$$C(u, v; \lambda) = -\frac{1}{\lambda} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\lambda u} - 1)(e^{-\lambda v} - 1)}{e^{-\lambda} - 1} \right) \quad (5)$$

Frank Copula 适合描绘对称的相关性, 捕捉在中心以及顶上尾和下尾更均匀分布的风险。

2.2. 边缘分布模型构建

GARCH 类模型可以捕捉金融时间序列的厚尾特性和波动聚集性, t 分布可以描述其时变性, 所以本文构建 ARMA-GARCH- t 模型拟合金融资产的收益率, 模型表达式如下:

$$\begin{cases} r_t = \mu + \varphi r_{t-1} + \theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t, \\ \varepsilon_t = \sigma_t z_t, z_t \sim t_\nu, \\ \sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2, \end{cases} \quad (6)$$

其中: r_t 为各资产收益率序列, μ 为收益率均值, σ_t 表示收益率的波动率, $\varphi, \theta, \omega, \alpha, \beta$ 为待估参数, t_ν 为自由度为 ν 的 t 分布。

2.3. VaR 的计算

VaR 是指在一定的置信水平下, 某金融资产或资产组合在未来特定时期内的最大可能损失, 数学公式表示为:

$$prob.(\Delta p \leq VaR) = 1 - \alpha. \quad (7)$$

其中, $prob.()$ 表示某个事件发生的概率, Δp 是某资产或资产组合在特定时期内的损失, α 表示一定的置信水平。

3. 实证分析

3.1. 数据的选取与处理

本文选取了景顺长城(000418)和泰达宏利(000319)两支开放式基金作为研究样本, 基于 Copula-ARMA-GARCH 模型研究投资组合的 VaR。采用的数据为样本基金 2015 年 1 月 1 日~2019 年 12 月 31 日的每日单位净值, 数据来源为中国基金网。基金的日收益率序列为:

$$R_t = \ln(NAT_t / NAT_{t-1}),$$

其中 NAT_t 为第 t 日的单位净值。

对收益率序列进行基本统计分析, 从表 1 可以看出: 两个对数收益率序列的偏度都小于 0, 具有一定的左偏, 峰度的值都大于 3, 表明收益率序列具有明显的尖峰厚尾特征。另外, JB 统计量均大于临界值, 且其 p 值均小于 0.05, 拒绝序列服从正态分布的假设。

Table 1. Descriptive statistics of Invesco Great Wall and Teda Manulife

表 1. 景顺长城和泰达宏利的描述性统计结果

基金名称	均值	标准差	偏度	峰度	JB 统计量
景顺长城	5.2660e-04	0.0191	-0.9247	7.3357	1.1322e+03
泰达宏利	3.1660e-04	0.0156	-0.7475	6.3040	670.1987

对数据进行 ADF 检验, 发现无论是在 1%、5% 还是 10% 的显著性水平下, 景顺长城和泰达宏利收益率的 ADF 统计量都小于临界值, 故拒绝原假设, 说明这两支基金的收益率序列是平稳的。绘制收益率序列图(图 1、图 2), 也可看出序列都是平稳的。

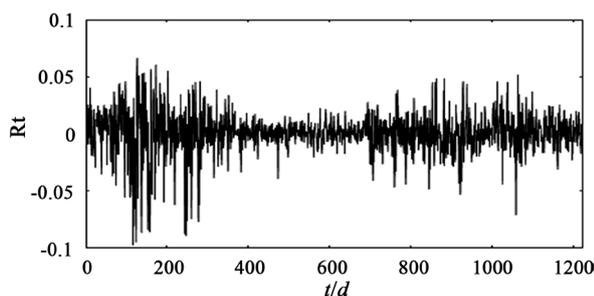


Figure 1. Invesco Great Wall yield sequence timing chart

图 1. 景顺长城日收益率序列时序图

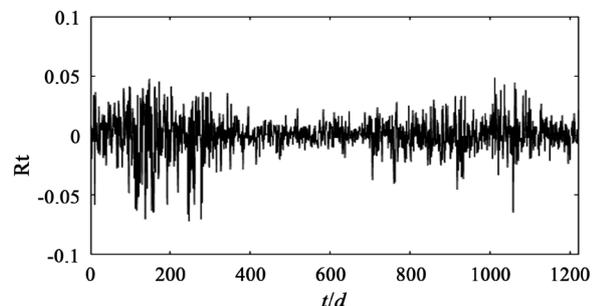


Figure 2. Time sequence of Teda Manulife daily rate series

图 2. 泰达宏利日收益率序列时序图

3.2. 边缘分布建模及参数估计

运用 ARCH-LM 方法检验上述收益率序列的条件异方差性时, 发现景顺长城和泰达宏利收益率序列的 LM 统计量的 p 值都小于 0.05, 在 95% 的置信水平下, 拒绝不存在条件异方差原假设, 因此收益率序列存在 ARCH 效应, 可以通过 GARCH 族模型描述。本文通过 ARMA-GARCH(1, 1)-t 模型来估计各资产收益率的边缘分布, 表 2、表 3 是运用极大似然估计法参数估计的结果。

Table 2. Estimation of mean equation parameters
表 2. 均值方程参数估计结果

样本基金	$\mu(\times 10^{-3})$	φ	θ
景顺长城	1.068	0.013	0
泰达宏利	1.588	-0.786	0.826

Table 3. Estimation of variance equation parameter
表 3. 方差方程参数估计结果

样本基金	$\omega(\times 10^{-6})$	α	β	ν
景顺长城	1.665	0.085	0.913	6.244
泰达宏利	1.518	0.074	0.920	6.178

对上述模型的标准化残差进行自相关性和异方差性检验, 发现标准化残差不存在自相关性和异方差性, 进而将标准化残差进行概率积分变换, 并对变换后的序列进行 K-S 检验, 结果表明变换后的序列服从(0,1)均匀分布。

3.3. Copula 函数选取及参数估计

为了选择合适的 Copula 函数描述景顺长城和泰达宏利的收益率序列的相依性, 绘制其二元频率直方图(图 3), 可以发现频率直方图的尾部对称, 结合之前介绍的 Copula 函数的性质, 可知正态、t 和 Frank Copula 函数可能适合描述样本序列的相关结构。

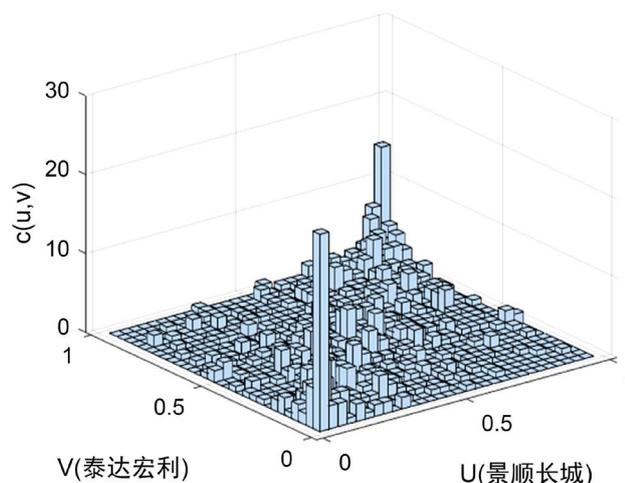


Figure 3. Frequency histogram of daily logarithmic return rate of Invesco Great Wall and Teda Manulife
图 3. 景顺长城和泰达宏利收益率频率直方图

对以上三种 Copula 函数进行参数估计, 并计算对应的平方欧氏距离, 结果如表 4 所示, t-Copula 函数的平方欧式距离最小, 根据二元频率直方图和平方欧氏距离综合判断, t-Copula 函数拟合效果较好。计算其 Kendall 秩相关系数和 Spearman 相关系数, 发现与用收益率原始数据计算出的 Kendall 秩相关系数和 Spearman 相关系数比较接近, 见表 5, 所以 t-Copula 函数能很好地描述样本基金之间的相依性。

Table 4. Estimation results of related parameters and squared Euclidean distance

表 4. 相关参数和平方欧氏距离的估计结果

Copula 函数类型	正态 Copula	t-Copula (k = 2.4550)	Frank Copula
线性相关参数	0.7374	0.7699	6.8818
平方欧式距离	0.0401	0.0289	0.0759

Table 5. Kendall correlation coefficient and Spearman correlation coefficient

表 5. Kendall 相关系数和 Spearman 相关系数

	Kendall 相关系数	Spearman 相关系数
t-Copula	0.5594	0.7558
原始序列	0.5487	0.7306

3.4. 蒙特卡罗模拟计算 VaR

通过 Monte Carlo 模拟两支基金构成的投资组合的未来的收益, 具体方法如下:

- 1) 由蒙特卡罗模拟生成 10,000 组具有上述 t-Copula 函数分布的随机数 $\{u, v\}$, 用逆概率积分得到 $\{F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)\}$, F_1^{-1}, F_2^{-1} 分别为各自序列的逆分布。
- 2) 将 $\{F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)\}$ 代入波动率方程得到的各支基金的模拟收益率 $\{r_{1,T+1}, r_{2,T+1}\}$ ($T+1$ 时刻)。
- 3) 假设基金在投资组合中所占权重为 $\alpha, \beta (\alpha + \beta = 1)$, 则投资组合收益率为: $R_{T+1} = \alpha r_{1,T+1} + \beta r_{2,T+1}$ 。
- 4) 给定置信水平, 即可求出投资组合相应的 VaR。

在置信水平为 95% 和 99% 时, 计算了投资组合三种权重比下的 VaR, 如表 6 所示:

Table 6. Portfolio VaR based on t-Copula function

表 6. 基于 t-Copula 函数计算的投资组合 VaR

权重比	0.25:0.75	0.50:0.50	0.75:0.25
95%	0.0181	0.0216	0.0264
99%	0.0187	0.0223	0.0275

4. 结语

利用 Copula-ARMA-GARCH 模型对景顺长城和泰达宏利收益率序列相关性进行分析, 发现二者之间对称相关, 且相关系数大于 0, 表明两支基金收益率序列呈正相关。进而采用 Monte Carlo 方法模拟产生各资产的收益率序列, 计算出投资组合的 VaR。结果表明, 在同一置信水平下, 不同权重组合的 VaR 不同, 投资组合权重相同时, 置信水平提高, VaR 增大。金融资产之间存在非线性相关结构, 所以借助 Copula 函数计算投资组合 VaR 比传统估计 VaR 的方法更有效, 使得投资组合的风险估计和最优投资方案得到更定量的描述。

基金项目

国家自然科学基金项目(11601410), 陕西省自然科学基金项目(2017JM1007)。

参考文献

- [1] Sklar, A. (1959) Fonctions de répartition à dimensions et leurs marges. *Publication de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, **8**, 229-231.
- [2] Nelsen, R.B. (1998) *An Introduction to Copulas*. Springer, New York.
- [3] Embrechts, P., McNeil, A. and Straumann, D. (1999) Correlation: Pitfalls and Alternative. *Risk-London Risk Magazine Limited*, No. 12, 69-71.
- [4] Embrechts, P., Hoein, A. and Juri, A. (2003) Using Copula to Bound the Value-at-Risk for Function of Dependent Risks. *Finance and Stochastics*, **7**, 145-167. <https://doi.org/10.1007/s007800200085>
- [5] Embrechts, P., Lindskog, F. and McNeil, A. (2002) Modeling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management. In: Rachev, S., Ed., *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*, Elsevier, Amsterdam, 329-384.
- [6] Jondeau, E. and Rockinger, M. (2006) The Copula-GARCH Model of Conditional Dependencies: An International Stock Market Application. *Journal of International Money and Finance*, **25**, 827-853. <https://doi.org/10.1016/j.jimonfin.2006.04.007>
- [7] 张尧庭. 连接函数(Copula)技术与金融风险分析[J]. 统计研究, 2002(4): 48-51.
- [8] 童中文, 何建敏. 基于 Copula 风险中性校准的违约相关性研究[J]. 中国管理科学, 2008, 16(5): 22-27.
- [9] 刘琼芳, 张宗义. 基于 Copula 房地产与金融行业的股票相关性研究[J]. 管理工程学报, 2011, 25(1): 165-169+164.
- [10] 吴振翔, 陈敏, 叶五一, 缪柏其. 基于 Copula-GARCH 的投资组合风险分析[J]. 系统工程理论与实践, 2006, 26(3): 45-52.
- [11] 何其祥, 张晗, 郑明. 包含股指期货的投资组合之风险研究——Copula 方法在金融风险管理中的应用[J]. 数理统计与管理, 2009, 28(1): 159-166.
- [12] 史道济, 李璠. 基于 Copula 的股票市场 VaR 和最优投资组合分析[J]. 天津理工大学学报, 2007, 23(3): 13-16.
- [13] 李楠. 外汇投资组合的风险分析[D]: [硕士学位论文]. 天津: 天津财经大学, 2014.
- [14] 刘红玉. 基于 Copula-GARCH 的投资组合风险度量的实证应用[J]. 齐齐哈尔大学学报, 2015, 31(1): 73-76.
- [15] 曹境鸽. 基于 Copula-GARCH 模型的 ETF 基金相关性风险研究[D]: [硕士学位论文]. 北京: 首都经济贸易大学, 2018.
- [16] 韦艳华, 张世英. 多元 Copula-GARCH 模型及其在金融风险分析上的应用[J]. 数理统计与管理, 2007, 26(3): 432-439.