Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(8), 2660-2672
Published Online August 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.108276

平面图的无圈边染色

贾 琪，朱洪国*

浙江师范大学数学与计算机科学学院，浙江 金华
Email: *zhuhongguo@zjnu.edu.cn

收稿日期：2021年7月2日；录用日期：2021年7月21日；发布日期：2021年8月4日

摘 要

对于图 G 的一个边染色 $c: E(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$，若满足任意两条相邻边都染不同的颜色，且图 G 不存在双色圈，则 c 称为图 G 的一个无圈 k-边染色。图 G 的无圈边色数为使得图 G 有一个无圈 k-边染色的最小正整数 k，用 $\chi_a'(G)$ 表示。本文主要证明了若图 G 是不含相邻 i-圈，且 5-，j-圈不邻的平面图，$i \in \{3, 4\}, j \in \{4, 6\}$，则 $\chi_a'(G) \leq \Delta(G) + 2$。

关键词

无圈边染色，平面图，圈

Acyclic Edge Coloring of Planar Graphs

Qi Jia, Hongguo Zhu*

College of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang
Email: *zhuhongguo@zjnu.edu.cn

Received: Jul. 2^{nd}, 2021; accepted: Jul. 21^{st}, 2021; published: Aug. 4^{th}, 2021

* 通讯作者。

文章引用: 贾琪, 朱洪国. 平面图的无圈边染色[J]. 应用数学进展, 2021, 10(8): 2660-2672.
DOI: 10.12677/aam.2021.108276

Abstract

A proper edge k-coloring is a mapping $c: E(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ such that any two adjacent edges receive different colors. A proper edge k-coloring c of G is called acyclic if there are no bichromatic cycles in G. The acyclic chromatic index of G, denoted by $\chi_a'(G)$, is the smallest integer k such that G is acyclically edge k-colorable. In this paper, we show that if G is a planar graph containing no adjacent i-cycles and without a 5-cycle adjacent to a j-cycle, $i \in \{3, 4\}, j \in \{4, 6\}$, then $\chi_a'(G) \le \Delta(G) + 2$.

Keywords

Acyclic Edge Coloring, Plane Graph, Cycle

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

Open Access

1. 引言

本文考虑有限简单图. 对于一个图 G, 把它顶点集、边集、面集、最大度、最小度及围长分别记作 $V(G)$, $E(G)$, $F(G)$, $\Delta(G)$ (简记为 Δ), $\delta(G)$, 及 $g(G)$, 对于平面图 G 的一个面 f, 若 $d(f) = k$ (或 $d(f) \ge k$, 或 $d(f) \le k$), 则称 f 为一个 k-面 (或 k^+-面, 或 k^--面). 对于平面图 G 的一个顶点 v, 若 $d(v) = k$ (或 $d(v) \ge k$, 或 $d(v) \le k$), 则称 v 为一个 k-点 (或 k^+-点, 或 k^--点). 图 G 的无圈 k-边染色是指映射$c: E(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$, 满足对任意两条相邻边 x, y, 有 $c(x) \ne c(y)$, 且图 G 不存在双色圈, 图 G 的无圈边色数为使得图 G 有一个无圈 k-边染色的最小正整数 k, 用 $\chi_a'(G)$ 表示.

Fiamčik 提出了一个关于平面图无圈边染色的著名猜想.

猜想1 [1]　对于任意平面图G, 有$\chi_a'(G) \le \Delta(G) + 2$.

这个猜想至今还没有被解决. 1991 年 *Alon*, *McDiarmid* 和 *Reed* [2]证明了对平面图 G, 有 $\chi_a'(G) \le 64\Delta$; 1998 年 *Molloy* 和 *Reed* [3]证明了对平面图 G, 有 $\chi_a'(G) \le 16\Delta$; 2020 年 *Fialho* [4]等人证明了对平面图 G, 有 $\chi_a'(G) \le 3.569(\Delta - 1)$.

对于 $g(G) \ge 4$ 的平面图 G, 舒巧君,王维凡和王艺桥 [5]证明了$\chi_a'(G) \le \Delta(G)+2$; 对于 $g(G) \ge 5$ 的平面图 G, 侯建锋 [6]等人证明了$\chi_a'(G) \le \Delta(G) + 1$; 同年,侯建锋 [6]等人证明了若最大度满足

$\Delta(G) \geq 9$, 则 $\chi_a'(G) = \Delta(G)$; 对于$g(G) \geq 6$ 的平面图G, $Hudák$ [7]等人证明了若最大度满足 $\Delta(G) \geq 6$, 则 $\chi_a'(G) = \Delta(G)$; 对于$g(G) \geq 7$ 的平面图 G, 王维凡,舒巧君,王侃和王平 [8]证明了若最大度满足 $\Delta(G) \geq 5$, 则 $\chi_a'(G) = \Delta(G)$; 对于$g(G) \geq 8$ 的平面图G, 王维凡,舒巧君,王侃和王平 [8]证明了若最大度满足 $\Delta(G) \geq 4$, 则 $\chi_a'(G) = \Delta(G)$.

对于不含 4-圈的平面图 G, 王应前和盛平 [9]证明了 $\chi_a'(G) \leq \Delta(G) + 3$; 对于不含 4-圈且最大度满足 $\Delta(G) \geq 5$ 的平面图 G, 王维凡,舒巧君和王艺桥 [10]证明了 $\chi_a'(G) \leq \Delta(G) + 2$; 对于不含 5-圈的平面图 G, 舒巧君, 王维凡和王艺桥 [11]证明了 $\chi_a'(G) \leq \Delta(G) + 2$; 对于不含 4-,6- 圈的平面图 G, 侯建锋,刘桂真和吴建良 [12]证明了 $\chi_a'(G) \leq \Delta(G) + 2$.

对于 3-,3-圈不邻的平面图 G, 谢德政 [13]等人证明了 $\chi_a'(G) \leq \Delta(G) + 5$; 对于 3-,5-圈不邻的平面图 G, 王艺桥和舒巧君 [14]证明了 $\chi_a'(G) \leq \Delta(G) + 2$; 对于 3-,6-圈不邻的平面图 G, 王艺桥,舒巧君和吴建良 [15] 等人证明了 $\chi_a'(G) \leq \Delta(G) + 2$.

对于无相交三角形的平面图 G, 舒巧君 [16]等人证明了 $\chi_a'(G) \leq \Delta(G) + 2$; 对于 i-,j-圈不相交, 其中 $i, j \in \{3, 4\}$ 的平面图 G, $AnnaFiedorowicz$ [17]证明了 $\chi_a'(G) \leq \Delta(G) + 2$.

本文将证明下面的定理:

定理1 若图 G 是不含相邻 i-圈, 且 5-,j-圈不邻的平面图, $i \in \{3, 4\}, j \in \{4, 6\}$, 则 $\chi_a'(G) \leq \Delta(G) + 2$.

2. 记号

令 G 为一个简单平面图, 对于任意点 $v \in V(G)$, 用 $N(v)$ 表示与 v 相邻的顶点集合, 有 $d(v) = |N(v)|$. 记 $N_k(v) = \{x \in N(v) | d(x) = k\}$, 且 $n_k(v) = |N_k(v)|$. 若顶点 v 满足 $d(v) = k$, 且 v 与 u 相邻, 则称 v 为 u 的 k-邻点.

对于面 $f \in F(G)$, 用 $M(v)$ 表示与 v 相关联面的集合, 记 $M_k(v) = \{f \in M(v) | d(f) = k\}$, 且 $m_k(v) = |M_k(v)|$. 用 $b(f)$ 表示面 f 的边界, 若 $u_1, u_2, \ldots, u_n$ 为 $b(f)$ 上按顺序排列的点, 则记做 $f = [u_1 u_2 \ldots u_n]$, $\delta(f)$ 表示面 f 的最小度, 其值为与面 f 相关联的点的最小度.

令 c 为 G 的一个局部无圈边染色, 用 $C(u)$ 表示在无圈边染色 c 中与点 u 相关联的边所染颜色集合, 方便起见, 用 $[k]$ 表示 $\{1, 2, \ldots, k\}$. 用 $F(uv)$ 表示边 uv 的禁用色集合, 在无圈边染色 c 中的一条 (α, β)- 双色路是指由 α, β 这两种颜色交替着色的边所组成的路, 若 (α, β)-双色路的末端分别为点 u 和点 v, 则将这样的路记做 $(\alpha, \beta)_{(u,v)}$- 双色路.

3. 定理1 的证明

3.1. 极小反例的性质

本文主要通过权转移的方法来证明定理 1. 设图 G 是定理 1 中使得 $|V(G)| + |E(G)|$ 最小的一个反例. 即图 G 是不含相邻 i- 圈, 且 5,j-圈不邻, $i \in \{3, 4\}, j \in \{4, 6\}$, $\chi_a'(G) \geq \Delta + 3$ 的平面图. G 是连通的简单平面图. 令 $L = \{1, 2, \ldots, k\}$ 为颜色集, 其中 $k = \Delta(G) + 2$. 接下来, 我们探讨 G 的结构性质.

引理1 平面图 G 是 2-连通图.

证明 假设 v 为平面图 G 的一个割点, $C_1, C_2, \ldots, C_t (t \geq 2)$ 为 $G \setminus v$ 的连通部分. 对于 $1 \leq i \leq t$, $G_i = C_i \cup \{v\}$ 均存在无圈 k-边染色 c_i. 通过调整 c_i 使得与 v 关联的边染不同的颜色, 这时 k 个颜色可以将图 G 染好, 矛盾.

引理2 G 中 2-点不与 3^--点相邻.

证明 令 v 为一个 2-点, u 是与 v 相邻的 3^--点, 只讨论 $d(u) = 3$ 的情况, $d(u) = 2$ 的情况同理可得. 记 $N(v) = \{u, w\}$, $N(u) = \{v, u_1, u_2\}$. 令 $G' = G - uv$, G' 有一个无圈 k- 边染色 c. 考虑下面两种情况:

(1) $c(vw) \notin \{c(uu_1), c(uu_2)\}$

此时可以用 $L \setminus \{c(vw), c(uu_1), c(uu_2)\}$ 中的颜色染边 vu, 矛盾.

(2) $c(vw) \in \{c(uu_1), c(uu_2)\}$

边 uv 的禁用色 $F(uv)$ 满足: $|F(uv)| \leq |C(u) \cup C(v) \cup C(w)| \leq d(u) - 1 + d(v) - 2 + d(w) - 1 \leq \Delta + 1 < k$, 故可令 $\alpha \in L \backslash F(uv)$, $c(uv) = \alpha$, 得到 G 的一个无圈 k-边染色, 矛盾.

引理3 设 v 为图 G 的一个 4^+-点, 若 $n_2(v) = 1$, 则 $n_2(v) + n_3(v) \leq d - 3$.

证明 假设 $n_2(v) + n_3(v) \geq d - 2$. 记 $N(v) = \{v_1, v_2, \ldots, v_d\}$, 设$d(v_1) = 2$, $d(v_i) \leq 3, i = 2, 3, \ldots, d-2$. 只讨论 $d(v_i) = 3$, $i = 2, 3, \ldots, d-2$ 的情况, 其他情况同理可得. 令 $N(v_1) = \{v, v_1'\}$, $N(v_i) = \{v, v_i', v_i''\}$, $i \in \{2, 3, \ldots, d-2\}$, $G' = G - vv_1$, G' 有一个无圈 k- 边染色 c. 令$c(vv_i) = i$, $i \in \{2, 3, \ldots, d\}$. 考虑下面三种情况:

情况1 $c(v_1v_1') \notin \{2, 3, \ldots, d\}$

此时可令 $\alpha \in L \backslash \{2, 3, \ldots, d, c(v_1v_1')\}$, $c(vv_1) = \alpha$, 得到 G 的一个无圈 k-边染色, 矛盾.

情况2 $c(v_1v_1') \in \{2, 3, \ldots, d-2\}$

不失一般性, 令 $c(v_1v_1') = 2$. 边 vv_1 的禁用色 $F(vv_1)$ 满足: $|F(vv_1)| \leq |\{2, 3, \ldots, d, c(v_2v_2'), c(v_2v_2'')\}| \leq d - 1 + 2 = d + 1 < k$. 故 k 种颜色可将图 G 染好, 矛盾.

情况3 $c(v_1v_1') \in \{d-1, d\}$

不失一般性, 令 $c(v_1v_1') = d$. 经过 v_1', v_d 一定存在一条 $(d, \alpha)_{(v_1, v)}$-双色路, $\alpha \in \{1, d+1, d+2\}$, 否则可以用 α 染边 vv_1, 使得 k 种颜色将图 G 染好, 产生矛盾. 故 $\{1, d, d+1, d+2\} \subseteq C(v_1')$, 存在颜色 i_0, $2 \leq i_0 \leq d-2$, 且 $i_0 \notin C(v_1')$, 用 i_0 重染边 v_1v_1', 与情况 2 类似, G 有一个无圈 k- 边染色, 矛盾.

引理4 设 v 为图 G 的一个 d-点, u 为 v 的 2-邻点, 若 u 与 3-面关联, 则 $d \geq 5$, 且 $n_2(v) + n_3(v) \leq d - 4$.

证明 首先证明 $d \geq 5$.

设 $d = 4$, 记 $N(v) = \{u, v_1, v_2, v_3\}$, $N(u) = \{v, v_1\}$. 令 $G' = G - vu$, G' 有一个无圈 k-边染色 c.

由引理 2 , $d(v_1) \geq 4$, 令 $c(vv_i) = i, i \in \{1, 2, 3\}$. 考虑下面两种情况:

情况1 $c(v_1u) \notin \{2, 3\}$

边 uv 的禁用色 $F(uv)$ 满足: $|F(uv)| \leq |C(u) \cup C(v)| \leq d(u) - 1 + d(v) - 1 = 4 < k$, 此时可令 $\alpha \in L \backslash F(uv)$, $c(uv) = \alpha$, 因此 k 种颜色可将图 G 染好, 矛盾.

情况2 $c(v_1u) \in \{2, 3\}$

边 uv 的禁用色 $F(uv)$ 满足: $|F(uv)| \leq |C(u) \cup C(v) \cup C(v_1)| \leq d(u) - 1 + d(v) - 2 + d(v_1) - 2 = d(v_1) + 1 < k$, 此时可令 $\alpha \in L \backslash F(uv)$, $c(uv) = \alpha$, 因此 k 种颜色可将图 G 染好, 矛盾.

现在证明 $n_2(v) + n_3(v) \leq d - 4$.

设 $n_2(v) + n_3(v) \geq d - 3$. 记 $N(v) = \{u, v_1, v_2, \ldots, v_{d-1}\}$, $N(u) = \{v, v_1\}$. 只需讨论 $d(v_i) = 3$, $i = 2, 3, \ldots, d - 3$ 的情况, 其他情况同理可得, 令 $N(v_i) = \{v, v_i^{'}, v_i^{''}\}$, $G^{'} = G - uv$, $G^{'}$ 有一个无圈 k-边染色 c. 不失一般性, 令 $c(vv_i) = i, i = 1, 2, \ldots, d - 1$. 考虑下面三种情况:

情况1 $c(uv_1) \notin \{2, \ldots, d - 1\}$

边 uv 的禁用色 $F(uv)$ 满足: $|F(uv)| \leq |C(u) \cup C(v)| \leq d(u) - 1 + d(v) - 1 = d < k$, 因此 k 种颜色可将图 G 染好, 矛盾.

情况2 $c(uv_1) \in \{2, 3, \ldots, d - 3\}$

不失一般性, 设 $c(uv_1) = 2$. 边 uv 的禁用色 $F(uv)$ 满足: $|F(uv)| \leq |C(u) \cup C(v) \cup C(v_2)| \leq d(u) - 1 + d(v) - 2 + d(v_2) - 1 = 1 + d - 2 + 2 = d - 1 < k$, 因此 k 种颜色可将图 G 染好, 矛盾.

情况3 $c(uv_1) \in \{d - 2, d - 1\}$

不失一般性, 设 $c(uv_1) = d - 1$. 则存在一条经过 v_1, v_{d-1} 的 $(d-1, \alpha)_{(u,v)}$-路, 否则, 可令 $c(uv) \in L \setminus \{1, 2, \ldots, d - 1\}$, c 即为 G 的一个无圈 k-边染色, 矛盾. 若 $\alpha \in \{2, \ldots, d - 1\}$, 则可令 $c(uv) \in \{d, d + 1, d + 2\}$, 从而 k 种颜色可将图 G 染好, 矛盾. 故 $\alpha \in \{d, d + 1, d + 2\}$. 现可断定 $\{d, d + 1, d + 2\} \subseteq C(v_1)$, 否则可令 $c(uv) \in \{d, d + 1, d + 2\} \setminus C(v_1)$, c 即为 G 的一个无圈 k-边染色, 矛盾. 则存在 i_0, $2 \leq i_0 \leq d - 3$, 且$i_0 \notin C(v_1)$, 此时可用 i_0 重染边 uv_1, 与情况 2 类似, G 有一个无圈 k-边染色, 矛盾.

引理5 [18] 对于任意边 $uv \in E(G)$, 有 $d(u) + d(v) \geq 7$.

引理6 令 f 为一个 3-面, 记做 $f = [uvw]$. 若 $d(v) = 3$, 则 $d(u), d(w) \geq 5$.

证明 由引理 5, 若 $d(v) = 3$, 则 $d(u) \geq 4$, $d(w) \geq 4$. 令 $d(u) = 4$, $N(u) = \{v, w, u_1, u_2\}$, $N(v) = \{u, w, v_1\}$. 由于 G 不含相邻三角形, 故 u_1, u_2, v_1 均不相同. 令 $G^{'} = G - uv$, $G^{'}$ 有一个无圈 k- 边染色 c. 假设 $c(uu_1) = 1, c(uu_2) = 2, c(uw) = 3$. 考虑下面三种情况:

情况1 $|C(u) \cap C(v)| = 0$

边 uv 的禁用色 $F(uv)$ 满足: $|F(uv)| \leq |C(u) \cup C(v)| \leq d(u) - 1 + d(v) - 1 = 3 + 2 = 5 < k$, 此时 k 种颜色可将图 G 染好, 矛盾.

情况2 $|C(u)\cap C(v)|=1$

(1) $c(vv_1)\in\{c(uu_1),c(uu_2)\}$.

令 $c(vv_1)=1, c(vw)=4$. 经过 v_1,u_1 一定存在 $\Delta-2$ 条 $(1,\alpha)_{(u,v)}$-双色路, $\alpha\in\{5,\dots,k\}$. 若存在 $\gamma\in\{5,\dots,k\}$, 且经过 v_1,u_1 无 $(1,\gamma)_{(u,v)}$- 双色路, 则可令 $c(uv)=\gamma$, c 即为 G 的一个无圈 k-边染色, 矛盾. 故 $\{1,5,\dots,k\}\subseteq C(v_1)$.

若 $3\notin C(v_1)$, 则可用 3 重染边 vv_1, 此时经过 v_1,w 一定存在 $\Delta-2$ 条 $(3,\beta)_{(u,v)}$-双色路, $\beta\in\{5,\dots,k\}$. 若存在 $\gamma\in\{5,\dots,k\}$, 且经过 v_1,w 无 $(3,\gamma)_{(u,v)}$-双色路, 则可令 $c(uv)=\gamma$, c 即为 G 的一个无圈 k-边染色, 矛盾. 故 $C(w)=\{3,4,5,\dots,k\}$. 此时可用 3 染边 vv_1, 4 染边 uw, 1 染边 vw, β 染边 uv , c 为 G 的一个无圈 k-边染色, 矛盾. 故由上述讨论可得 $3\in C(v_1)$, 即 $C(v_1)=\{1,3,5,\dots,k\}$. 此时可用 4 重染边 vv_1, 用 1 重染边 vw, 用 α 染边 uv, $\alpha\in L\setminus\{1,2,3,4\}$, c 即为 G 的一个无圈 k-边染色, 矛盾.

(2) $c(vv_1)=c(uw), c(vw)=4$.

经过 v_1,w 一定存在 $\Delta-2$ 条 $(3,\beta)_{(u,v)}$-双色路, $\beta\in\{5,\dots,k\}$. 若存在 $\gamma\in\{5,\dots,k\}$, 且经过 v_1,w 无 $(3,\gamma)_{(u,v)}$-双色路, 则可令 $c(uv)=\gamma$, c 即为 G 的一个无圈 k- 边染色, 矛盾. 故 $C(w)=\{3,4,5,\dots,k\}$, $\{3,5,\dots,k\}\subseteq C(v_1)$. 此时可用 $\{1,2\}\setminus C(v_1)$ 中的颜色重染边 vv_1, 使得 $c(vv_1)\in\{c(uu_1),c(uu_2)\}$, 与 (1) 讨论类似, c 为 G 的一个无圈 k- 边染色, 矛盾.

(3) $c(vw)\in\{c(uu_1),c(uu_2)\}$.

令 $c(vw)=c(uu_1)=1, c(vv_1)=4$. 经过 w,u_1 一定存在 $\Delta-2$ 条 $(1,\alpha)_{(u,v)}$-双色路, $\alpha\in\{5,\dots,k\}$. 若存在 $\gamma\in\{5,\dots,k\}$, 且经过 w,u_1 无 $(1,\gamma)_{(u,v)}$-双色路, 则可令 $c(uv)=\gamma$, c 即为 G 的一个无圈 k-边染色, 矛盾. 故 $C(w)=\{1,3,5,\dots,k\}$.

$\{5,\dots,k\}\subseteq C(v_1)$, 否则可用 4 染边 uv, 用 $\{5,\dots,k\}\setminus C(v_1)$ 重染边 vv_1, 产生矛盾. 此时通过用 $\{1,3\}\setminus C(v_1)$ 染边 vv_1, 用 4 染边 vw, 与 (1)(2) 讨论类似, c 为 G 的一个无圈 k-边染色, 矛盾.

情况3 $|C(u)\cap C(v)|=2$

(1) $c(vv_1)=3, c(vw)=1$.

经过 u_1,w 一定存在 $\Delta-1$ 条 $(1,\alpha)_{(u,v)}$-双色路, $\alpha\in\{4,\dots,k\}$. 若存在 $\gamma\in\{4,\dots,k\}$, 且经过 u_1,w 无 $(1,\gamma)_{(u,v)}$-双色路, 则可令 $c(uv)=\gamma$, c 即为 G 的一个无圈 k-边染色, 矛盾. 故 $C(w)=\{1,3,4,\dots,k\}$, $d(w)=\Delta+1$, 矛盾.

(2) $\{c(vv_1),c(vw)\}=\{1,2\}$. 设 $c(vv_1)=c(uu_1)=1,\ c(vw)=c(uu_2)=2$.

经过 u_1,v_1 一定存在 $\Delta-1$ 条 $(1,\alpha)_{(u,v)}$-双色路, $\alpha\in\{4,\dots,k\}$. 经过 u_2,w 一定存在 $\Delta-2$ 条 $(2,\alpha)_{(u,v)}$-双色路, $\alpha\in\{4,\dots,k\}$. 故 $C(v_1)=\{4,\dots,k\}\cup\{1\}=L\setminus\{2,3\}$, $C(w)=\{4,\dots,k\}\cup\{2,3\}=L\setminus\{1\}$, $C(v_1)\cup C(w)=[k]$, 即经过 u_1,v_1 一定存在 $(1,\alpha)_{(u,v)}$-双色路, $\alpha\in\{4,\dots,k\}\setminus C(w)$, 经过 u_2,w 一定存在 $(2,\beta)_{(u,v)}$-双色路, $\beta\in\{4,\dots,k\}\setminus C(v_1)$. 此时可用 α 染边 vw, G' 有一个新的无圈 k- 边染色 c', 且 $|C'(u)\cap C'(v)|=1$, 与情况 2 讨论类似, G 为无圈 k-边可染的, 矛盾.

引理7 [18] 令 f 为一个 4-面, 记做 $f=[xyzw]$. 若 $d(x)=d(z)=3$, 则 $d(y),d(w)\geq 5$.

3.2. 权转移

令 G 为定理 1 的极小反例. 由于 G 满足不含相邻 i-圈, 且 5, j-圈不邻, $i \in \{3,4\}, j \in \{4,6\}$, 则有下面结果成立:

(P_1) 每个 d-点与最多 $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ 个 4^--面关联;

(P_2) 若 $d(f)=3$, 则与 f 相邻的面均为 6^+-面;

(P_3) 若 $d(f)=3$, 且 $\delta(f)=2$, 则 f 至少与一个 7^+-面相邻;

(P_4) 若 $d(f)=4$, 则与 f 相邻的面均为 6^+-面;

(P_5) 若 $d(f)=5$, 则 f 的邻面为 5-面或 7^+-面;

(P_6) 若 $d(f)=5$, 且 $\delta(f)=2$, 则 f 至少与一个 7^+-面相邻.

断言1 2- 点在 3- 面上, 若 $m_3(v)$ 为奇数, 则 $m_{7^+}(v) \geq \frac{m_3(v)+1}{2}$; 若 $m_3(v)$ 为偶数, 则 $m_{7^+}(v) \geq \frac{m_3(v)}{2}$.

根据连通平面图的 Euler 公式 $|V|+|F|-|E|=2$ 及度和公式 $\sum\limits_{v \in V(G)} d(v) = \sum\limits_{f \in F(G)} d(f) = 2|E(G)|$, 有

$$\sum_{v \in V(G)} (d(v)-4) + \sum_{f \in F(G)} (d(f)-4) = -8.$$

现构造一个权函数, 当$v \in V(G)$ 时, $\omega(v) = d(v)-4$, 当$f \in F(G)$ 时, $\omega(f) = d(f)-4$, 则有 $\sum\limits_{x \in V(G) \bigcup F(G)} \omega(x) = -8$. 下面根据$G$ 的结构性质, 在保持总权和不变的情况下, 对G 中的点和面的权按下面的转权规则进行转移, 得到一个新的权函数$\omega'(x)$. 下面将证明: 对任意$x \in V(G) \bigcup F(G)$, 都有$\omega'(x) \geq 0$. 从而得出如下矛盾:

$$0 \leq \sum_{x \in V(G) \bigcup F(G)} \omega'(x) = \sum_{x \in V(G) \bigcup F(G)} \omega(x) = -8.$$

该矛盾说明定理 1 的极小反例 G 不存在, 从而定理 1 成立.

权转移规则:

R1 每个 5^+-面 f 给面上的每一个顶点转 $\frac{d(f)-4}{d(f)}$.

R2 每个 5^+-点 v 给相邻 2-点转 $\frac{5}{6}$.

R3 每个 4-点 v 给相邻 3-点转 $\frac{1}{5}$.

R4 每个 5^+-点 v 给相邻 3-点转 $\frac{1}{3}$.

R5 设 f 是与 4^+-点 v 关联的 3-面, 若 $\delta(f) \leq 3$, 则 v 给 f 转 $\frac{1}{2}$; 若 $\delta(f) \geq 4$, 则 v 给 f 转 $\frac{1}{3}$.

下面先验证对 $\forall f \in F(G)$, 都有 $\omega'(f) \geq 0$.

当 $d(f)=3$ 时, 根据 $R5$ 有 $\omega'(f) \geq d(f)-4+\min\{2 \times \frac{1}{2},\ 3 \times \frac{1}{3}\} = 0$; 当 $d(f)=4$ 时,

$\omega^{'}(f)=\omega(f)=4-4=0$; 当 $d(f)\geq 5$ 时, 由 $R1$, 有 $\omega^{'}(f)=d(f)-4-\frac{d(f)-4}{d(f)}\times d(f)=0$.

现在验证对 $\forall v\in V(G)$, 都有 $\omega'(v)\geq 0$. 由引理 1 可知 $\delta(G)\geq 2$.

(1) $d(v)=2,\omega(v)=-2,m_{4^-}(v)\leq 1$.

由引理 5 可知, v 的邻点为 5^+-点.

$m_{4^-}(v)=0$ 时, 由 $R1$, $R2$ 有 $\omega^{'}(v)\geq -2+min\{2\times\frac{1}{5},\frac{1}{5}+\frac{3}{7}\}+2\times\frac{5}{6}=\frac{1}{15}>0$.

$m_{4^-}(v)=1$ 时, 若 v 与 3-面关联, 则 v 的另外一个关联面为 7^+-面, 由 $R1$, $R2$ 有 $\omega^{'}(v)\geq -2+\frac{3}{7}+2\times\frac{5}{6}=\frac{2}{21}>0$; 若 v 与 4-面关联, 则 v 的另外一个关联面为 6^+- 面, 由 $R1$, $R2$ 有 $\omega^{'}(v)\geq -2+\frac{1}{3}+2\times\frac{5}{6}=0$.

(2) $d(v)=3,\omega(v)=-1,m_{4^-}(v)\leq 1$.

$m_{4^-}(v)=0$ 时, 通过引理 5 可知 $n_{4^+}(v)=3$, 由 $R1$, $R3$, $R4$ 有 $\omega^{'}(v)\geq -1+3\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5}>0$.

$m_{4^-}(v)=1$ 时, 若 v 与 3-面关联, 则 v 的另外两个关联面为 6^+-面, 通过引理 5 和引理 6 可知 $n_4(v)=1$, $n_{5^+}(v)=2$, 由 $R1$, $R3$, $R4$ 有 $\omega^{'}(v)\geq -1+2\times\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{3}=\frac{8}{15}>0$; 若 v 与 4-面关联, 则 v 的另外两个关联面为 6^+-面, 通过引理 5 可知 $n_{4^+}(v)=3$, 由 $R1$, $R3$ 有 $\omega^{'}(v)\geq -1+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{5}=\frac{4}{15}>0$.

(3) $d(v)=4,\omega(v)=0,m_{4^-}(v)\leq 2$.

$m_{4^-}(v)=0$ 时, 通过引理 5 可知 $n_2(v)=0,n_3(v)\leq 4$, 由 $R1$, $R3$ 有 $\omega^{'}(v)\geq 0+4\times\frac{1}{5}-4\times\frac{1}{5}=0$.

$m_{4^-}(v)=1$ 时, 若 v 与 3-面关联, 则 v 的另外三个关联面为 6^+-面, 通过引理 5 和引理 6 可知 $n_3(v)\leq 2$, 由 $R1$, $R3$, $R5$ 有 $\omega^{'}(v)\geq 0+3\times\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-2\times\frac{1}{5}=\frac{4}{15}>0$; 若 v 与 4- 面关联, 则 v 的另外三个关联面为 6^+-面, 通过引理 5 和引理 7 可知 $n_3(v)\leq 3$, 由 $R1$, $R3$ 有 $\omega^{'}(v)\geq 0+3\times\frac{1}{3}-3\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}>0$.

$m_{4^-}(v)=2$ 时, 若 v 与两个 3-面关联, 则 v 的另外两个关联面为 6^+- 面, 通过引理 5 和引理 6 可知 $n_{4^+}(v)=4$, 由 $R1$, $R5$ 有 $\omega^{'}(v)\geq 0+2\times\frac{1}{3}-2\times\frac{1}{3}=0$; 若 v 与一个 3- 面和一个 4- 面关联, 则 v 的另外两个关联面为 6^+-面, 通过引理 5 , 引理 6 和 引理 7 可知 $n_3(v)\leq 1$, 由 $R1$, $R3$, $R5$ 有 $\omega^{'}(v)\geq 0+2\times\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}>0$; 若 v 与两个 4- 面关联, 则 v 的另外两个关联面为 6^+-面, 通过引理 5 和引理 7 可知 $n_3(v)\leq 2$, 由 $R1$, $R3$ 有 $\omega^{'}(v)\geq 0+2\times\frac{1}{3}-2\times\frac{1}{5}=\frac{4}{15}>0$.

(4) $d(v)=5,\omega(v)=1,m_{4^-}(v)\leq 2$.

(4.1) $m_{4^-}(v)=0$.

若 v 没有 2-邻点, 则 $n_{3^+}(v)=5$, 由 $R1$, $R4$ 有 $\omega^{'}(v)\geq 1+5\times\frac{1}{5}-5\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}>0$; 若 v 有 2-邻点, 则通过引理 3 可知 $n_2(v)+n_3(v)\leq d-3=2$. $n_2(v)=2$ 时, 由 $R1$, $R2$ 有 $\omega^{'}(v)\geq 1+4\times\frac{1}{5}+\frac{3}{7}-2\times\frac{5}{6}=\frac{59}{105}>0$, $n_2(v)=1,n_3(v)=1$ 时, 由 $R1$, $R2$, $R4$ 有 $\omega^{'}(v)\geq 1+4\times\frac{1}{5}+\frac{3}{7}-\frac{5}{6}-\frac{1}{3}=\frac{223}{210}>0$.

(4.2) $m_{4^-}(v)=1$.

若 v 与 3-面关联, 则 v 的另外四个关联面为 6^+-面. v 没有 2 -邻点时, 通过引理 5 和引理 6 可知 $n_3(v)\leq 4$, 由 $R1$, $R4$, $R5$ 有 $\omega^{'}(v)\geq 1+4\times\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-4\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}>0$; v 有 2-邻点时, 若 2-邻点与 3- 面关联, 则通过引理 4 可知 $n_2(v)+n_3(v)\leq d-4=1$, 由 $R1$, $R2$, $R5$ 有 $\omega^{'}(v)\geq 1+3\times\frac{1}{3}+\frac{3}{7}-\frac{1}{2}-\frac{5}{6}=\frac{23}{21}>0$; 若 2-邻点不与 3-面关联, 则通过引理 3 可知 $n_2(v)+n_3(v)\leq d-3=2$, 由 $R1$, $R2$, $R4$, $R5$ 有

$\omega^{'}(v) \geq 1 + 4 \times \frac{1}{3} - max\{\frac{1}{3} + 2 \times \frac{5}{6}, \frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{1}{3}\} = \frac{1}{3} > 0.$

若 v 与 4-面关联, 则 v 的另外四个关联面为 6^{+}-面. v 没有 2-邻点时, 通过引理 5 和引理 7 可知 $n_3(v) \leq 5$, 由 $R1$, $R4$ 有 $\omega^{'}(v) \geq 1 + 4 \times \frac{1}{3} - 5 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} > 0$; v 有 2-邻点时, 通过引理 3 可知 $n_2(v) + n_3(v) \leq d - 3 = 2$, 由 $R1$, $R2$, $R4$ 有 $\omega^{'}(v) \geq 1 + 4 \times \frac{1}{3} - max\{2 \times \frac{5}{6}, \frac{5}{6} + \frac{1}{3}\} = \frac{2}{3} > 0$.

(4.3) $m_{4^-}(v) = 2$.

若 v 与两个 3-面关联, 则 v 的另外三个关联面为 6^{+}-面. v 没有 2-邻点时, 通过引理 5 和引理 6 可知 $n_3(v) \leq 3$, 由 $R1$, $R4$, $R5$ 有 $\omega^{'}(v) \geq 1 + 3 \times \frac{1}{3} - 2 \times \frac{1}{2} - 3 \times \frac{1}{3} = 0$; v 有 2-邻点时, 若 2-邻点与 3- 面关联, 则通过引理 4 可知 $n_2(v) + n_3(v) \leq d - 4 = 1$, 由 $R1$, $R2$, $R5$ 有 $\omega^{'}(v) \geq 1 + 2 \times \frac{1}{3} + \frac{3}{7} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{5}{6} = \frac{3}{7} > 0$; 若 2-邻点不与 3-面关联, 则通过引理 3 可知 $n_2(v) + n_3(v) \leq d - 3 = 2$, 由 $R1$, $R2$, $R4$, $R5$ 有 $\omega^{'}(v) \geq 1 + 3 \times \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = 0$.

若 v 与一个 3-面和一个 4-面关联, 则 v 的另外三个关联面为 6^{+}-面. v 没有 2-邻点时, 通过引理 5, 引理 6 和引理 7 可知 $n_3(v) \leq 4$, 由 $R1$, $R4$, $R5$ 有 $\omega^{'}(v) \geq 1 + 3 \times \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 4 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} > 0$; v 有 2-邻点时, 若 2-邻点与 3-面关联, 则通过引理 4 可知 $n_2(v) + n_3(v) \leq d - 4 = 1$, 由 $R1$, $R2$, $R5$ 有 $\omega^{'}(v) \geq 1 + 2 \times \frac{1}{3} + \frac{3}{7} - \frac{1}{2} - \frac{5}{6} = \frac{16}{21} > 0$; 若 2-邻点不与 3-面关联, 则通过引理 3 可知 $n_2(v) + n_3(v) \leq d - 3 = 2$, 由 $R1$, $R2$, $R4$, $R5$ 有 $\omega^{'}(v) \geq 1 + 3 \times \frac{1}{3} - max\{\frac{1}{3} + 2 \times \frac{5}{6}, \frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{1}{3}\} = 0$.

若 v 与两个 4-面关联, 则 v 的另外三个关联面为 6^{+}-面. v 没有 2-邻点时, 通过引理 5 和引理 7 可知 $n_3(v) \leq 5$, 由 $R1$, $R4$ 有 $\omega^{'}(v) \geq 1 + 3 \times \frac{1}{3} - 5 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} > 0$; v 有 2-邻点时, 通过引理 3 可知 $n_2(v) + n_3(v) \leq d - 3 = 2$, 由 $R1$, $R2$, $R4$ 有 $\omega^{'}(v) \geq 1 + 3 \times \frac{1}{3} - \max\{2 \times \frac{5}{6}, \frac{5}{6} + \frac{1}{3}\} = \frac{1}{3} > 0$.

(5) $d(v) = d \geq 6, \omega(v) = d - 4, m_{4^-}(v) \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$.

记 τ 为 v 的关联面转给 v 的总权值; $\tau(f \to v)$ 为面 f 转给 v 的权值; $\tau(v \to u)$ 为点 v 转给点 u 的权值.

(5.1) $m_{4^-}(v) = 0$.

(5.1.1) $n_2(v) = 0$.

由 $R1$, $R4$ 可得 $\omega^{'}(v) \geq d - 4 + \frac{1}{5}d - \frac{1}{3}d = \frac{13}{15}d - 4 > 0$.

(5.1.2) $n_2(v) > 0$.

通过引理 3 可知 $n_2(v) + n_3(v) \leq d - 3$. 由于 $m_{4^-}(v) = 0$, 故考虑与 v 关联的面全为 5^{+}-面的情况.

(a) $m_5(v) = 0$, 即 v 的关联面均为 6^{+}-面.

由 $R1$, $R2$, $R4$ 可得 $\omega^{'}(v) \geq d - 4 + \frac{1}{3}m_6(v) + \frac{3}{7}m_{7^+}(v) - \frac{5}{6}n_2(v) - \frac{1}{3}n_3(v) \geq d - 4 + \frac{1}{3}d - \frac{5}{6}(d-3) = \frac{1}{2}d - \frac{3}{2} > 0$.

(b) $m_6(v) = 0$, 即 v 的关联面均为 5-面或者 7^{+}-面.

由 $R1$ 可知, 当 5-面尽可能多, 7^{+}-面尽可能少时, τ 可得到最小值, 由于面 f 为 7-面时 $\tau(f \to v)$ 的值比面 f 为 8^{+}-面时 $\tau(f \to v)$ 的值小, 故为使得 τ 最小, 将 7^{+}-面均看作 7-面考虑.

由 $(P6)$ 可知, 若 2-邻点在 5-面上, 则该 5-面至少与一个 7^{+}-面相邻. $n_2(v) = 0$ 时, v 的关联面

均为 5-面可使得 τ 最小, 在使得 τ 尽可能小的前提下增加 2-邻点数量. 记 $N(v)=\{v_1,v_2,\ldots,v_d\}$, $f_1=[vv_d\ldots v_1]$, $f_2=[vv_1\ldots v_2]$, $f_i=[vv_{i-1}\ldots v_i], 2\le i\le d$. $d(v_1)=3$ 时, $\tau(f_1\to v)+\tau(f_2\to v)-\tau(v\to u)=\frac{1}{15}$; $d(v_1)=2$ 时, $\tau(f_1\to v)+\tau(f_2\to v)-\tau(v\to u)=-\frac{43}{210}$, 故当 $n_{3^-}(v)=1$ 时, 将其看作 2-邻点可使得 v 转出权值最多. $n_{3^-}(v)=2$ 时, 若 $d(v_1)=d(v_2)=2$, 则 v 的关联面中至少 1 个 5-面将变为 7^+- 面, 此时 $\sum_{i=1}^{3}\tau(f_i\to v)-\sum_{i=1}^{2}\tau(v\to v_i)\ge-\frac{88}{105}$; 若 $d(v_1)=2, d(v_2)=3$, 则 $\sum_{i=1}^{3}\tau(f_i\to v)-\sum_{i=1}^{2}\tau(v\to v_i)=-\frac{71}{210}$; 若 $d(v_1)=d(v_2)=3$, 则 $\sum_{i=1}^{3}\tau(f_i\to v)-\sum_{i=1}^{2}\tau(v\to v_i)=-\frac{1}{15}$, 故当 $n_{3^-}(v)=2$ 时, 将其均看作 2-邻点可使得 v 转出权值最多. $n_{3^-}(v)\ge 3$ 的情况讨论同上, 故为使得 v 转出权值最多, 将 v 邻点中的 3^--点均看做 2-点考虑, 即有 $n_2(v)\le d-3$. 若 $n_2(v)$ 为奇数, 则 $m_{7^+}(v)\ge\frac{n_2(v)+1}{2}$, 若 $n_2(v)$ 为偶数, 则 $m_{7^+}(v)\ge\frac{n_2(v)}{2}$.

$n_2(v)$ 为奇数时, 由 $R1$, $R2$ 可得 $\omega'(v)\ge d-4+\frac{1}{5}m_5(v)+\frac{3}{7}m_{7^+}(v)-\frac{5}{6}n_2(v)\ge d-4+\frac{1}{5}(d-\frac{n_2(v)+1}{2})+\frac{3}{7}\times\frac{n_2(v)+1}{2}-\frac{5}{6}n_2(v)=\frac{6}{5}d-\frac{151}{210}n_2(v)-\frac{136}{35}\ge\frac{6}{5}d-\frac{151}{210}(d-3)-\frac{136}{35}=\frac{101}{210}d-\frac{121}{70}>0$.

$n_2(v)$ 为偶数时, 由 $R1$, $R2$ 可得 $\omega'(v)\ge d-4+\frac{1}{5}m_5(v)+\frac{3}{7}m_{7^+}(v)-\frac{5}{6}n_2(v)\ge d-4+\frac{1}{5}(d-\frac{n_2(v)}{2})+\frac{3}{7}\times\frac{n_2(v)}{2}-\frac{5}{6}n_2(v)=\frac{6}{5}d-\frac{151}{210}\times n_2(v)-4\ge\frac{6}{5}d-\frac{151}{210}(d-3)-4=\frac{101}{210}d-\frac{129}{70}>0$.

(c) v 的关联面中 5-, 6-, 7^+-面均存在.

由于面 f 为 7-面时 $\tau(f\to v)$ 的值比面 f 为 8^+-面时 $\tau(f\to v)$ 的值小, 故为使得 τ 最小, 将 7^+-面均看作 7-面考虑, 即考虑 v 的关联面中 5-, 6-, 7-面均存在的情况. 由于 5-,6-面不邻, 故可得 $1\le m_5(v)\le d-3$, $1\le m_6(v)\le d-3$, $2\le m_7(v)\le d-2$. 记 x 为 5- 面变为 6-面的数量, y 为 7-面变为 6-面的数量.

由 (b) 可知, $m_6(v)=0$, 即 v 的关联面为 5-面或 7^+-面时, 5-面尽可能多, 7^+-面尽可能少可保证 τ 最小, 现在 v 的关联面中存在 6-面, 故应将 5-面或 7^+-面变为 6-面, 为保证 τ 尽可能小将 (b) 中 7^+-面均看作 7-面.

若不改变 (b) 中 7-面的数量, 则只能通过减少 5-面的数量从而增大 6-面的数量. 由于 5-,6-面不邻, 且 $1\le m_5(v)\le d-3$, 故最多 $d-m_7(v)-1$ 个 5-面可变为 6- 面, 即 $1\le x\le d-m_7(v)-1$. 根据 $R1$ 面 f 由 5-面变为 6-面 $\tau(f\to v)$ 将变大 $\frac{2}{15}$, 故通过减少 5-面的数量来增大 6-面的数量会使得 τ 变大.

若不改变 (b) 中 5-面的数量, 则只能通过减少 7-面的数量从而增大 6-面的数量. 由于 5-,6-面不邻且 v 的 2-邻点数量是确定的, 故通过调整发现最终 7-面数量不变, 5-面数量减少, 与上述讨论相似, τ 变大.

现通过改变 (b) 中 5-面和 7-面的数量来增大 6-面的数量. 若将一个 7-面变为 6-面, 则将使其相邻两个 5-面变为 6-面或一个 5-面变为 6- 面, 一个 5-面变为 7-面或两个 5-面变为 7- 面. 若一个 5-面变为 6-面, 一个 5-面变为 7- 面, 由于 5-,6- 面不邻且 v 的 2-邻点数量是确定的, 故通过调整发现最终 7-面数量不变, 5-面数量减少, 与上述讨论相似, τ 变大. 由于面 f 由 5-面变为 6-面 $\tau(f\to v)$ 将变大 $\frac{2}{15}$, 面 f 由 5- 面变为 7-面 $\tau(f\to v)$ 将变大 $\frac{8}{35}$, 故为使得 τ 尽可能小仅考虑将 (b) 中 7-面变为 6-面时其相邻两个 5-面变为 6-面的情况, 此时有 $2\le y+1\le x\le d-m_7(v)-1$, 由于面 f 由 5- 面变为 6-面 $\tau(f\to v)$ 将变大 $\frac{2}{15}$, 面 f 由 7-面变为 6-面 $\tau(f\to v)$ 将缩小 $\frac{2}{21}$, 故通过同时减少 5- 面和 7-面的数量来增大 6-面的数量也会使得 τ 变大.

综上, 5-, 6-, 7^+-面均存在时最终权值将大于 (b) 情况下的最终权值, 即 $\omega^{'}(v) \geq 0$.

(5.2) $1 \leq m_{4^-}(v) \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$.

(5.2.1) $n_2(v) = 0$.

由 $R1$, $R4$, $R5$ 可得 $\omega^{'}(v) \geq d - 4 + \frac{1}{3}(d - m_3(v) - m_4(v)) - \frac{1}{2}m_3(v) - \frac{1}{3}(d - m_3(v)) = d - \frac{1}{2}m_3(v) - \frac{1}{3}m_4(v) - 4 \geq d - \frac{1}{2}(m_3(v) + m_4(v)) - 4 \geq \frac{3}{4}d - 4 > 0$.

(5.2.2) $n_2(v) > 0$.

(a) 2-邻点与 3-面关联.

通过引理 4 可知 $n_2(v) + n_3(v) \leq d - 4$. 根据断言 1 :

$m_3(v)$ 为奇数时, 由 $R1$, $R2$, $R5$ 有 $\omega^{'}(v) \geq d - 4 + \frac{3}{7} \times \frac{m_3(v)+1}{2} + \frac{1}{3} \times (d - m_{4^-}(v) - \frac{m_3(v)+1}{2}) - \frac{1}{2}m_3(v) - \frac{5}{6}(d-4) = \frac{1}{2}d - \frac{11}{14}m_3(v) - \frac{1}{3}m_4(v) - \frac{13}{21} \geq \frac{1}{2}d - \frac{11}{14}m_{4^-}(v) - \frac{13}{21} \geq \frac{3}{28}d - \frac{13}{21} > 0$.

$m_3(v)$ 为偶数时, 若 $d \geq 7$, 则由 $R1$, $R2$, $R5$ 有 $\omega^{'}(v) \geq d - 4 + \frac{3}{7} \times \frac{m_3(v)}{2} + \frac{1}{3} \times (d - m_{4^-}(v) - \frac{m_3(v)}{2}) - \frac{1}{2}m_3(v) - \frac{5}{6}(d-4) = \frac{1}{2}d - \frac{11}{14}m_3(v) - \frac{1}{3}m_4(v) - \frac{2}{3} \geq \frac{1}{2}d - \frac{11}{14}m_{4^-}(v) - \frac{2}{3} \geq \frac{3}{28}d - \frac{2}{3} > 0$; 若 $d = 6$, 此时 $m_3(v) = 2$, 由 $R1$, $R2$, $R5$ 有 $\omega^{'}(v) \geq d - 4 + \frac{3}{7} \times \frac{m_3(v)}{2} + \frac{1}{3} \times (d - m_{4^-}(v) - \frac{m_3(v)}{2}) - \frac{1}{2}m_3(v) - \frac{5}{6}(d-4) = \frac{1}{2}d - \frac{11}{14}m_3(v) - \frac{1}{3}m_4(v) - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}d - \frac{1}{3}m_4(v) - \frac{11}{7} - \frac{2}{3} \geq \frac{1}{2}d - \frac{1}{3}(\frac{d}{2} - 2) - \frac{47}{21} = \frac{1}{3}d + \frac{2}{3} - \frac{47}{21} = \frac{1}{3}d - \frac{11}{7} = \frac{3}{7} > 0$.

(b) 2-邻点不与 3-面关联.

通过引理 3 可知 $n_2(v) + n_3(v) \leq d - 3$.

$m_3(v) = 0$ 时, 由 $R1$, $R2$, $R5$ 有 $\omega^{'}(v) \geq d - 4 + \frac{1}{3} \times (d - m_{4^-}(v)) - \frac{5}{6}(d-3) - \frac{1}{3}m_3(v) = \frac{1}{2}d - \frac{2}{3}m_3(v) - \frac{1}{3}m_4(v) - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}d - \frac{1}{3}m_4(v) - \frac{3}{2} \geq \frac{1}{3}d - \frac{3}{2} > 0$.

$m_3(v) = 1$ 时, 由 $R1$, $R2$, $R5$ 有 $\omega^{'}(v) \geq d - 4 + \frac{1}{3} \times (d - m_{4^-}(v)) - \frac{5}{6}(d-3) - \frac{1}{3}m_3(v) = \frac{1}{2}d - \frac{2}{3}m_3(v) - \frac{1}{3}m_4(v) - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}d - \frac{1}{3}m_4(v) - \frac{13}{6} \geq \frac{1}{3}d - \frac{11}{6} > 0$.

$2 \leq m_3(v) \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ 时, $4 - \frac{d}{2} \leq m_3(v) - m_4(v) \leq \frac{d}{2}$, 由 $R1$, $R2$, $R5$ 有 $\omega^{'}(v) \geq d - 4 + \frac{1}{3} \times (d - m_{4^-}(v)) - \frac{5}{6}(d - 2m_3(v)) - \frac{1}{3}(2m_3(v) - 3) - \frac{1}{3}m_3(v) = \frac{1}{2}d + \frac{1}{3}(m_3(v) - m_4(v)) - 3 \geq \frac{1}{2}d + \frac{1}{3}(4 - \frac{d}{2}) - 3 = \frac{1}{3}d - \frac{5}{3} > 0$.

综上, 我们得到:

$$-8 = \sum_{x \in V(G) \bigcup F(G)} \omega(x) = \sum_{x \in V(G) \bigcup F(G)} \omega^{'}(x) \geq 0.$$

矛盾, 这说明 G 不存在, 从而定理 1 是成立的.

参考文献

[1] Fiamčík, I. (1978) The Acyclic Chromatic Class of Graphs. *Mathematica Slovaca*, **28**, 139-145.

[2] Alon, N., Mcdiarmid, C.J.H. and Reed, B.A. (1991) Acyclic Coloring of Graphs. *Random Structures and Algorithms*, **2**, 277-288. https://doi.org/10.1002/rsa.3240020303

[3] Molloy, M. and Reed, B. (1998) Further Algorithmic Aspects of the Local Lemma. *Proceedings of the Thirtieth Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, Dallas, TX, May 1998, 524-529. https://doi.org/10.1145/276698.276866

[4] Fialho, P.M.S., de Lima, B.N.B. and Procacci, A. (2020) A New Bound on the Acyclic Edge Chromatic Number. *Discrete Mathematics*, **343**, Article ID: 112037. https://doi.org/10.1016/j.disc.2020.112037

[5] Shu, Q., Wang, W. and Wang, Y. (2013) Acyclic Chromatic Indices of Planar Graphs with Girth at Least 4. *Journal of Graph Theory*, **73**, 386-399. https://doi.org/10.1002/jgt.21683

[6] Hou, J., Wang, W. and Zhang, X. (2013) Acyclic Edge Coloring of Planar Graphs with Girth at Least 5. *Discrete Applied Mathematics*, **161**, 2958-2967. https://doi.org/10.1016/j.dam.2013.06.013

[7] Hudák, D., Kardoš, F., Lužar, B., Soták, R. and Škrekovski, R. (2012) Acyclic Edge Coloring of Planar Graphs with Δ Colors. *Discrete Applied Mathematics*, **160**, 1356-1368.

[8] Wang, W., Shu, Q., Wang, K. and Wang, P. (2011) Acyclic Chromatic Indices of Planar Graphs with Large Girth. *Discrete Applied Mathematics*, **159**, 1239-1253. https://doi.org/10.1016/j.dam.2011.03.017

[9] Wang, Y. and Sheng, P. (2014) Improved Upper Bound for Acyclic Chromatic Index of Planar Graphs without 4-Cycles. *Journal of Combinatorial Optimization*, **27**, 519-529. https://doi.org/10.1007/s10878-012-9524-5

[10] Wang, W., Shu, Q. and Wang, Y. (2013) Acyclic Edge Coloring of Planar Graphs without 4-Cycles. *Journal of Combinatorial Optimization*, **25**, 562-586. https://doi.org/10.1007/s10878-012-9474-y

[11] Shu, Q., Wang, W. and Wang, Y. (2012) Acyclic Edge Coloring of Planar Graphs without 5-Cycles. *Discrete Applied Mathematics*, **160**, 1211-1223. https://doi.org/10.1016/j.dam.2011.12.016

[12] Hou, J., Liu, G. and Wu, J. (2012) Acyclic Edge Coloring of Planar Graphs without Small Cycles. *Graphs and Combinatorics*, **28**, 215-226. https://doi.org/10.1007/s00373-011-1043-0

[13] Xie, D. and Wu, Y. (2012) Acyclic Edge Coloring of Planar Graphs without Adjacent Triangles. *Journal of Mathematical Research with Applications*, **32**, 407-414.

[14] 王艺桥, 舒巧君. 平面图的无圈边染色[J]. 江苏师范大学学报(自然科学版), 2014, 32(3): 22-26.

[15] Wang, Y., Shu, Q. and Wu, J. (2014) Acyclic Edge Coloring of Planar Graphs without a 3-Cycle Adjacent to a 6-Cycle. *Journal of Combinatorial Optimization*, **28**, 692-715. https://doi.org/10.1007/s10878-014-9765-6

[16] Shu, Q., Lin, G. and Miyano, E. (2020) Acyclic Edge Coloring Conjecture Is True on Planar Graphs without Intersecting Triangles. In: Chen, J., Feng, Q. and Xu, J., Eds., *Theory and Applications of Models of Computation*, Springer, Cham, 426-438. https://doi.org/10.1007/978-3-030-59267-7_36

[17] Fiedorowicz, A. (2012) Acyclic Edge Colouring of Planar Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **160**, 1513-1523. https://doi.org/10.1016/j.dam.2012.02.018

[18] Wan, M. and Xu, B. (2014) Acyclic Edge Coloring of Planar Graphs without Adjacent Cycles. *Science China Mathematics*, **57**, 433-442. https://doi.org/10.1007/s11425-013-4644-7