Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2021, 10(5), 1531-1540**
Published Online May 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.105163

基于TODIM法的三角直觉模糊多属性决策算法及应用

苏晓艳[1*]，陈京荣[1#]，郝斌斌[2]，尹会玲[1]

[1]兰州交通大学数理学院，甘肃 兰州
[2]兰州交通大学交通运输学院，甘肃 兰州
Email: sxy199610@126.com, [#]chenjr@mail.lzjtu.cn

收稿日期：2021年4月17日；录用日期：2021年5月2日；发布日期：2021年5月21日

摘　要

将TODIM法应用于三角直觉模糊多属性决策领域。首先，在经典TODIM法中引入了Hamming三角直觉模糊距离测度公式，得到了改进的优势度表达式，采用了最大离差赋权法求解三角直觉模糊多属性决策问题的权重。其次，根据三角直觉模糊数得分函数的概念定义了其理想解，并将它应用于改进的优势度。最后，利用改进TODIM法设计了三角直觉模糊多属性决策问题的决策算法，通过算例验证了该算法的可行性与有效性，并且与利用前景理论解决三角直觉模糊多属性决策问题的方案作了对比，说明了该算法的合理性。

关键词

三角直觉模糊数，理想解，TODIM法，多属性决策

The Algorithm and Application of Triangular Intuitionistic Fuzzy Multi-Attribute Decision Making Based on TODIM Method

Xiaoyan Su[1*], Jingrong Chen[1#], Binbin Hao[2], Huiling Yin[1]

[1]School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou Gansu
[2]School of Transportation, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou Gansu
Email: sxy199610@126.com, [#]chenjr@mail.lzjtu.cn

Received: Apr. 17th, 2021; accepted: May 2nd, 2021; published: May 21st, 2021

[*]第一作者。
[#]通讯作者。

文章引用: 苏晓艳, 陈京荣, 郝斌斌, 尹会玲. 基于 TODIM 法的三角直觉模糊多属性决策算法及应用[J]. 应用数学进展, 2021, 10(5): 1531-1540. DOI: 10.12677/aam.2021.105163

Abstract

The application of TODIM method is extended to the triangular intuitionistic fuzzy multi-attribute decision making. First, a new Hamming distance measure formula of triangular intuitionistic fuzzy numbers is introduced in the classical TODIM method, and an improved dominance degree formula is given. The maximum deviation weighting method is used to solve the triangular intuitionistic fuzzy multi-attribute decision making problem. Secondly, according to the concept of triangular intuitionistic fuzzy numbers score function, the ideal solution is defined and applied to the improved dominance degree. Finally, the improved TODIM method is used to design the decision algorithm of triangular intuitionistic fuzzy multi-attribute decision making problem. The feasibility and effectiveness of the algorithm are verified by a numerical example, and the rationality of the algorithm is illustrated by comparing it with the scheme to solve triangular intuitionistic fuzzy multi-attribute decision making problem by using the prospect theory.

Keywords

Triangular Intuitionistic Fuzzy Number, Ideal Solution, TODIM Method, Multi-Attribute Decision Making

1. 引言

随着社会的发展，决策在我们身边扮演着越来越重要的角色，而主观偏好和客观条件的影响往往会使决策的复杂性与可变性提高。为了解决这些问题，模糊决策理论应运而生。1965 年 Zadeh [1]探究了模糊集的理论，它仅由一个隶属函数组成，是处理模糊领域问题的一种非常有效的工具。1986 年 Atanassov [2]在 Zadeh 的基础上研究了直觉模糊集(IFS)理论，该理论与前者相比，兼顾的信息更加全面。2006 年 Shu 等[3]构建了一个三角直觉模糊数(TIFN)，并且用以研究直觉模糊故障树分析算法。自此，三角模糊概念出现在人们视野中。

王强英[4]探究了三角直觉模糊数的相关内容，发现了三角直觉模糊数的加权算术平均算子和可能性均值的概念，并且在 Hausdorff 距离的基础上分别定义了三角直觉模糊数的海明距离和欧式距离。Grzegorzewski [5]提出了刻画测度直觉模糊集与区间值模糊集之间距离的新方法，在 Hausdorff 度量的基础上，提出了一些新想法，是对已有距离表达式的直接推广。由于三角模糊数具有保持数据的取值范围和能够突出最可能取值的特性，因此卜广志等[6]提出用三角模糊数来描述信息并进行决策。Nan 等[7] [8]通过介绍 TIFNs 的概念、算术运算、割集以及排序顺序关系，提出一种求解三角直觉模糊数收益矩阵的决策方法，提出字典法，以此来确定收益矩阵的解。徐泽水等[9]提出了模糊有序加权平均算子，通过计算排序向量，解决了属性值为三角模糊数互补判断矩阵的方案数有限的具体问题，并进行了相关实例分析。

1991 年，Gomes 等[10]考虑了前景理论的价值函数，在其基础上提出了经典的 TODIM 法。Lourenzutti 等[11]考虑了直觉模糊信息和影响方案性能的随机向量，能够兼顾底层随机向量对性能的影响，用拓展的 TODIM 法处理了直觉模糊问题，并且应用贝叶斯思想得到了备选方案的综合排序。TODIM 法还被 Fan

等[12]应用于混合多属性决策问题，运用大量信息对各个方案进行评价。Wei 等[13]分析了 TODIM 法在犹豫模糊语言术语环境下的应用，集合之间的大小用一个新的得分函数来衡量，并且利用该方法解决了服务商的选择问题。Ren 等[14]研究了 TODIM 方法在毕达哥拉斯模糊环境下的应用，并通过实验表明，决策过程中的风险偏好是对最终决策结果有影响的。

三角直觉模糊数将三角模糊数和直觉模糊数两者结合起来，同时具有二者的优势，可以说它是一类具有特别意义的直觉模糊数，使得在解决问题时可以使用不同属性的量纲，在现实应用里更加方便。TODIM 法以前景理论为基础，它可以切实把决策者的有限理性和个人偏好考虑在内。由此来看，把三角直觉模糊数和 TODIM 法结合起来，将其当作一种解决多属性决策问题的工具具有重要的价值和意义。在已有文献中，多属性决策问题大部分是用梯形模糊数、三角模糊数等来描述的，采用三角直觉模糊数解决此类难题的文献相对较少，而且也没有在此类问题里应用 TODIM 法的先例。因此，本文在已有文献的基础上，把三角直觉模糊数和 TODIM 法拓展并结合，然后用以解决属性值为三角直觉模糊数的多属性决策难题，构建切实考虑决策者行为和心理特点的更加合理的决策模型和算法。

2. 预备知识

2.1. 基本概念

定义 1 [15] 设 $\tilde{a}=\left\langle\left(\underline{a},a,\overline{a}\right);w_{\tilde{a}},u_{\tilde{a}}\right\rangle$ 是实数集上的一个特殊的直觉模糊集，它的隶属函数为

$$w_{\tilde{a}}\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x-\underline{a}}{a-\underline{a}}w_{\tilde{a}}, & \underline{a}\le x<a,\\ w_{\tilde{a}}, & x=a,\\ \dfrac{\overline{a}-x}{\overline{a}-a}w_{\tilde{a}}, & a<x\le\overline{a},\\ 0, & x<\underline{a}\ \text{or}\ x>\overline{a},\end{cases}$$

它的非隶属函数为

$$u_{\tilde{a}}\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{a-x+u_{\tilde{a}}\left(x-\underline{a}\right)}{a-\underline{a}}, & \underline{a}\le x<a,\\ u_{\tilde{a}}, & x=a,\\ \dfrac{x-a+u_{\tilde{a}}\left(\overline{a}-x\right)}{\overline{a}-a}, & a<x\le\overline{a},\\ 1, & x<\underline{a}\ \text{or}\ x>\overline{a},\end{cases}$$

其中，$w_{\tilde{a}}$ 表示 $\tilde{a}$ 的最大隶属度，$u_{\tilde{a}}$ 表示最小非隶属度，并且符合条件 $0\le w_{\tilde{a}}\le 1$，$0\le w_{\tilde{a}}\le 1$，$w_{\tilde{a}}+u_{\tilde{a}}\le 1$，$\underline{a},a,\overline{a}\in R$，则称 $\tilde{a}=\left\langle\left(\underline{a},a,\overline{a}\right);w_{\tilde{a}},u_{\tilde{a}}\right\rangle$ 为三角直觉模糊数。

定义 2 [16]设 $\tilde{a}=\left\langle\left(\underline{a},a,\overline{a}\right);w_{\tilde{a}},u_{\tilde{a}}\right\rangle$ 和 $\tilde{b}=\left\langle\left(\underline{b},b,\overline{b}\right);w_{\tilde{b}},u_{\tilde{b}}\right\rangle$ 为两个三角直觉模糊数，Hamming 距离为：

$$\begin{aligned}d\left(\tilde{a},\tilde{b}\right)=\frac{1}{6}\Big(&\left|w_{\tilde{a}}\underline{a}-w_{\tilde{b}}\underline{b}\right|+\left|w_{\tilde{a}}a-w_{\tilde{b}}b\right|+\left|w_{\tilde{a}}\overline{a}-w_{\tilde{b}}\overline{b}\right|+\left|u_{\tilde{a}}\underline{a}-u_{\tilde{b}}\underline{b}\right|\\&+\left|u_{\tilde{a}}a-u_{\tilde{b}}b\right|+\left|u_{\tilde{a}}\overline{a}-u_{\tilde{b}}\overline{b}\right|+\left|\underline{a}-\underline{b}\right|+\left|a-b\right|+\left|\overline{a}-\overline{b}\right|\Big)。\end{aligned}\tag{1}$$

2.2. 最大离差赋权法

一般来讲，每个方案在同一属性下的属性值差异越小，说明该属性对决策结果影响越小，所占权重越小，否则与之相反，本文利用离差最大化思想确定各个属性的权重。

设 $X=\left(x_{ij}\right)_{m\times n}$ 为三角直觉模糊多属性决策矩阵，对于属性 C_j 而言，方案 A_i 与其他方案 A_k 的离差为

$$D_{ij}(\omega)=\sum_{k=1}^{m} d\left(x_{ij},x_{kj}\right)\omega_j\ \ (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

其中，$d\left(x_{ij},x_{kj}\right)$ 采用定义 2 中的 Hamming 距离计算。

加权的离差最大化目标函数为

$$MaxD(\omega)=\sum_{j=1}^{n} D_j(\omega)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} d\left(x_{ij},x_{kj}\right)\omega_j,$$

数学模型如下：

$$\begin{cases}\max D(\omega)=\sum_{j=1}^{n} D_j(\omega)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} d\left(x_{ij},x_{kj}\right)\omega_j,\\ s.t.\ \ \omega_j\ge 0,\ j\in N,\ \sum_{j=1}^{n}\omega_j^{\ 2}=1,\end{cases}$$

通过构造 Lagrange 函数，对其求导，解得

$$\omega_j=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} d\left(x_{ij},x_{kj}\right)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} d\left(x_{ij},x_{kj}\right)\right]^2}}\ \ (j=1,2,\cdots,n),$$

进行规范化处理得

$$\omega_j^{\ *}=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} d\left(x_{ij},x_{kj}\right)}{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} d\left(x_{ij},x_{kj}\right)}\ \ (j=1,2,\cdots,n)。\tag{2}$$

3. 理想解

定义 3 [17] 对于三角直觉模糊数 $\tilde{a}=\left\langle\left[\left(\underline{a}',a,\overline{a}'\right);w_{\tilde{a}}\right],\left[\left(\underline{a},a,\overline{a}\right);u_{\tilde{a}}\right]\right\rangle$，其得分函数为

$$S(\tilde{a})=\frac{\underline{a}'+2a+\overline{a}'}{4}w_{\tilde{a}}-\frac{\underline{a}+2a+\overline{a}}{4}u_{\tilde{a}},\tag{3}$$

其精确函数为

$$H(\tilde{a})=\frac{\underline{a}'+2a+\overline{a}'}{4}w_{\tilde{a}}+\frac{\underline{a}+2a+\overline{a}}{4}u_{\tilde{a}}。\tag{4}$$

由文献[18]知，当 $\underline{a}'=\underline{a}$，$\overline{a}'=\overline{a}$ 时，三角直觉模糊数 $\tilde{a}=\left\langle\left[\left(\underline{a}',a,\overline{a}'\right);w_{\tilde{a}}\right],\left[\left(\underline{a},a,\overline{a}\right);u_{\tilde{a}}\right]\right\rangle$ 可以写成 $\tilde{a}=\left\langle\left(\underline{a},a,\overline{a}\right);w_{\tilde{a}},u_{\tilde{a}}\right\rangle$，将 $\underline{a}'=\underline{a}$，$\overline{a}'=\overline{a}$ 代入式(3)和式(4)，我们给出以下定义。

定义 4 对于三角直觉模糊数 $\tilde{a}=\left\langle\left(\underline{a},a,\overline{a}\right);w_{\tilde{a}},u_{\tilde{a}}\right\rangle$，其得分函数为

$$S(\tilde{a})=\frac{\underline{a}+2a+\overline{a}}{4}\left(w_{\tilde{a}}-u_{\tilde{a}}\right),$$

其精确函数为

$$H(\tilde{a})=\frac{\underline{a}+2a+\overline{a}}{4}\left(w_{\tilde{a}}+u_{\tilde{a}}\right)。$$

定义 5 对于三角直觉模糊数 $\tilde{a}=\langle(\underline{a},a,\overline{a});w_{\tilde{a}},u_{\tilde{a}}\rangle$ 和 $\tilde{b}=\langle(\underline{b},b,\overline{b});w_{\tilde{b}},u_{\tilde{b}}\rangle$，二者的得分函数分别为 $S(\tilde{a})$，$S(\tilde{b})$，精确函数分别为 $H(\tilde{a})$，$H(\tilde{b})$，则有：

(1) 若 $S(\tilde{a})>S(\tilde{b})$，则 $\tilde{a}>\tilde{b}$；

(2) 若 $S(\tilde{a})=S(\tilde{b})$，且 $H(\tilde{a})>H(\tilde{b})$，则 $\tilde{a}>\tilde{b}$；若 $S(\tilde{a})=S(\tilde{b})$，且 $H(\tilde{a})=H(\tilde{b})$，则 $\tilde{a}=\tilde{b}$。

根据定义 5，再结合文献[19]中区间直觉犹豫模糊数理想解的概念，我们可以得到三角直觉模糊数的理想解的定义。

定义 6 对于所有的三角直觉模糊多属性决策矩阵 $X=(x_{ij})_{m\times n}$，

正理想解为

$$x^{+}=\{x_1^{+},x_2^{+},\cdots,x_n^{+}\},\tag{5}$$

负理想解为

$$x^{-}=\{x_1^{-},x_2^{-},\cdots,x_n^{-}\},\tag{6}$$

其中，$x_j^{+}=\max_i x_{ij}$，$x_j^{-}=\min_i x_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$。

4. 改进的优势度公式

由文献[19]可知，Hamming-Hausdorff 混合区间直觉犹豫模糊距离测度公式可以被应用于改进的优势度，由此本文则引入了 Hamming 距离测度公式和理想解，得出了改进的优势度：

$$\Phi_c(A_i,A_j)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{\omega_{cr}d(x_{ic},x_{jc})}{\sum\limits_{c=1}^{n}\omega_{cr}}}, & d(x_{ic},x_c^{+})-d(x_{jc},x_c^{+})<0,\\ 0 & d(x_{ic},x_c^{+})-d(x_{jc},x_c^{+})=0,\\ -\dfrac{1}{\theta}\sqrt{\dfrac{\sum\limits_{c=1}^{n}\omega_{cr}d(x_{ic},x_{jc})}{\omega_{cr}}}, & d(x_{ic},x_c^{+})-d(x_{jc},x_c^{+})>0,\end{cases}\tag{7}$$

其中，参数 θ 为决策时面对“损失”的衰减系数，一般来说，θ 的大小与决策者对风险的规避水平成反比。通过比较每个方案与理想解的距离来判断它们的优势，比经典 TODIM 法优势度公式中的绝对距离更加具有科学性。

5. 将改进 TODIM 法应用于三角直觉模糊多属性决策的决策算法

5.1. 问题描述

设三角直觉模糊多属性决策的方案集为 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$，$C=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$ 是属性集，它们的权重未知，方案 A_i 关于属性 C_j 的评价值用三角直觉模糊数 $x'_{ij}=\langle(\underline{a}'_{ij},a'_{ij},\overline{a}'_{ij});w'_{ij},u'_{ij}\rangle$ 表示，由此构造出的决策矩阵记为 $X'=\left(\langle(\underline{a}'_{ij},a'_{ij},\overline{a}'_{ij});w'_{ij},u'_{ij}\rangle\right)_{m\times n}$，下面是用 TODIM 法解决三角直觉模糊多属性决策问题的决策算法。

5.2. 决策算法

Step 1 对于初始决策矩阵 $X'=(x'_{ij})_{m\times n}$，根据文献[20]中的方式对其规范化，

效益型属性：

$$x_{ij}=\left\langle\left(\frac{a'_{ij}}{\bar{a}_j^+},\frac{a'_{ij}}{\bar{a}_j^+},\frac{\bar{a}'_{ij}}{\bar{a}_j^+}\right);w'_{ij},u'_{ij}\right\rangle\ (i=1,2,\cdots,m), \tag{8}$$

成本型属性：

$$x_{ij}=\left\langle\left(1-\frac{\bar{a}'_{ij}}{\bar{a}_j^+},1-\frac{a'_{ij}}{\bar{a}_j^+},1-\frac{a'_{ij}}{\bar{a}_j^+}\right);w'_{ij},u'_{ij}\right\rangle\ (i=1,2,\cdots,m), \tag{9}$$

其中，$\bar{a}_j^{\ +}=\max\left\{\bar{a}'_{ij}\middle|i=1,2,\cdots,m\right\}\ (j=1,2,\cdots,n)$，得到规范化矩阵 $X=\left(x_{ij}\right)_{m\times n}$；

Step 2 求解各个属性的权重 $\omega_j\ (j=1,2,\cdots,n)$，这里采用最大离差赋权法；

Step 3 找出权重值最大的属性 C_r，将其定义为参考属性，然后计算每个属性 C_c 相对于参考属性 C_r 的相对权重值 ω_{cr}，即

$$\omega_{cr}=\frac{\omega_c}{\omega_r}, \tag{10}$$

其中，$\omega_r=\max\left\{\omega_j\middle|j=1,2,\cdots,n\right\}$；

Step 4 利用式(1)算出在每个属性 C_c 下所有的方案与理想解之间的距离；

Step 5 利用式(7)计算在属性 C_c 下，方案 A_i 相对于方案 A_j 的优势度，得到在每个属性 C_c 下的优势度矩阵

$$\Phi_c=\begin{bmatrix}\Phi_c(A_1,A_1) & \Phi_c(A_1,A_2) & \cdots & \Phi_c(A_1,A_m)\\ \Phi_c(A_2,A_1) & \Phi_c(A_2,A_2) & \cdots & \Phi_c(A_2,A_m)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \Phi_c(A_m,A_1) & \Phi_c(A_m,A_2) & \cdots & \Phi_c(A_m,A_m)\end{bmatrix}; \tag{11}$$

Step 6 求解方案 A_i 相对于方案 A_j 的感知价值函数值，即相对优势度

$$\delta\left(A_i,A_j\right)=\sum_{c=1}^{n}\Phi_c\left(A_i,A_j\right); \tag{12}$$

Step 7 标准化优势度矩阵，从而得到方案 A_i 的综合感知价值函数值，即全局优势度

$$\xi_i=\frac{\sum_{j=1}^{m}\delta\left(A_i,A_j\right)-\min_i\left\{\sum_{j=1}^{m}\delta\left(A_i,A_j\right)\right\}}{\max_i\left\{\sum_{j=1}^{m}\delta\left(A_i,A_j\right)\right\}-\min_i\left\{\sum_{j=1}^{m}\delta\left(A_i,A_j\right)\right\}}; \tag{13}$$

Step 8 对全局优势度 ξ_i 进行大小排序，ξ_i 越大，方案越优；ξ_i 越小，方案越差。

6. 算例分析

采用文献[18]中的实例，一家风电厂计划购进风电增速器，有三个供应商，分别是 A_1、A_2、A_3，可靠性、体积、动态特性、传递效率和噪声是供应商的 5 个评价指标，分别记为 C_1、C_2、C_3、C_4、C_5，其中 C_1、C_3、C_4 是效益型属性，C_2、C_5 是成本型属性。各个供应商的相关信息是由决策者根据常识、经验以及真实数据等获得的，如表 1 初始决策矩阵。

Table 1. Initial decision matrix
表 1. 初始决策矩阵

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	$\langle(5,7,8);0.7,0.3\rangle$	$\langle(1,4,5);0.6,0.4\rangle$	$\langle(3,7,8);0.7,0.1\rangle$	$\langle(4,7,8);0.6,0.3\rangle$	$\langle(1,2,5);0.7,0.2\rangle$
A_2	$\langle(4,6,7);0.9,0\rangle$	$\langle(1,3,4);0.7,0.3\rangle$	$\langle(3,4,6);0.8,0.1\rangle$	$\langle(4,6,7);0.8,0.1\rangle$	$\langle(1,2,4);0.8,0.1\rangle$
A_3	$\langle(6,8,9);0.8,0.1\rangle$	$\langle(2,4,5);0.6,0.3\rangle$	$\langle(3,5,6);0.7,0.3\rangle$	$\langle(4,6,7);0.8,0.2\rangle$	$\langle(2,3,5);0.6,0.3\rangle$

Step 1 利用式(8)和式(9)对表 1 规范化处理，得到规范化矩阵，如表 2：

Table 2. Normalized matrix
表 2. 规范化矩阵

	C_1	C_2	C_3
A_1	$\langle(0.556,0.778,0.889);0.7,0.3\rangle$	$\langle(0,0.2,0.8);0.6,0.4\rangle$	$\langle(0.375,0.875,1);0.7,0.1\rangle$
A_2	$\langle(0.444,0.667,0.778);0.9,0\rangle$	$\langle(0.2,0.4,0.8);0.7,0.3\rangle$	$\langle(0.375,0.5,0.75);0.8,0.1\rangle$
A_3	$\langle(0.667,0.889,1);0.8,0.1\rangle$	$\langle(0,0.2,0.6);0.6,0.3\rangle$	$\langle(0.375,0.625,0.75);0.7,0.3\rangle$

	C_4	C_5
A_1	$\langle(0.5,0.875,1);0.6,0.3\rangle$	$\langle(0,0.6,0.8);0.7,0.2\rangle$
A_2	$\langle(0.5,0.75,0.875);0.8,0.1\rangle$	$\langle(0.2,0.6,0.8);0.8,0.1\rangle$
A_3	$\langle(0.5,0.75,0.875);0.8,0.2\rangle$	$\langle(0,0.4,0.6);0.6,0.3\rangle$

Step 2 运用式(2)求各属性权重：

$$\omega_1 = 0.26\text{，}\quad \omega_2 = 0.19\text{，}\quad \omega_3 = 0.20\text{，}\quad \omega_4 = 0.14\text{，}\quad \omega_5 = 0.21\text{，}$$

ω_1 最大，C_1 为参考属性。

Step 3 根据式(5)得正理想解为：

$$x^+ = \{\langle(0.667,0.889,1);0.8,0.1\rangle,\langle(0.2,0.4,0.8);0.7,0.3\rangle,\langle(0.375,0.875,1);0.7,0.1\rangle,$$
$$\langle(0.5,0.75,0.875);0.8,0.1\rangle,\langle(0.2,0.6,0.8);0.8,0.1\rangle\},$$

利用式(1)求出在每个属性下所有方案到理想解的距离，如表 3：

Table 3. The distance from each solution to the ideal solution under each attribute
表 3. 在每个属性下所有方案到理想解的距离

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	0.2055	0.16	0	0.1708	0.11
A_2	0.2112	0	0.1729	0	0
A_3	0	0.213	0.1917	0.0354	0.2433

Step 4 利用式(10)计算出每个属性 C_c 相对于参考属性 C_1 的相对权重值 ω_{cr}：

$$\omega_{11}=1，\quad \omega_{21}=0.73，\quad \omega_{31}=0.77，\quad \omega_{41}=0.54，\quad \omega_{51}=0.81；$$

Step 5 令 $\theta=1$，利用式(7)和式(11)计算在属性 C_c 下，方案 A_i 相对于方案 A_j 的优势度，写出优势度矩阵，如表 4~8：

Table 4. The dominance degree of the scheme A_i over the scheme A_j under attribute C_1
表 4. 属性 C_1 下方案 A_i 相对于方案 A_j 的优势度

	A_1	A_2	A_3
A_1	0	0.2226	−0.8895
A_2	−0.8571	0	−0.9017
A_3	0.2310	0.2342	0

Table 5. The dominance degree of the scheme A_i over the scheme A_j under attribute C_2
表 5. 属性 C_2 下方案 A_i 相对于方案 A_j 的优势度

	A_1	A_2	A_3
A_1	0	−0.9186	0.1232
A_2	0.1742	0	0.2010
A_3	−0.6496	−1.0599	0

Table 6. The dominance degree of the scheme A_i over the scheme A_j under attribute C_3
表 6. 属性 C_3 下方案 A_i 相对于方案 A_j 的优势度

	A_1	A_2	A_3
A_1	0	0.1860	0.1958
A_2	−0.9298	0	0.1458
A_3	−0.9790	−0.7289	0

Table 7. The dominance degree of the scheme A_i over the scheme A_j under attribute C_4
表 7. 属性 C_4 下方案 A_i 相对于方案 A_j 的优势度

	A_1	A_2	A_3
A_1	0	−1.1035	−0.9825
A_2	0.1548	0	0.0705
A_3	0.1378	−0.5024	0

Table 8. The dominance degree of the scheme A_i over the scheme A_j under attribute C_5
表 8. 属性 C_5 下方案 A_i 相对于方案 A_j 的优势度

	A_1	A_2	A_3
A_1	0	−0.7231	0.1675
A_2	0.4521	0	0.2262
A_3	−0.7960	−1.0754	0

Step 6 根据式(12)求解相对优势度，如表 9：

Table 9. Relative dominance matrix
表 9. 相对优势度矩阵

	A_1	A_2	A_3
A_1	0	−2.3366	−1.3855
A_2	−1.3058	0	−0.2582
A_3	−2.0558	−3.1324	0

Step 7 根据式(13)分别计算得到每个方案的全局优势度：

$$\xi_1 = 0.40,\quad \xi_2 = 1,\quad \xi_3 = 0;$$

Step 8 由于 $\xi_2 > \xi_1 > \xi_3$，且全局优势度越大，方案越优，因此，供应商优劣排序为 $A_2 > A_1 > A_3$，供应商 A_2 是最优选择。

在文献[18]中，采用基于前景理论的多属性决策方案求得的最优选择是供应商 A_1，与本文的决策结果不相同，原因有以下两点：第一，文献[18]中的属性权重是决策者直接给出的，而本文中的属性权重是在决策矩阵的基础上采用最大离差赋权法求得的，与决策者直接提供的属性权重相比较，根据决策矩阵的数据求得的结果更具有科学性；第二，由于客观世界具有复杂和可变的特点，人们的认知也具有模糊性，不同的决策方法形成不同的结果，TODIM 法是在前景理论的基础上提出的，和前景理论相比，能够更好地考虑决策者的有限理性和决策偏好，用 TODIM 法进行决策更符合实际。综上所述，本文的决策结果更合理，供应商 A_2 是最优选择。

7. 结语

本文将 TODIM 法和三角直觉模糊数相结合，定义了三角直觉模糊数的理想解，并且把它引入改进优势度的求解中，给出了基于改进 TODIM 法的三角直觉模糊多属性决策问题的决策算法，并以实例验证了该算法应用于此类问题是可行的和有效的。同时，与基于前景理论的三角直觉模糊多属性决策方案作了对照分析，阐明了该算法所具有的优势。后期的研究中会将 TODIM 法与区间三角模糊数结合，构建更加合理的此种类型决策问题的解决方案。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(61463026，61463027)；甘肃省自然科学基金资助项目(1610RJZA038)。

参考文献

[1] Zadehl, A. (1965) Fuzzy Sets. *Information and Control*, **8**, 338-356. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X

[2] Atanassov, K. (1986) Intuitionistic Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **20**, 87-96. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(86)80034-3

[3] Shu, M.H., Cheng, C.H. and Chang, J.R. (2006) Using Intuitionistic Fuzzy Sets for Fault-Tree Analysis on Printed Circuit Board Assembly. *Microelectronics Reliability*, **46**, 2139-2148. https://doi.org/10.1016/j.microrel.2006.01.007

[4] 王强英. 三角直觉模糊多属性群决策方法及其在供应商选择中的应用[D]: [硕士学位论文]. 南昌: 江西财经大学, 2014.

[5] Grzegorzewski, P. (2004) Distances between Intuitionistic Fuzzy Sets and/or Interval-Valued Fuzzy Sets Based on the Hausdorff Metric. *Fuzzy Sets and Systems*, **148**, 319-328. https://doi.org/10.1016/j.fss.2003.08.005

[6] 卜广志, 张宇文. 基于三参数区间数的灰色模糊综合评判[J]. 系统工程与电子技术, 2001(9): 43-45+62.

[7] Nan, J.X., Li, D.F. and Zhang, M.J. (2010) A Lexicographic Method for Matrix Games with Payoffs of Triangular Intuitionistic Fuzzy Numbers. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, **3**, 280-289. https://doi.org/10.2991/ijcis.2010.3.3.4

[8] Yager, R.R. (2004) Generalized OWA Aggregation Operators. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, **3**, 93-107. https://doi.org/10.1023/B:FODM.0000013074.68765.97

[9] 徐泽水. 基于 FOWA 算子的三角模糊数互补判断矩阵排序法[J]. 系统工程理论与实践, 2003(10): 86-89.

[10] Gomes, L.F.A.M. and Lima, M.M.P.P. (1991) TODIM: Basic and Application to Multicriteria Ranking of Projects with Environmental Impacts. *Foundations of Computing and Decision Sciences*, **16**, 113-127.

[11] Lourenzutti, R. and Krohling, R.A. (2013) A Study of TODIM in a Intuitionistic Fuzzy and Random Environment. *Expert Systems with Applications*, **40**, 6459-6468. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2013.05.070

[12] Fanz, P., Zhang, X., Chen, F.D., *et al*. (2013) Extended TODIM Method for Hybrid Multiple Attribute Decision Making Problems. *Knowledge-Based Systems*, **42**, 40-48. https://doi.org/10.1016/j.knosys.2012.12.014

[13] Wei, C., *et al*. (2015) A Hesitant Fuzzy Linguistic TODIM Method Based on a Score Function. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, **8**, 701-712. https://doi.org/10.1080/18756891.2015.1046329

[14] Ren, P.J., Xu, Z.S. and Gou, X.J. (2016) Pythagorean Fuzzy TODIM Approach to Multi-Criteria Decision Making. *Applied Soft Computing*, **42**, 246-259. https://doi.org/10.1016/j.asoc.2015.12.020

[15] Li, D.F., Nan, J.X. and Zhang, M.J. (2010) A Ranking Method of Triangular Intuitionistic Fuzzy Numbers and Application to Decision Making. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, **3**, 522-541. https://doi.org/10.2991/ijcis.2010.3.5.2

[16] 梁福琪. 基于 TODIM 的模糊多属性决策研究[D]: [硕士学位论文]. 深圳: 深圳大学, 2017.

[17] Wang, J.Q., Nie, R.R., Zhang, H.Y., *et al*. (2013) New Operators on Triangular Intuitionistic Fuzzy Numbers and Their Applications in System Fault Analysis. *Information Sciences*, **251**, 79-95. https://doi.org/10.1016/j.ins.2013.06.033

[18] 刘晓瑜. 基于三角模糊数有偏好的多属性决策方法研究[D]: [硕士学位论文]. 北京: 华北电力大学, 2015.

[19] 王韵涵. 区间直觉犹豫模糊 TODIM 多属性决策方法及应用[D]: [硕士学位论文]. 保定: 河北大学, 2020.

[20] Li, D.F. (2010) A Ratio Ranking Method of Triangular Intuitionistic Fuzzy Numbers and Its Application to MADM Problems. *Computers and Mathematics with Applications*, **60**, 1557-1570. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.06.039