

# 最大密度限制下的欧拉方程解的非唯一性

华嘉乐, 杨凯迪

东华大学理学院, 上海

Email: [jiale.hua@dhu.edu.cn](mailto:jiale.hua@dhu.edu.cn), [ykdyangkaidi@163.com](mailto:ykdyangkaidi@163.com)

收稿日期: 2021年5月10日; 录用日期: 2021年5月29日; 发布日期: 2021年6月16日

## 摘要

在本文中, 我们考虑了带有最大密度限制的等熵可压欧拉方程的二维黎曼问题, 这一最大密度限制通过带有奇性的压强项  $p(\rho) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_*}\right)^\gamma}$  实现。对适当构造的黎曼问题初值, 证明了系统存在无穷多个满足

经典熵条件的可容许弱解, 这推广了Elisabetta Chiodaroli和Ondřej Kreml对等熵可压欧拉方程的结果。

## 关键词

等熵可压欧拉方程, 非唯一性, 黎曼问题, 可容许弱解, 熵条件

# Nonuniqueness of Solutions of Euler Equation with Maximum Density Restraint

Jiale Hua, Kaidi Yang

College of Science, Donghua University, Shanghai

Email: [jiale.hua@dhu.edu.cn](mailto:jiale.hua@dhu.edu.cn), [ykdyangkaidi@163.com](mailto:ykdyangkaidi@163.com)

Received: May 10<sup>th</sup>, 2021; accepted: May 29<sup>th</sup>, 2021; published: Jun. 16<sup>th</sup>, 2021

## Abstract

In this paper we consider the 2D Riemann problem of isentropic compressible Euler equations with a singular pressure law  $p(\rho) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_*}\right)^\gamma}$ , which imposes a stiff constraint on the maximum

density. With a suitably constructed Riemann data, we prove that there exist infinitely many admissible weak solutions to the system satisfying the classical entropy condition. This is a generalization of Elisabetta Chiodaroli and Ondřej Kreml's results on isentropic compressible Euler equations.

### Keywords

Isentropic Compressible Euler Equations, Non-Uniqueness, Riemann Problem, Admissible Weak Solutions, Entropy Conditions

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

本文研究二维等熵可压缩欧拉方程的柯西问题, 该系统由描述质量和动量守恒的 3 个标量方程组成。

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x (\rho \mathbf{v}) = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}_x (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla_x [p(\rho)] = 0 \\ \rho(\cdot, 0) = \rho^0, \\ \mathbf{v}(\cdot, 0) = \mathbf{v}^0. \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\rho$ 、 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  分别表示气体的密度, 速度。在等熵情况下, 压强  $p$  是  $\rho$  的函数, 比较常见的压强项为  $p(\rho) = \rho^\gamma$ , 其中  $\gamma \geq 1$ 。

欧拉方程柯西问题的适定性理论在空间维数为一维的情形已较为完善。众所周知, 即使给定非常光滑的初值, (1)一般也会在有限时间内发展出奇点, 因此弱解在适定性理论中是必不可少的。但除非给出一些熵条件, 弱解不是唯一的。在空间维数为一维的情况下, 可以利用熵条件(如 Oleinik 熵条件、Lax 熵条件、熵-熵流对等条件)选出唯一解, 称其为可容许解, 详见[1] [2]及其中引用文献。

在多维(空间维数  $> 1$ )情况下, 经典熵条件不能保证弱解的唯一性。确切地说, 我们寻找在分布意义上满足以下熵准则的弱解:

$$\partial_t \left( \rho \varepsilon(\rho) + \rho \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) + \operatorname{div}_x \left[ \left( \rho \varepsilon(\rho) + \rho \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + p(\rho) \right) \mathbf{v} \right] \leq 0 \quad (2)$$

其中总熵  $\eta = \rho \varepsilon(\rho) + \rho \frac{|\mathbf{v}|^2}{2}$ , 内能  $\varepsilon: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , 并且有  $p(r) = r^2 \varepsilon'(r)$ 。

基于 De Lellis 和 Székelyhidi 在[3] [4]中对于不可压缩欧拉方程组发展的方法, 给定适当构造的初值, 可压缩欧拉方程(1)可被证明存在无穷多个可容许弱解。文献[3] [5]中对于某些非正常(wild)初值证明了这一不唯一性。即使对初值正则性做较强的假设, 熵准则也无法给出唯一解。在[6]中, 考虑压强为  $p(\rho) = \rho^2$ , 初值为由经典的压缩波生成的黎曼初值, 方程组存在无穷多可容许弱解。因此, 即使初始值为 Lipschitz 连续, 解也具有类似的不唯一性。这种不唯一性随后被推广到  $p(\rho) = \rho^\gamma (\gamma \geq 1)$  的情况[7], 其中作者构造了一些二维黎曼问题的初始值, 其标准(即自相似)解包含两个激波, 此时系统有无穷多个可容许解。在[8]中(1)的二维黎曼问题得到了系统地分析, 作者证明了只要黎曼问题的标准(自相似)解包含一个激波, 则

系统就有无穷多个可容许弱解。在[9]中, 类似不唯一性被推广到包含一个接触间断的黎曼初值。

对于完整的欧拉系统, 文献[10]证明了对于  $L^\infty$  初值, 无穷多个有界熵容许弱解的存在性。文献[11]证明了给定二维黎曼问题, 若其自相似解包含有两个激波和一个可能的接触间断, 则解不唯一。在 Feireisl、Klingenberg 和 Markfelder 近期的研究中[12], 研究了这类非正常(wild)初值的稠密性(使得问题产生局部光滑解的初值称为是正则的, 而产生无穷多个弱解的初值称为是非正常(wild)初值。该篇文章确定了这些非正常(wild)初值在  $L^1$  自然拓扑中的闭包, 并证明了其补集为开稠密集。

本文中, 我们考虑具有最大密度限制的欧拉方程(1), 其中最大密度限制通过[13] [14]中提出的带奇性压强项实现。

$$p(\rho) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_*}\right)^\gamma} = \frac{\rho^\gamma \rho_*^\gamma}{(\rho_* - \rho)^\gamma} \tag{3}$$

其中,  $\rho_*$  是最大密度。当  $\rho$  远离最大密度时, 这种压强项类似于多方气体压强项。但当  $\rho$  接近最大密度时, 压强变得非常刚性, 从而保证最大密度不被达到和超过。

如同[6] [7] [8], 我们考虑二维黎曼问题

$$(\rho^0(x), v^0(x)) := \begin{cases} (\rho_-, v_-), & x_2 < 0 \\ (\rho_+, v_+), & x_2 > 0 \end{cases} \tag{4}$$

其中,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\rho_\pm, v_\pm = (v_{\pm 1}, v_{\pm 2})$  是常量。

我们将[7]中的结果推广到具有最大密度约束(3)的情况。

**定理 1.1** 假设压强为(3), 对于一个定义如(4)的黎曼问题, 方程组(1)存在无穷多个满足熵条件(2)的可容许弱解。并且该黎曼问题的自相似解由一个可容许 1-激波和 3-激波组成, 即  $v_{-1} = v_{+1}$  和

$$v_{+2} - v_{-2} < -\sqrt{\frac{(\rho_- - \rho_+)(p(\rho_-) - p(\rho_+))}{\rho_- \rho_+}} \tag{5}$$

定理 1.1 中得到的可容许解具有中间状态  $(\rho_1, v_1)$ , 且满足  $\rho_1 > \max\{\rho_-, \rho_+\}$ 。为了研究当密度接近最大密度  $\rho_*$  时解的渐近行为, 我们有如下对于中间状态  $\rho_1$  的估计。

**定理 1.2** 对于定理 1.1 中得到的所有可容许解, 存在一个极大密度  $\rho_m \in (0, \rho_*)$  使得

$$\rho_1 < \rho_m \tag{6}$$

且有以下渐近估计:

1) 如果  $\rho_- > \rho_+$  并且  $\rho_- \rightarrow \rho_*$ , 我们可以得到  $\rho_m \rightarrow \rho_*$  和

$$\rho_m - \rho_- \sim \frac{B(\rho_* - \rho_-)^{\gamma+1}}{\rho_*^{2\gamma} \gamma (\rho_* - \rho_+)} \tag{7}$$

2) 如果  $\rho_+ > \rho_-$  并且  $\rho_+ \rightarrow \rho_*$ , 我们可以得到  $\rho_m \rightarrow \rho_*$  和

$$\rho_m - \rho_+ \sim \frac{B(\rho_* - \rho_+)^{\gamma+1}}{\rho_*^{2\gamma} \gamma (\rho_* - \rho_-)} \tag{8}$$

3) 如果  $\rho_+ = \rho_-$  并且  $\rho_- \rightarrow \rho_*$ , 我们可以得到  $\rho_m \rightarrow \rho_*$  和

$$\rho_m - \rho_- \sim \frac{1}{2\rho_*^\gamma} \sqrt{\frac{B(\rho_* - \rho_-)^{\gamma+1}}{\gamma}} \tag{9}$$

其中  $B = \rho_- \rho_+ (v_{+2} - v_{-2})^2 - (\rho_- - \rho_+) (p(\rho_-) - p(\rho_+))$ 。这里  $\alpha \sim \beta$  意味着  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\beta \rightarrow 0$  且  $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow 1$ 。

**注 1.1** 当  $\rho$  趋向于  $\rho_*$ , 压强项(3)趋于无穷, 因此它在最大密度附近是有奇性的。为了保证在接近最大密度时, 压强项  $p(\rho)$  和某个较大的量  $\kappa$  同阶,  $\rho_* - \rho$  的值应该与  $\kappa^{-1/\gamma}$  是同阶的。因此, 对于定理 1.1 中的黎曼问题, 定理 1.2 意味着如果  $p(\rho_-)$  和  $p(\rho_+)$  和  $\kappa$  是同阶的, 则对于黎曼问题解中的中间状态  $p(\rho_m)$  和  $p(\rho_1)$  也是如此。

本文的其余内容如下, 我们首先在第二节介绍一些基本的符号和定义。第三节回顾黎曼问题解的一些有用结果, 并给出一些引理和命题。最后在第四和第五部分证明主要定理。

## 2. 符号和定义

在本节中, 我们首先为本文提供所有必要的定义。

**定义 2.1** (弱解) 对任意的  $\psi, \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty))$ , 当  $(\rho, \mathbf{v}) \in L^\infty(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty))$  满足以下等式:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} [\rho \partial_t \psi + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla_x \psi] dx dt + \int_{\mathbb{R}^2} \rho^0(x) \psi(x, 0) dx = 0 \tag{10}$$

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} [\rho \mathbf{v} \cdot \partial_t \phi + \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} : \nabla_x \phi] dx dt + \int_{\mathbb{R}^2} \rho^0(x) \mathbf{v}^0(x) \cdot \phi(x, 0) dx = 0 \tag{11}$$

则我们称  $(\rho, \mathbf{v})$  是(1)在  $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$  上的弱解。

**定义 2.2** (可容许弱解) 对任意非负函数  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty))$ , 当(1)有界弱解  $(\rho, \mathbf{v})$  满足以下不等式:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \left[ \left( \rho \varepsilon(\rho) + \rho \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) \partial_t \varphi + \left( \rho \varepsilon(\rho) + \rho \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + p(\rho) \right) \mathbf{v} \cdot \nabla_x \varphi \right] dx dt \\ & + \int_{\mathbb{R}^2} \left( \rho^0(x) \varepsilon(\rho^0(x)) + \rho^0(x) \frac{|\mathbf{v}^0(x)|^2}{2} \right) \varphi(x, 0) dx \geq 0 \end{aligned} \tag{12}$$

我们就称  $(\rho, \mathbf{v})$  是(1)的可容许弱解。

接下来, 我们介绍中引入的下解的定义。

**定义 2.3** (扇形分区) 空间  $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$  的扇形分区包含三个部分  $P_-, P_1, P_+$ , 具体形式如下:

$$P_- = \{(x, t) : t > 0, x_2 < v_- t\}$$

$$P_1 = \{(x, t) : t > 0, v_- t < x_2 < v_+ t\}$$

$$P_+ = \{(x, t) : t > 0, x_2 > v_+ t\}$$

其中  $v_- < v_+$ , 且  $v_-, v_+$  是一对实数。

通过空间的划分, 我们就可以得到如下的扇形下解。其中,  $S_0^{2 \times 2}$  表示对称无迹  $2 \times 2$  矩阵的集合,  $Id$  为单位矩阵。

**定义 2.4** (扇形下解) 当  $(\bar{\rho}, \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{u}}) : \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2, S_0^{2 \times 2})$  满足如下条件时:

1) 在  $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$  的扇形分区  $P_-, P_1, P_+$  下, 有

$$(\bar{\rho}, \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{u}}) = (\rho_-, \mathbf{v}_-, \mathbf{u}_-) \mathbf{1}_{P_-} + (\rho_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1) \mathbf{1}_{P_1} + (\rho_+, \mathbf{v}_+, \mathbf{u}_+) \mathbf{1}_{P_+}$$

其中  $\rho_\pm, \mathbf{v}_\pm, \mathbf{u}_\pm$  是常量并且  $\rho_\pm > 0$ ,  $\mathbf{u}_\pm = \mathbf{v}_\pm \otimes \mathbf{v}_\pm - \frac{1}{2} |\mathbf{v}_\pm|^2 Id$ ;

2) 存在一个正数  $C$  使得

$$\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1 < \frac{C}{2} Id$$

3)  $(\bar{\rho}, \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{u}})$  在分布上满足如下等式:

$$\partial_t \bar{\rho} + \operatorname{div}_x(\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) = 0 \tag{13}$$

$$\partial_t(\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) + \operatorname{div}_x(\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}) + \nabla_x \left( p(\bar{\rho}) + \frac{1}{2} (C \rho_1 \mathbf{1}_{R_1} + \bar{\rho} |\bar{\mathbf{v}}|^2 \mathbf{1}_{R_+ \cup R_-}) \right) = 0 \tag{14}$$

此时, 就称  $(\bar{\rho}, \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{u}})$  为(1)的扇形下解。

**定义 2.5** (可容许扇形下解) 当扇形下解  $(\bar{\rho}, \bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{u}})$  在分布上满足如下不等式:

$$\begin{aligned} & \partial_t(\bar{\rho} \varepsilon(\bar{\rho})) + \operatorname{div}_x \left[ (\bar{\rho} \varepsilon(\bar{\rho}) + p(\bar{\rho})) \bar{\mathbf{v}} \right] + \partial_t \left( \bar{\rho} \frac{|\bar{\mathbf{v}}|^2}{2} \mathbf{1}_{R_+ \cup R_-} \right) + \operatorname{div}_x \left( \bar{\rho} \frac{|\bar{\mathbf{v}}|^2}{2} \mathbf{1}_{R_+ \cup R_-} \right) \\ & + \left[ \partial_t \left( \rho_1 \frac{C}{2} \mathbf{1}_{R_1} \right) + \operatorname{div}_x \left( \rho_1 \bar{\mathbf{v}} \frac{C}{2} \mathbf{1}_{R_1} \right) \right] \leq 0 \end{aligned} \tag{15}$$

则称其为可容许扇形下解。

如同, 我们寻找二维黎曼问题的一个一维解, 即函数  $\rho(x_2, t)$  和  $\mathbf{m}(x_2, t) = \rho(x_2, t) \mathbf{v}(x_2, t) = (m_1(x_2, t), m_2(x_2, t))$  满足二维等熵可压欧拉方程组:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_{x_2} m_2 = 0 \\ \partial_t m_1 + \partial_{x_2} \frac{m_1 m_2}{\rho} = 0 \\ \partial_t m_2 + \partial_{x_2} \left( \frac{m_2^2}{\rho} + p(\rho) \right) = 0 \end{cases} \tag{16}$$

其初值为

$$(\rho^0(x), \mathbf{m}^0(x)) := \begin{cases} (\rho_-, \mathbf{m}_-) = (\rho_-, \rho_- \mathbf{v}_-), & x_2 < 0 \\ (\rho_+, \mathbf{m}_+) = (\rho_+, \rho_+ \mathbf{v}_+), & x_2 > 0 \end{cases}$$

该系统可以写成一维的双曲守恒定律:

$$\partial_t U + \partial_{x_2} F(U) = 0$$

其中向量

$$U := (\rho, m_1, m_2)$$

$$F(U) := \begin{pmatrix} m_2 \\ \frac{m_1 m_2}{\rho} \\ \frac{m_2^2}{\rho} + p(\rho) \end{pmatrix}$$

当  $\rho > 0$  时, (16) 是严格双曲的, 此时雅可比矩阵  $DF(U)$

$$F(U) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{-m_1 m_2}{\rho} & \frac{m_2}{\rho} & \frac{m_1}{\rho} \\ \frac{-m_2^2}{\rho^2} + p'(\rho) & 0 & \frac{2m_2}{\rho} \end{pmatrix}$$

有三个特征值

$$\lambda_1 = \frac{m_2}{\rho} - \sqrt{p'(\rho)}, \lambda_2 = \frac{m_2}{\rho}, \lambda_3 = \frac{m_2}{\rho} + \sqrt{p'(\rho)} \tag{17}$$

和三个线性无关的特征向量

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{m_1}{\rho} \\ \frac{m_2}{\rho} - \sqrt{p'(\rho)} \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, R_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{m_1}{\rho} \\ \frac{m_2}{\rho} + \sqrt{p'(\rho)} \end{pmatrix}$$

由双曲守恒律经典理论, 2-特征场是线性退化的, 而 1-和 3-特征场是真正非线性的。由于  $m_1$  和  $m_2$  的方程解耦, 我们可以进一步把(16)简化成以下简单的系统(为了简化符号, 我们用  $m$  代替  $m_2$ ):

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_{x_2} m = 0 \\ \partial_t m + \partial_{x_2} \left( \frac{m^2}{\rho} + p(\rho) \right) = 0 \end{cases} \tag{18}$$

其初值为

$$(\rho^0(x), m^0(x)) := \begin{cases} (\rho_-, m_-) = (\rho_-, \rho_- v_-), & x_2 < 0 \\ (\rho_+, m_+) = (\rho_+, \rho_+ v_+), & x_2 > 0 \end{cases} \tag{19}$$

### 3. 一些引理和命题

在本节中, 我们回顾文献[7]中关于激波可容许条件和黎曼问题的解的一些结果。

系统(18)激波的 Rankine-Hugoniot 条件可以写成: 左侧状态  $(\rho_-, m_-)$  和右侧状态  $(\rho_+, m_+)$ , (此时  $\rho_{\pm} > 0$ ) 可被传播速度为  $s \in \mathbb{R}, s \neq 0$  的激波相连接, 当且仅当

$$s(\rho_+ - \rho_-) = m_+ - m_- \tag{20}$$

$$s(m_+ - m_-) = \frac{m_+^2}{\rho_+} - \frac{m_-^2}{\rho_-} + p(\rho_+) - p(\rho_-) \tag{21}$$

通过化简  $s$ , 我们可以得到

$$\rho_+ \rho_- (v_+ - v_-)^2 = (\rho_+ - \rho_-)(p(\rho_+) - p(\rho_-)) \tag{22}$$

此时  $v_{\pm} = \frac{m_{\pm}}{\rho_{\pm}}$ 。

对欧拉方程使用熵不等式(2), 则激波是可容许的当且仅当(为了方便, 我们使用  $\rho v$  代替  $m$ )

$$s \left( \rho_- \varepsilon(\rho_-) - \rho_+ \varepsilon(\rho_+) + \frac{\rho_- v_-^2}{2} - \frac{\rho_+ v_+^2}{2} \right) (\rho_- \varepsilon(\rho_-) + p(\rho_-)) v_- - (\rho_+ \varepsilon(\rho_+) + p(\rho_+)) v_+ + \frac{\rho_- v_-^3}{2} - \frac{\rho_+ v_+^3}{2}$$

结合(21), 上述不等式可以简化为

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_- v_- - \rho_+ v_+}{\rho_- - \rho_+} \left( \rho_- \varepsilon(\rho_-) - \rho_+ \varepsilon(\rho_+) + \frac{\rho_- v_-^2}{2} - \frac{\rho_+ v_+^2}{2} \right) \\ & \leq (\rho_- \varepsilon(\rho_-) + p(\rho_-)) v_- - (\rho_+ \varepsilon(\rho_+) + p(\rho_+)) v_+ + \frac{\rho_- v_-^3}{2} - \frac{\rho_+ v_+^3}{2} \end{aligned}$$

因此,

$$\frac{\rho_- \rho_+ (v_- - v_+)^2 (v_- + v_+)}{2(\rho_- + \rho_+)} \leq (p(v_-) v_- - p(\rho_+) v_+) + \frac{\rho_- \rho_+ (v_- v_+) (\varepsilon(\rho_+) - \varepsilon(\rho_-))}{\rho_- - \rho_+}$$

加上之前得到的式子(22), 我们可以得到可容许性条件为:

$$(v_- - v_+) \left( p(\rho_-) + p(\rho_+) - 2\rho_- \rho_+ \frac{\varepsilon(\rho_-) - \varepsilon(\rho_+)}{\rho_- - \rho_+} \right) \leq 0 \tag{23}$$

类似于[7], 下面的引理对研究可容许激波非常重要。这里压强项与中不同, 因此证明过程有所不同。

**引理 3.1** 对任意的  $\rho_- \neq \rho_+, \rho_{\pm} > 0$ , 压强项  $p(\rho) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^*}\right)^\gamma}$  ( $\gamma \geq 1$ ) 满足

$$p(\rho_-) + p(\rho_+) - 2\rho_- \rho_+ \frac{\varepsilon(\rho_+) - \varepsilon(\rho_-)}{\rho_+ - \rho_-} > 0 \tag{24}$$

**证明**由定义

$$p(\rho) = \rho^2 \varepsilon'(\rho)$$

因此可以得到

$$\varepsilon'(\rho) = \frac{p(\rho)}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^2 \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^*}\right)^\gamma}$$

下面分别讨论  $\gamma = 1$  和  $\gamma > 1$  两种情况:

1) 当  $\gamma > 1$  时

$$\varepsilon(\rho) = \frac{1}{\gamma - 1} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^*} \right)^{1-\gamma}$$

于是有

$$\begin{aligned} & p(\rho_-) + p(\rho_+) - 2\rho_- \rho_+ \frac{\varepsilon(\rho_+) - \varepsilon(\rho_-)}{\rho_+ - \rho_-} \\ & = \frac{1}{\left(\frac{1}{\rho_-} - \frac{1}{\rho^*}\right)^\gamma} + \frac{1}{\left(\frac{1}{\rho_+} - \frac{1}{\rho^*}\right)^\gamma} - 2\rho_- \rho_+ \frac{\left(\frac{1}{\rho_+} - \frac{1}{\rho^*}\right)^{1-\gamma} - \left(\frac{1}{\rho_-} - \frac{1}{\rho^*}\right)^{1-\gamma}}{(\gamma - 1)(\rho_+ - \rho_-)} \end{aligned} \tag{25}$$

令  $x = \frac{1}{\rho_-} - \frac{1}{\rho^*}$ ,  $y = \frac{1}{\rho_+} - \frac{1}{\rho^*}$ , 那么就有  $x - y = \frac{1}{\rho_-} - \frac{1}{\rho_+} = \frac{\rho_+ - \rho_-}{\rho_+ \rho_-}$ 。一般地, 假设  $\rho^* > \rho_+ > \rho_-$ , (另一种情况用类似的方法)可以得到  $x > y > 0$ , 那么(25)可以写成

$$p(\rho_-) + p(\rho_+) - 2\rho_- \rho_+ \frac{\varepsilon(\rho_+) - \varepsilon(\rho_-)}{\rho_+ - \rho_-} = \frac{1}{x^\gamma} + \frac{1}{y^\gamma} - \frac{2}{\gamma - 1} \frac{1}{x - y} (y^{1-\gamma} - x^{1-\gamma})$$

因此, (24)等价于

$$(\gamma - 1)(x - y)(y^\gamma + x^\gamma) - 2(x^\gamma y - xy^\gamma) > 0$$

经过化简, 可以得到

$$(\gamma - 1)(x^{\gamma+1} - y^{\gamma+1}) - (\gamma + 1)(x^\gamma y - xy^\gamma) > 0$$

令  $z = \frac{x}{y} > 1$ , 我们可以得到

$$(\gamma - 1)(z^{\gamma+1} - 1) - (\gamma + 1)z(z^{\gamma-1} - 1) > 0$$

令  $f(z) = (\gamma - 1)(z^{\gamma+1} - 1) - (\gamma + 1)z(z^{\gamma-1} - 1)$ , 即证明当  $z > 1$  时,  $f(z) > 0$ 。通过对  $f(z)$  进行二次求导, 得

$$f''(z) = \gamma(\gamma^2 - 1)z^{\gamma-2}(z - 1)$$

又因为当  $z > 1$  时,  $f(1) = f'(1) = 0$ ,  $f''(z) > 0$ , 可得在区间  $(1, \infty)$  上,  $f(z)$  是单调递增的凸函数。因此证得在  $z > 1$  时,  $f(z) > 0$ 。

2) 当  $\gamma = 1$  时

$$\varepsilon(\rho) = \ln \frac{1}{\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho^*}\right)}$$

于是有

$$\begin{aligned} & p(\rho_-) + p(\rho_+) - 2\rho_- \rho_+ \frac{\varepsilon(\rho_+) - \varepsilon(\rho_-)}{\rho_+ - \rho_-} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\rho_-} - \frac{1}{\rho^*}} + \frac{1}{\frac{1}{\rho_+} - \frac{1}{\rho^*}} - 2\rho_- \rho_+ \frac{\ln\left(\frac{1}{\rho_-} - \frac{1}{\rho^*}\right) - \ln\left(\frac{1}{\rho_+} - \frac{1}{\rho^*}\right)}{\rho_+ - \rho_-} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{x - y} \ln \frac{x}{y} \end{aligned}$$

类似地, 我们需要讨论以下式子

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{x - y} \ln \frac{x}{y} > 0 \Leftrightarrow \\ & (x - y)xy \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) - 2xy \ln \frac{x}{y} > 0 \Leftrightarrow \\ & (x^2 - y^2) - 2xy \ln \frac{x}{y} > 0 \end{aligned}$$

对  $g(z) = (z^2 - 1) - 2z \ln z$  进行二次求导, 可以得到  $g''(z) = 2 - \frac{2}{z}$ 。与  $\gamma > 1$  的情况类似, 可以证得在

$z > 1$  时,  $g(z) > 0$ 。

因此, 在两种情况下都可以证得(24)成立。

通过引理 3.1 和(23)可知, 连接  $(\rho_-, \rho_- v_-)$  和  $(\rho_+, \rho_+ v_+)$  的波是可容许的, 当且仅当

$$v_- \geq v_+ \tag{26}$$

下面[7]中的引理描述了黎曼问题的解。

**引理 3.2**  $\rho_{\pm}, v_{\pm}$  是常数且  $\rho_{\pm} > 0$ , 为了简单起见, 假设  $(\rho_-, \rho_- v_-)$  和  $(\rho_+, \rho_+ v_+)$  不位于任何的简单  $i$  波曲线上。

1) 如果

$$v_+ - v_- \geq \int_0^{\rho_-} \frac{\sqrt{p'(\tau)}}{\tau} d\tau + \int_0^{\rho_+} \frac{\sqrt{p'(\tau)}}{\tau} d\tau$$

那么黎曼问题(18)~(19)存在唯一的自相似解, 其由 1-稀疏波和 3-稀疏波组成的, 中间状态是真空, 即  $\rho_m = 0$ 。

2) 如果

$$\left| \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{\sqrt{p'(\tau)}}{\tau} d\tau \right| < v_+ - v_- < \int_0^{\rho_-} \frac{\sqrt{p'(\tau)}}{\tau} d\tau + \int_0^{\rho_+} \frac{\sqrt{p'(\tau)}}{\tau} d\tau$$

那么黎曼问题(18)~(19)存在唯一自相似解, 其由 1-稀疏波和 3-稀疏波组成的。中间状态  $(\rho_m, \rho_m v_m)$  由如下方程组唯一给出

$$\begin{aligned} v_+ - v_- &= \int_{\rho_m}^{\rho_-} \frac{\sqrt{p'(\tau)}}{\tau} d\tau + \int_{\rho_m}^{\rho_+} \frac{\sqrt{p'(\tau)}}{\tau} d\tau \\ v_m &= v_- + \int_{\rho_m}^{\rho_-} \frac{\sqrt{p'(\tau)}}{\tau} d\tau \end{aligned}$$

3) 如果  $\rho_- > \rho_+$  并且有

$$-\sqrt{\frac{(\rho_- - \rho_+)(p(\rho_-) - p(\rho_+))}{\rho_- \rho_+}} < v_+ - v_- < \int_{\rho_+}^{\rho_-} \frac{\sqrt{p'(\tau)}}{\tau} d\tau$$

那么黎曼问题(18)~(19)有一个唯一的自相似解, 其由 1-稀疏波和可容许 3-激波组成的。中间状态  $(\rho_m, \rho_m v_m)$  由如下方程组唯一给出

$$\begin{aligned} v_+ - v_- &= \int_{\rho_m}^{\rho_-} \frac{\sqrt{p'(\tau)}}{\tau} d\tau - \sqrt{\frac{(\rho_m - \rho_+)(p(\rho_m) - p(\rho_+))}{\rho_m \rho_+}} \\ v_m &= v_- + \int_{\rho_m}^{\rho_-} \frac{\sqrt{p'(\tau)}}{\tau} d\tau \end{aligned}$$

4) 如果  $\rho_- < \rho_+$  并且有

$$-\sqrt{\frac{(\rho_+ - \rho_-)(p(\rho_+) - p(\rho_-))}{\rho_+ \rho_-}} < v_+ - v_- < \int_{\rho_-}^{\rho_+} \frac{\sqrt{p'(\tau)}}{\tau} d\tau$$

那么黎曼问题(18)~(19)有唯一自相似解, 该解由一个可容许 1-激波和一个 3-稀疏波组成。中间状态  $(\rho_m, \rho_m v_m)$  由以下方程组唯一给出

$$v_+ - v_- = \int_{\rho_m}^{\rho_+} \frac{\sqrt{p'(\tau)}}{\tau} d\tau - \sqrt{\frac{(\rho_m - \rho_-)(p(\rho_m) - p(\rho_-))}{\rho_m \rho_-}}$$

$$v_m = v_- - \sqrt{\frac{(\rho_m - \rho_-)(p(\rho_m) - p(\rho_-))}{\rho_m \rho_-}}$$

5) 如果

$$v_+ - v_- < \sqrt{\frac{(\rho_+ - \rho_-)(p(\rho_+) - p(\rho_-))}{\rho_+ \rho_-}}$$

那么黎曼问题(18)~(19)存在唯一自相似解, 其由一个可容许 1-激波和一个可容许 3-激波组成的。中间状态  $(\rho_m, \rho_m v_m)$  由以下方程组唯一给出

$$v_+ - v_- = \sqrt{\frac{(\rho_m - \rho_-)(p(\rho_m) - p(\rho_-))}{\rho_+ m \rho_-}} - \sqrt{\frac{(\rho_m - \rho_+)(p(\rho_m) - p(\rho_+))}{\rho_m \rho_+}}$$

$$v_m = v_- - \sqrt{\frac{(\rho_m - \rho_-)(p(\rho_m) - p(\rho_-))}{\rho_+ m \rho_-}}$$

与[7]相似, 本文利用下述定理, 将柯西问题无穷多解的存在性约化为证明一个可容许的扇形域下解的存在。

**命题 3.1** [7] 设  $p$  为任意  $C^1$  函数, 若黎曼问题(1)~(4)存在至少一个可容许扇形域下解  $(\bar{\rho}, \bar{v}, \bar{u})$ , 则(1)~(4)存在无穷多个有界可容许解  $(\rho, v)$  使  $\rho = \bar{\rho}$  且  $|v|^2 \mathbf{1}_R = C$ 。

该命题由以下引理证明得出。

**引理 3.3** [7] 令  $(\tilde{v}, \tilde{u}) \in \mathbb{R}^2 \times S_0^{2 \times 2}$  且  $C_0 > 0$ , 满足  $\tilde{v} \otimes \tilde{v} - \tilde{u} < \frac{C_0}{2} Id$ 。对于任意开集  $\Omega \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ , 存在无穷多个满足如下性质的映射  $(\underline{v}, \underline{u}) \in L^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^2 \times S_0^{2 \times 2})$

- a)  $\underline{v}$  和  $\underline{u}$  在  $\Omega$  外恒等;
- b)  $div_x \underline{v} = 0$  并且  $\partial_t \underline{v} + div_x \underline{u} = 0$ ;
- c)  $(\tilde{v} + \bar{v}) \otimes (\tilde{v} + \bar{v}) - (\tilde{u} + \bar{u}) = \frac{C_0}{2} Id$  在  $\Omega$  内几乎处处成立。

由于这些命题的证明不依赖于压强项的具体结构, 并且定理 1.2 保证了我们需要的所有有界性, 这些结果可以应用于本文研究的情形。

#### 4. 定理 1.1 的证明

由命题 3.1, 我们只需要构造一个可容许的扇形下解, 具体构造如下。与[7]类似, 我们引入以下符号

$$v_1 = (\alpha, \beta)$$

$$v_- = (v_{-1}, v_{-2})$$

$$v_+ = (v_{+1}, v_{+2})$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 \end{pmatrix}$$

那么可容许扇下解的定义就可以转化为以下代数恒等式和不等式集。

**命题 4.1** [7] 设  $P_-, P_1, P_+$  为定义 2.3 中规定的扇形分区。常数  $v_1, v_-, v_+, u_1, \rho_-, \rho_+, \rho_1$  定义了一个可容许的扇形下解, 当且仅当下列恒等式和不等式成立:

1) 左界面 Rankine-Hugoniot 条件:

$$v_-(\rho_- - \rho_1) = \rho_- v_{-2} - \rho_1 \beta \tag{27}$$

$$v_-(\rho_- v_{-1} - \rho_1 \alpha) = \rho_- v_{-1} v_{-2} - \rho_1 \gamma_2 \tag{28}$$

$$v_-(\rho_- v_{-2} - \rho_1 \beta) = \rho_- v_{-2}^2 + \rho_1 \gamma_1 + p(\rho_-) - p(\rho_1) - \rho_1 \frac{C}{2} \tag{29}$$

2) 右界面 Rankine-Hugoniot 条件:

$$v_+(\rho_1 - \rho_+) = \rho_1 \beta - \rho_+ v_{+2} \tag{30}$$

$$v_+(\rho_1 \alpha - \rho_+ v_{+1}) = \rho_1 \gamma_2 - \rho_+ v_{+1} v_{+2} \tag{31}$$

$$v_+(\rho_1 \beta - \rho_+ v_{+2}) = -\rho_1 \gamma_1 - \rho_+ v_{+2}^2 + p(\rho_1) - p(\rho_+) + \rho_1 \frac{C}{2} \tag{32}$$

3) 下解条件:

$$\alpha^2 + \beta^2 < C \tag{33}$$

$$\left(\frac{C}{2} - \alpha^2 + \gamma_1\right)\left(\frac{C}{2} - \beta^2 - \gamma_1\right) - (\gamma_2 - \alpha\beta)^2 > 0 \tag{34}$$

4) 左界面可容许性条件:

$$\begin{aligned} & v_-(\rho_- \varepsilon(\rho_-) - \rho_1 \varepsilon(\rho_1)) + v_- \left( \rho_- \frac{|v_-|^2}{2} - \rho_1 \frac{C}{2} \right) \\ & \leq [(\rho_- \varepsilon(\rho_-) + p(\rho_-))v_{-2} - (\rho_1 \varepsilon(\rho_1) + p(\rho_1))\beta] + \left( \rho_- v_{-2} \frac{|v_-|^2}{2} - \rho_1 \beta \frac{C}{2} \right) \end{aligned} \tag{35}$$

5) 右界面可容许性条件:

$$\begin{aligned} & v_+(\rho_1 \varepsilon(\rho_1) - \rho_+ \varepsilon(\rho_+)) + v_+ \left( \rho_1 \frac{C}{2} - \rho_+ \frac{|v_+|^2}{2} \right) \\ & \leq [(\rho_1 \varepsilon(\rho_1) + p(\rho_1))\beta - (\rho_+ \varepsilon(\rho_+) + p(\rho_+))v_{+2}] + \left( \rho_1 \beta \frac{C}{2} - \rho_+ v_{+2} \frac{|v_+|^2}{2} \right) \end{aligned} \tag{36}$$

如文献[7]所述, 这些方程与不等式可以进一步简化。

**引理 4.1** 令  $v_{-1} = v_{+1}$ , 那么就有  $\alpha = v_{-1} = v_{+1}$  和  $\gamma_2 = \alpha\beta$ 。

**引理 4.2** [7] 下解存在的必要条件是  $\frac{C}{2} - \gamma_1 > \beta^2$ 。

令  $\varepsilon_1 = \frac{C}{2} - \gamma_1 - \beta^2$ ,  $\varepsilon_2 = C - \alpha^2 - \beta^2 - \varepsilon_1$ , 那么通过以上引理可以得到  $\varepsilon_1 > 0$ 。

**引理 4.3** [7] 在  $v_{-1} = v_{+1} = \alpha$  的情况下, 利用上述符号  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , 代数恒等式和不等式集(27)~(36)等价于

1) 左界面 Rankine-Hugoniot 条件:

$$v_-(\rho_- - \rho_1) = \rho_- v_{-2} - \rho_1 \beta \tag{37}$$

$$v_-(\rho_- v_{-2} - \rho_1 \beta) = \rho_- v_{-2}^2 - \rho_1 (\beta^2 + \varepsilon_1) + p(\rho_-) - p(\rho_1) \tag{38}$$

2) 右界面 Rankine-Hugoniot 条件:

$$v_+(\rho_1 - \rho_+) = \rho_1\beta - \rho_+v_{+2} \tag{39}$$

$$v_+(\rho_1\beta - \rho_+v_{+2}) = \rho_1(\beta^2 + \varepsilon_1) - \rho_+v_{+2}^2 + p(\rho_1) - p(\rho_+) \tag{40}$$

3) 下解条件:

$$\varepsilon_1 > 0 \tag{41}$$

$$\varepsilon_2 > 0 \tag{42}$$

4) 左界面可容许性条件:

$$(\beta - v_{-2}) \left( p(\rho_-) + p(\rho_1) - 2\rho_- \rho_1 \frac{\varepsilon(\rho_-) - \varepsilon(\rho_1)}{\rho_- - \rho_1} \right) \leq \varepsilon_1 \rho_1 (v_{-2} + \beta) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{\rho_- \rho_1 (\beta - v_{-2})}{\rho_- - \rho_1} \tag{43}$$

5) 右界面可容许性条件:

$$(v_{+2} - \beta) \left( p(\rho_1) + p(\rho_+) - 2\rho_1 \rho_+ \frac{\varepsilon(\rho_1) - \varepsilon(\rho_+)}{\rho_1 - \rho_+} \right) \leq -\varepsilon_1 \rho_1 (v_{+2} + \beta) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{\rho_1 \rho_+ (v_{+2} - \beta)}{\rho_1 - \rho_+}; \tag{44}$$

证明详见文献[7]。接下来, 我们采用类似于的符号, 将上述方程简化, 并以  $\rho_1$  为参数求解:

$$R := \rho_- - \rho_+ \tag{45}$$

$$A := \rho_- v_{-2} - \rho_+ v_{+2} \tag{46}$$

$$H := \rho_- v_{-2}^2 - \rho_+ v_{+2}^2 + p(\rho_-) - p(\rho_+) \tag{47}$$

将式子(37)与(39)相加得到

$$v_- = \frac{A - v_+(\rho_1 - \rho_+)}{\rho_- - \rho_1} \tag{48}$$

将式子(38)与(40)相加得到

$$v_-^2(\rho_- - \rho_1) + v_+^2(\rho_1 - \rho_+) = H \tag{49}$$

我们考虑两种情况:  $R = 0$  和  $R \neq 0$ 。

1)  $R \neq 0$ 。通过(48)和(49)可以得到  $v_+$  的两个解:

$$v_+ = \frac{A}{R} \pm \frac{1}{R} \sqrt{(A^2 - RH) \frac{\rho_1 - \rho_-}{\rho_1 - \rho_+}} \tag{50}$$

我们选择合适的符号, 即  $v_- < v_+$ , 令  $B := A^2 - RH$  以及  $u := v_{+2} - v_{-2}$ , 可以得到:

$$B = \rho_- \rho_+ u^2 - (\rho_- - \rho_+) (p(\rho_-) - p(\rho_+)) \tag{51}$$

由定理 1.1 所给条件可以得到  $B > 0$ 。令  $\rho_1 > \max(\rho_-, \rho_+)$ , 可以得到

$$v_- = \frac{A}{R} - \frac{\sqrt{B}}{R} \sqrt{\frac{\rho_1 - \rho_+}{\rho_1 - \rho_-}}$$

$$v_+ = \frac{A}{R} - \frac{\sqrt{B}}{R} \sqrt{\frac{\rho_1 - \rho_-}{\rho_1 - \rho_+}}$$

当  $R > 0$  时, 通过(37)和(38)可以表示  $\varepsilon_1$ :

$$\varepsilon_1 = \left( \frac{\rho_+ u}{R} + \frac{\sqrt{B}}{R} \sqrt{\frac{\rho_1 - \rho_+}{\rho_1 - \rho_-}} \right)^2 \frac{\rho_- (\rho_1 - \rho_-)}{\rho_1^2} - \frac{p(\rho_1) - p(\rho_-)}{\rho_1} \quad (52)$$

同时, 当  $R < 0$  时, 通过(39)和(40)可以表示  $\varepsilon_1$ :

$$\varepsilon_1 = \left( \frac{\rho_- u}{R} + \frac{\sqrt{B}}{R} \sqrt{\frac{\rho_1 - \rho_-}{\rho_1 - \rho_+}} \right)^2 \frac{\rho_+ (\rho_1 - \rho_+)}{\rho_1^2} - \frac{p(\rho_1) - p(\rho_+)}{\rho_1} \quad (53)$$

由于上述对称性, 接下来我们主要考虑  $R > 0$  的情况。

2)  $R = 0$ , 即  $\rho_- = \rho_+$ , 类似可得

$$v_- = \frac{v_{-2} + v_{+2}}{2} - \frac{\rho_- |u|}{2(\rho_1 - \rho_-)} \quad (54)$$

$$v_+ = \frac{v_{-2} + v_{+2}}{2} + \frac{\rho_- |u|}{2(\rho_1 - \rho_-)} \quad (55)$$

$$\beta = \frac{v_{-2} + v_{+2}}{2} \quad (56)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\rho_- u^2}{4(\rho_1 - \rho_-)} - \frac{p(\rho_1) - p(\rho_-)}{\rho_1} \quad (57)$$

与文献[7]中引理 4.5 类似, 我们需要如下重要引理。

**引理 4.4** 存在唯一的  $\rho_{\max} = \rho_{\max}(\rho_-, \rho_+, u)$  使得

$$\varepsilon_1 > 0 \quad \rho_1 \in (\max\{\rho_-, \rho_+\}, \rho_{\max}) \quad (58)$$

$$\varepsilon_1 < 0 \quad \rho_1 \in (\rho_{\max}, \rho_*) \quad (59)$$

而且  $\rho_{\max} = \rho_m$ , 其中  $(\rho_m, \rho_m v_m)$  是引理 3.2 给出的连接左状态  $(\rho_-, \rho_- v_-)$  和右状态  $(\rho_+, \rho_+ v_{+2})$  的自相似解的中间状态。

**注 4.1** 该引理的证明与压强项的形式有关, 因此与[7]的证明略有不同。

**证明:**

当  $R = 0$  时, 此时  $\varepsilon_1$  用(57)表示, 可以看出  $\varepsilon_1$  是严格递减的。且当  $\rho_1 \rightarrow \rho_-$  时,  $\varepsilon_1$  趋向于  $+\infty$ ; 当  $\rho_1 \rightarrow \rho_*$  时,  $\varepsilon_1$  趋向于  $-\infty$ , 从而结论得证。

当  $R > 0$  时, 此时  $\varepsilon_1$  用(52)表示。因为涉及压强的最后一项明显单调递增, 且  $\rho_1 = \rho_-$  时,  $\varepsilon_1 > 0$ , 因此只需证明前一项在  $(\rho_-, \rho_*)$  内严格递减。

先假设

$$u^2 \geq \frac{p(\rho_-) - p(\rho_+)}{\rho_+}$$

即  $\sqrt{B} \geq \rho_+ |u|$ 。定义一个辅助函数

$$\tilde{\varepsilon}_1(\rho_1) := \left( \sqrt{B} \sqrt{1 - \frac{\rho_+}{\rho_1}} - \rho_+ |u| \sqrt{1 - \frac{\rho_-}{\rho_1}} \right)^2$$

由假设  $\sqrt{B} \geq \rho_+ |u|$  可知, 对于所有  $\rho_1 > \rho_-$ ,  $f(\rho_1) = \sqrt{B} \sqrt{1 - \frac{\rho_+}{\rho_1}} - \rho_+ |u| \sqrt{1 - \frac{\rho_-}{\rho_1}}$  明显为正。注意到

$$\rho_- \rho_+ |u|^2 - (\rho_- - \rho_+) (p(\rho_-) - p(\rho_+)) = B < \rho_-^2 |u|^2$$

可以得在  $(\rho_-, \rho_*)$  上,  $f'(\rho_1) < 0$ 。因此, 在  $(\rho_-, \rho_*)$  上,  $\tilde{\varepsilon}_1(\rho_1)$  和  $\varepsilon_1(\rho_1)$  单调递减。注意到  $\rho_1 \rightarrow \rho_*$  时,  $\varepsilon_1$  趋向于  $-\infty$ , 即有  $\rho_1 \rightarrow \rho_*$  时,  $\varepsilon_1(\rho_1) < 0$ 。

另一方面, 假设

$$u^2 < \frac{p(\rho_-) - p(\rho_+)}{\rho_+}$$

即  $\sqrt{B} < \rho_+ |u|$ , 那么存在  $\tilde{\rho}$  使得

$$\sqrt{B} \sqrt{1 - \frac{\rho_+}{\tilde{\rho}}} = \rho_+ |u| \sqrt{1 - \frac{\rho_-}{\tilde{\rho}}}$$

在区间  $(\rho_-, \tilde{\rho})$  内的证明与上一段的证明相似。同时, 由于  $\varepsilon_1(\tilde{\rho}) = -\frac{p(\tilde{\rho}) - p(\rho_-)}{\tilde{\rho}} < 0$ , 故只需证明  $\varepsilon_1(\rho)$  在  $(\tilde{\rho}, \rho_*)$  内始终为负, 也就是

$$\left( \rho_+ |u| - \sqrt{B} \sqrt{\frac{\rho_1 - \rho_+}{\rho_1 - \rho_-}} \right)^2 < \frac{p(\rho_1) - p(\rho_-)}{\rho_1 - \rho_-} \frac{\rho_1 R^2}{\rho_-}$$

对于某个  $\xi \in (\rho_+, \rho_-)$ , 有  $p(\rho_-) - p(\rho_+) = p'(\xi)(\rho_- - \rho_+)$ , 于是容易证明

$$\left( \rho_+ |u| - \sqrt{B} \right)^2 \leq \sup_{|u|} \left( \rho_+ |u| - \sqrt{B} \right)^2 = \frac{\rho_+}{\rho_-} (p(\rho_-) - p(\rho_+)) (\rho_- - \rho_+) = \frac{\rho_+}{\rho_-} p'(\xi) R^2 < p'(\rho_-) R^2$$

所以

$$\left( \rho_+ |u| - \sqrt{B} \sqrt{\frac{\rho_1 - \rho_+}{\rho_1 - \rho_-}} \right)^2 < \left( \rho_+ |u| - \sqrt{B} \right)^2 < p'(\rho_-) R^2 < \frac{p(\rho_1) - p(\rho_-)}{\rho_1 - \rho_-} \frac{\rho_1 R^2}{\rho_-}$$

证毕。

由于(52)和(53)中  $\rho_+, \rho_-$  的对称性,  $R < 0$  的情况可以用同样的方法证得。

**引理 4.5 [7]** 对于任意的  $u < -\sqrt{\frac{(\rho_- - \rho_+)(p(\rho_-) - p(\rho_+))}{\rho_- \rho_+}}$  和任意的  $\rho_1 \in (\max(\rho_-, \rho_+), \rho_{\max})$  则有

$$v_{-2} - v_- > 0 \tag{60}$$

$$v_+ - v_{+2} > 0 \tag{61}$$

该证明详见[7]。由(37)和(39)可以得到

$$\beta - v_- = \frac{\rho_-}{\rho_1} (v_{-2} - v_-) \tag{62}$$

$$v_{-2} - \beta = \frac{\rho_1 - \rho_-}{\rho_1} (v_{-2} - v_-) \tag{63}$$

$$v_+ - \beta = \frac{\rho_+}{\rho_1} (v_+ - v_{+2}) \tag{64}$$

$$\beta - v_{+2} = \frac{\rho_1 - \rho_+}{\rho_1} (v_+ - v_{+2}) \tag{65}$$

因此, 在区间  $(\max\{\rho_-, \rho_+\}, \rho_{\max})$  内, (62)~(65)等式左边都为正。我们令

$$P(r,s) := p(r) + p(s) - 2rs \frac{\varepsilon(r) - \varepsilon(s)}{r - s}$$

由引理 3.1, 可知  $P(r,s) > 0$  (当  $r \neq s$ ), 于是我们可以将(43)改写为

$$(v_- - v_{-2}) \frac{\rho_1 - \rho_-}{\rho_1} P(\rho_-, \rho_1) \leq \varepsilon_1 \rho_1 (v_{-2} + \beta) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \rho_- (v_- - v_{-2})$$

通过简单计算我们可以得到

$$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \rho_- (v_{-2} - v_-) \leq \varepsilon_1 \rho_1 (v_{-2} + \beta) + (v_{-2} - v_-) \frac{\rho_1 - \rho_-}{\rho_1} P(\rho_-, \rho_1)$$

因此

$$\varepsilon_2 < \frac{P(\rho_-, \rho_1)(\rho_1 - \rho_-)}{\rho_1 \rho_-} + \varepsilon_1 \frac{\rho_1 (v_{-2} + v_-)}{\rho_- (v_{-2} - v_-)} \tag{66}$$

同样地, 可以由(44)得到

$$\varepsilon_2 < \frac{P(\rho_+, \rho_1)(\rho_1 - \rho_+)}{\rho_1 \rho_+} - \varepsilon_1 \frac{\rho_1 (v_{+2} + v_+)}{\rho_- (v_{+2} - v_+)} \tag{67}$$

从而定理 1.1 结论在  $\rho_1 = \rho_{\max}$  时成立, 在  $\rho_{\max}$  的邻域上利用连续性则可证明定理 1.1.

### 5. 定理 1.2 的证明

由定理 1.1 的证明可知,  $\rho_1 < \rho_m$ ,  $\rho_m = \rho_{\max}$ 。其中  $\rho_{\max}$  是引理 4.4 中定义的。

为研究  $\rho_m$  在最大密度附近的渐近行为, 我们首先考虑  $R = \rho_- - \rho_+ > 0$  的情况。令(52)中的  $\varepsilon_1 = 0$ , 利用(51)中  $u$  和  $B$  的关系, 我们有

$$\frac{p(\rho_m) - p(\rho_-)}{\rho_m} = \left( -\sqrt{\frac{\rho_+}{\rho_-}} \sqrt{\frac{B}{(\rho_- - \rho_+)^2} + \frac{p(\rho_-) - p(\rho_+)}{\rho_- - \rho_+}} + \frac{\sqrt{B}}{\rho_- - \rho_+} \sqrt{\frac{\rho_m - \rho_+}{\rho_m - \rho_-}} \right)^2 \frac{\rho_- (\rho_m - \rho_-)}{\rho_m^2} \tag{68}$$

显而易见,  $\rho_m > \rho_-$ 。因此, 当  $\rho_-$  趋向于  $\rho_*$  时, 有  $\rho_m$  趋向于  $\rho_*$ 。重写上述等式为

$$p(\rho_m) - p(\rho_-) = \left( -\sqrt{\frac{\rho_+}{\rho_-}} \sqrt{\frac{B}{(\rho_- - \rho_+)^2} + \frac{p(\rho_-) - p(\rho_+)}{\rho_- - \rho_+}} \sqrt{\rho_m - \rho_-} + \frac{\sqrt{B}}{\rho_- - \rho_+} \sqrt{\rho_m - \rho_+} \right)^2 \frac{\rho_-}{\rho_m}$$

令  $z = \rho_* - \rho_m$ ,  $y = \rho_* - \rho_-$ ,  $x = \rho_* - \rho_+$ , 则有

$$\begin{aligned} & (\rho_* \rho_m)^\gamma z^{-\gamma} - (\rho_* \rho_-)^\gamma y^{-\gamma} \\ &= \left( -\sqrt{\frac{\rho_+}{\rho_-}} \sqrt{\frac{B}{(x-y)^2} + \frac{(\rho_* \rho_-)^\gamma y^{-\gamma} - (\rho_* \rho_+)^\gamma x^{-\gamma}}{x-y}} \sqrt{y-z} + \frac{\sqrt{B}}{x-y} \sqrt{x-z} \right)^2 \frac{\rho_-}{\rho_m} \\ &\Rightarrow \frac{(\rho_* \rho_-)^\gamma \rho_m}{\rho_-} \left[ \left( \frac{\rho_m y}{\rho_- z} \right)^\gamma - 1 \right] \\ &= \left( -\sqrt{\frac{\rho_+}{\rho_-}} \sqrt{\frac{B y^\gamma}{(x-y)^2} + \frac{(\rho_* \rho_-)^\gamma - (\rho_* \rho_+)^\gamma \left(\frac{y}{x}\right)^\gamma}{x-y}} \sqrt{z} \sqrt{\frac{y}{z} - 1} + \frac{\sqrt{B y^\gamma}}{x-y} \sqrt{x-z} \right)^2 \end{aligned}$$

当  $y \rightarrow 0$ , 我们有  $z \rightarrow 0$ ,  $y > z$ ,  $\frac{y}{z} \rightarrow 1$ 。我们可以估计上式中不同的项:

$$\left(\frac{\rho_m y}{\rho_- z}\right)^\gamma - 1 \sim \gamma \left(\frac{\rho_m y}{\rho_- z} - 1\right) = \gamma \left(\frac{(\rho_* - z)y - (\rho_* - y)z}{(\rho_* - y)z}\right) = \gamma \frac{\rho_* (y - z)}{(\rho_* - y)z} \sim \gamma \left(\frac{y}{z} - 1\right),$$

$$\sqrt{\frac{\rho_+}{\rho_-}} \sqrt{\frac{By^\gamma}{(x-y)^2} + \frac{(\rho_* \rho_-)^\gamma - (\rho_* \rho_+)^\gamma \left(\frac{y}{x}\right)^\gamma}{x-y}} \sqrt{z} \sqrt{\frac{y}{z} - 1} \sim \sqrt{\frac{\rho_+}{\rho_*}} \rho_*^\gamma \sqrt{\frac{z}{x}} \sqrt{\frac{y}{z} - 1}$$

为估计上述各项的极限, 我们利用以下命题:

**结论 5.1** 对一个常数  $k > 0$ , 若  $a, b$  同时趋向于 0, 且  $(a - bx)^2 = kx^2$ , 则有

$$x = \frac{a}{(b \pm \sqrt{k})} \sim \pm \frac{a}{\sqrt{k}}$$

该命题结论简单计算即可证明。

应用上述结论, 其中

$$x = \sqrt{\frac{y}{z} - 1}, b = \sqrt{\frac{\rho_+}{\rho_-}} \sqrt{\frac{By^\gamma}{(x-y)^2} + \frac{(\rho_* \rho_-)^\gamma - (\rho_* \rho_+)^\gamma \left(\frac{y}{x}\right)^\gamma}{x-y}} \sqrt{z} \sim \sqrt{\frac{\rho_+}{\rho_*}} \rho_*^\gamma \sqrt{\frac{z}{x}}$$

$$a = \frac{\sqrt{By^\gamma}}{x-y} \sqrt{x-z} \sim \sqrt{\frac{By^\gamma}{x}}, k = \gamma \frac{(\rho_* \rho_-)^\gamma \rho_m}{\rho_-} \rightarrow \gamma \rho_*^{2\gamma}$$

则我们可以得到

$$\sqrt{\frac{y}{z} - 1} \sim \frac{1}{\rho_*^\gamma} \sqrt{\frac{By^\gamma}{\gamma x}}$$

可以推得

$$y - z \sim \frac{By^{\gamma+1}}{\rho_*^{2\gamma} \gamma x}$$

也就是

$$\rho_m - \rho_- \sim \frac{B(\rho_* - \rho_-)^{\gamma+1}}{\rho_*^{2\gamma} \gamma (\rho_* - \rho_+)}$$

通过(52)和(53)的对称性, 在  $R < 0$  时我们可以得到类似的结论。

当  $R = \rho_- - \rho_+ = 0$  时, 通过在(57)中令  $\varepsilon_1 = 0$  以及应用(51)中  $u$  和  $B$  之间的关系, 我们可以得到

$$\frac{B}{4\rho_- (\rho_m - \rho_-)} = \frac{p(\rho_m) - p(\rho_-)}{\rho_m} \tag{69}$$

使用与之前相同的符号  $y = x > z$ , 我们可以得到

$$\frac{B\rho_m}{4\rho_- (y-z)} = \frac{(\rho_*^\gamma \rho_m^\gamma)}{z^\gamma} - \frac{(\rho_*^\gamma \rho_-^\gamma)}{y^\gamma}$$

简单计算可得

$$(y-z)^2 \sim \frac{By^{\gamma+1}}{4\rho_*^{2\gamma}\gamma}$$

也就是

$$\rho_m - \rho_- \sim \frac{1}{2\rho_*^\gamma} \sqrt{\frac{B(\rho_* - \rho_-)^{\gamma+1}}{\gamma}}$$

## 基金项目

本论文受中央高校基本科研业务费专项资金和国家自然科学基金(项目号 11301067)支持。

## 参考文献

- [1] Bressan, A. (2000) *Hyperbolic Systems of Conservation Laws: The One-Dimensional CAUCHY Problem* (Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications). Oxford University Press, Oxford.
- [2] Dafermos, C.M. (2010) *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics* (vol. 325). Springer-Verlag, Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-04048-1>
- [3] de Lellis, C. and Székelyhidi, L. (2010) On Admissibility Criteria for Weak Solutions of the Euler Equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **195**, No. 1, 225-260. <https://doi.org/10.1007/s00205-008-0201-x>
- [4] De Lellis, C. and Székelyhidi, L. (2009) The Euler Equations as a differential Inclusion. *Annals of Mathematics*, **170**, No. 3, 1417-1436. <https://doi.org/10.4007/annals.2009.170.1417>
- [5] Chiodaroli, E. (2014) A Counterexample to Well-Posedness of Entropy Solutions to the Compressible Euler System. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, **11**, No. 3, 493-519. <https://doi.org/10.1142/S0219891614500143>
- [6] Chiodaroli, E., De Lellis, C. and Kreml, O. (2015) Global Ill-Posedness of the Isentropic System of Gas Dynamics. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **68**, No. 7, 1157-1190. <https://doi.org/10.1002/cpa.21537>
- [7] Chiodaroli, E. and Kreml, O. (2014) On the Energy Dissipation Rate of Solutions to the Compressible Isentropic Euler System. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **214**, No. 3, 1019-1049. <https://doi.org/10.1007/s00205-014-0771-8>
- [8] Markfelder, S. and Klingenberg, C. (2018) The Riemann Problem for the Multidimensional Isentropic System of Gas Dynamics Is Ill-Posed if It Contains a Shock. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **227**, No. 3, 967-994. <https://doi.org/10.1007/s00205-017-1179-z>
- [9] Březina, J., Chiodaroli, E. and Kreml, O. (2018) Contact Discontinuities in Multi-Dimensional Isentropic Euler Equations. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2018**, No. 94, 1-11.
- [10] Feireisl, E., Klingenberg, C., Kreml, O. and Markfelder, S. (2020) On Oscillatory Solutions to the Complete Euler System. *Journal of Differential Equations*, **269**, No. 2, 1521-1543. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.01.018>
- [11] Al Baba, H., Klingenberg, C., Kreml, O., Mácha, V. and Markfelder, S. (2020) Nonuniqueness of Admissible Weak Solution to the Riemann Problem for the Full Euler System in Two Dimensions. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **52**, No. 2, 1729-1760. <https://doi.org/10.1137/18M1190872>
- [12] Feireisl, E., Klingenberg, C. and Markfelder, S. (2020) On the Density of “Wild” Initial Data for the Compressible Euler System. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **59**, No. 5, 152. <https://doi.org/10.1007/s00526-020-01806-5>
- [13] Berthelin, F., Degond, P., Le Blanc, V., Moutari, S., Rascle, M. and Royer, J. (2008) A Traffic-Flow Model with Constraints for the Modeling of Traffic Jams. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **18**, 1269-1298. <https://doi.org/10.1142/S0218202508003030>
- [14] Degond, P., LNavoret, L., Bon, R. and Sanchez, D. (2010) Congestion in a Macroscopic Model of self-Driven Particles Modeling Gregariousness. *Journal of Statistical Physics*, **138**, No. 1, 85-125. <https://doi.org/10.1007/s10955-009-9879-x>