Advances in Applied Mathematics 应用数学进展**, 2021, 10(9), 3039-3044**
Published Online September 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.109318

Hans汉斯

三维Micropolar流体方程组弱解的正则性准则

何贝贝

浙江师范大学数学与计算机科学学院，浙江 金华
Email: 18238795922@163.com

收稿日期：2021年8月14日；录用日期：2021年9月6日；发布日期：2021年9月15日

摘　要

本文给出了三维Micropolar流体方程组在Besov空间中弱解的一个正则性准则，证明了当方程组的弱解(u,w)满足$\nabla u \in L^{\frac{2}{2-\gamma}}\left(0,T;\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\gamma}\right), \nabla w \in L^{2}\left(0,T;\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}\right)$时，方程组(1.1)在$(0,T]$上是正则的。

关键词

Micropolar流体方程组，Besov空间，弱解，正则性准则

Regularity Criteria of Weak Solutions to the 3D Micropolar Fluid Equations

Beibei He

School of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang
Email: 18238795922@163.com

Received: Aug. 14th, 2021; accepted: Sep. 6th, 2021; published: Sep. 15th, 2021

Abstract

In this paper, we study the regularity criteria for the weak solutions of 3D Micropolar fluid equations (1.1) in Besov space. We get that the weak solution (u,w) is regular on $(0,T]$ when it satisfies the conditions $\nabla u \in L^{\frac{2}{2-\gamma}}\left(0,T;\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\gamma}\right), \nabla w \in L^{2}\left(0,T;\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}\right)$, where $0<\gamma<2$.

文章引用: 何贝贝. 三维 Micropolar 流体方程组弱解的正则性准则[J]. 应用数学进展, 2021, 10(9): 3039-3044.
DOI: 10.12677/aam.2021.109318

Keywords

Micropolar Fluid Equations, Besov Space, Weak Solutions, Regularity Criteria

1. 引言

本文我们将考虑 R^3 不可压非齐次微极流体方程组的正则性问题：

$$\begin{cases} \partial_t u-(\upsilon+\chi)\Delta u+u\cdot\nabla u+\nabla\pi=2\chi curl w, \\ \partial_t w-\mu\Delta w+u\cdot\nabla w+4\chi w-\kappa\nabla div w=2\chi curl u, \\ div u_0=0, \\ u(x,0)=u_0(x), w(x,0)=w_0(x). \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $u=(u_1(x,t),u_2(x,t),u_3(x,t))$ 表示流体的速度，$w=(w_1(x,t),w_2(x,t),w_3(x,t))$ 表示流体的微旋转速度，$\pi=\pi(x,t)$ 表示压强， μ,κ,ν,χ 表示粘性系数，其中 $\mu>0,\kappa>0,\gamma>0,\nu>0,\chi>0$ 。

当方程组(1.1)中 $w=0$ 时，方程组(1.1)就变成我们熟悉的 Navier-Stokes 方程组，对于 Navier-Stokes 方程的研究已经有很多，具体可参考文献[1] [2] [3]，但是对于三维 Navier-Stokes 方程的全局正则性的研究仍然有很多困难。

微极流体方程组最早是由 Eringen [4]在 1966 年提出的，从物理上讲，微极流描述的是流体的运动，其中微粒的旋转也被考虑在内。我们知道，微极流体方程组弱解的正则性和光滑解的爆破准则对于研究该方程组解的全局正则性起着重要作用，如 Dong [5]得到了三维微极流体方程组在 Besov 空间中的正则性准则，Wang [6]证明了三维微极流体方程组光滑解的爆破性准则，后来，Zhang [7]根据速度涡度建立了改进的 Besov 空间的爆破条件，之后，又有很多学者研究了方程组(1.1)中的一些性质，具体可参考文献[8] [9] [10]等。

本文给出了三维 Micropolar 方程在 Besov 空间中解的一个正则性准则，主要结论如下：

2. 主要定理

定理 2.1 设初值 $(u_0,w_0)\in H^1(R^3)\times H^1(R^3)$，$(u,w)$ 是三维微极流体方程组(1.1)的一组弱解。如果满足条件

$$\int_0^T \frac{\|\nabla u\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-\gamma}}^{\frac{2}{2-\gamma}}+\|\nabla w\|_{\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}}^2}{1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)}ds<\infty,\quad 0<\gamma<2. \tag{2.1}$$

则弱解 (u,w) 在 $(0,T]$ 上是正则的。

3. 预备知识

定义 3.1 齐次 Besov 空间：设 s 是一个实数，$(p,r)\in[1,\infty]^2$，所有 S_h' (其中 S_h' 为缓增函数空间)中的分布函数 u 组成的其次 Besov 空间 $\dot{B}_{p,r}^s$ ，则有

$$\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}} = \left(\sum_{j\in Z} 2^{rjs} \|\dot{\Delta}_j u\|_{L^p}^r\right)^{\frac{1}{r}} < \infty.$$

下面，我们来介绍 Micropolar 方程组(1.1)弱解的定义：

定义 3.2 设初值$(u_0(x), w_0(x)) \in L^2(R^3)\times L^2(R^3)$，且$div\, u_0 = 0$，若作用在$R^3\times(0,T]$上的$(u,w)$满足如下条件，则称$(u,w)$为三维 Micropolar 方程组(1.1)的弱解：

(1) $(u,w)\in L^\infty(0,T;L^2(R^3))\cap L^2(0,T;\dot{H}^1(R^3))$；

(2) (u,w)在分布意义下满足方程组(1.1)，即对任意的$\varphi,\phi\in C_0^\infty(R^3\times(0,T])$，都有

$$\int_0^T\int_{R^3}\{\partial_t u-(\upsilon+\chi)\Delta u+u\cdot\nabla u+\nabla\pi-2\chi curl\, w\}\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0,$$

和

$$\int_0^T\int_{R^3}\{\partial_t w-\mu\Delta w+u\cdot\nabla w+4\chi w-\kappa\nabla div w-2\chi curl\, u\}\phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0,$$

成立。

(3) 有以下能量不等式成立：

$$\|(u,w)\|_{L^2}^2 + 2(\upsilon+\chi)\int_0^T\|\nabla u\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t + 2\mu\int_0^T\|\nabla w\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t + 2\kappa\int_0^T\|div\, w\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t + 8\chi\int_0^T\|w\|_{L^2}^2\,\mathrm{d}t \le \|(u_0,w_0)\|_{L^2}^2.$$

引理 3.1 ([1])设$1\le q<p<\infty$，α是一个正实数。则存在一个常数 C，使得

$$\|f\|_{L^p}\le C\|f\|_{\dot{B}^{-\alpha}_{\infty,\infty}}^{1-\theta}\|f\|_{\dot{B}^{\beta}_{q,q}}^{\theta}\text{，其中 }\beta=\alpha\left(\frac{p}{q}-1\right)\text{和 }\theta=\frac{q}{p} \tag{3.1}$$

注：从上述引理可以得到，当$q=2, p=3$时，就有

$$\|f\|_{L^3}\le C\|f\|_{\dot{B}^{-\gamma}_{\infty,\infty}}^{\frac{1}{3}}\|f\|_{\dot{H}^{\frac{\gamma}{2}}}^{\frac{2}{3}} \tag{3.2}$$

成立；

当$q=2, p=4, \beta=1$时，我们可以得到$\alpha=1$，就有

$$\|f\|_{L^4}\le C\|f\|_{\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}}^{\frac{1}{2}}\|f\|_{\dot{H}^1}^{\frac{1}{2}} \tag{3.3}$$

成立。

引理 3.2 (Gagliardo-Nirenberg 不等式)对于$0<q,r\le\infty, 0<\alpha<1, u\in W^{m,r}(R^n)$，就有

$$\|D^j u\|_{L^p}\le C\|D^m u\|_{L^r}^{\alpha}\|u\|_{L^q}^{1-\alpha},$$

其中$\frac{j}{m}\le\alpha<1, \frac{1}{p}=\frac{j}{n}+\alpha\left(\frac{1}{r}-\frac{m}{n}\right)+(1-\alpha)\frac{1}{q}$。

4. 定理证明

在这一节，我们将会给出定理 2.1 的证明。

证明：对方程组(1.1)的第一个方程两端同时作用$-\Delta u$，由分部积分和方程中的不可压条件，就有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|_{L^2}^2+(\nu+\chi)\|\Delta u\|_{L^2}^2=\int_{R^3}u\cdot\nabla u\cdot\Delta u\mathrm{d}x-2\chi\int_{R^3}curl\, w\cdot\Delta u\mathrm{d}x, \tag{4.1}$$

对方程组(1.1)的第二个方程两端同时作用 $-\Delta w$，由分部积分，就有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla w\|_{L^2}^2+\mu\|\Delta w\|_{L^2}^2+\kappa\|\nabla div\, w\|_{L^2}^2\\&\le\int_{R^3}u\cdot\nabla w\cdot\Delta w\mathrm{d}x-2\chi\int_{R^3}curl u\cdot\Delta w\mathrm{d}x-4\chi\|\nabla w\|_{L^2}^2.\end{aligned}\tag{4.2}$$

将(4.1)，(4.2)相加，就得到如下不等式

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla w\|_{L^2}^2\right)+(\nu+\chi)\|\Delta u\|_{L^2}^2+\mu\|\Delta w\|_{L^2}^2+\kappa\|\nabla div\, w\|_{L^2}^2\\&\le\int_{R^3}u\cdot\nabla u\cdot\Delta u\mathrm{d}x-2\chi\int_{R^3}curl\, w\cdot\Delta u\mathrm{d}x-4\chi\|\nabla w\|_{L^2}^2+\int_{R^3}u\cdot\nabla w\cdot\Delta w\mathrm{d}x-2\chi\int_{R^3}curl u\cdot\Delta w\mathrm{d}x\\&=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5.\end{aligned}\tag{4.3}$$

接下来，我们将会估计(4.3)的右边各项。

由 Holder 不等式，Young 不等式和插值定理 $\|\nabla u\|_{\dot{H}^{\frac{\gamma}{2}}}\le\|\nabla u\|_{L^2}^{1-\frac{\gamma}{2}}\|\Delta u\|_{L^2}^{\frac{\gamma}{2}}$（其中 $0<\gamma<2$），以及不等式(3.2)，我们可以得到以下估计

$$\begin{aligned}I_1&=\int_{R^3}u\cdot\nabla u\cdot\Delta u\mathrm{d}x\\&=-\int_{R^3}(\nabla u:\nabla u)\cdot\nabla u\mathrm{d}x-\int_{R^3}(u\cdot\nabla\nabla u)\cdot\nabla u\mathrm{d}x\\&=-\int_{R^3}(\nabla u:\nabla u)\cdot\nabla u\mathrm{d}x\\&\le\|\nabla u\|_{L^3}^3\\&\le C\|\nabla u\|_{\dot{B}^{-\gamma}_{\infty,\infty}}\|\nabla u\|_{\dot{H}^{\frac{\gamma}{2}}}^2\\&\le C\|\nabla u\|_{\dot{B}^{-\gamma}_{\infty,\infty}}\|\nabla u\|_{L^2}^{2-\gamma}\|\Delta u\|_{L^2}^{\gamma}\\&\le C\|\nabla u\|_{\dot{B}^{-\gamma}_{\infty,\infty}}^{\frac{2}{2-\gamma}}\|\nabla u\|_{L^2}^2+\frac{\upsilon}{2}\|\Delta u\|_{L^2}^2\\&\le C\frac{\|\nabla u\|_{\dot{B}^{-\gamma}_{\infty,\infty}}^{\frac{2}{2-\gamma}}}{1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)}\|\nabla u\|_{L^2}^2\left(1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)\right)+\frac{\upsilon}{2}\|\Delta u\|_{L^2}^2.\end{aligned}\tag{4.4}$$

类似地，我们可以得到

$$\begin{aligned}I_4&=\int_{R^3}u\cdot\nabla w\cdot\Delta w\mathrm{d}x\\&\le C\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla w\|_{L^4}^2\\&\le C\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla w\|_{\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}}\|\nabla w\|_{\dot{H}^1}\\&\le C\|\nabla u\|_{L^2}^2\|\nabla w\|_{\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}}^2+\frac{\mu}{2}\|\Delta w\|_{L^2}^2\\&\le C\frac{\|\nabla w\|_{\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}}^2}{1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)}\|\nabla u\|_{L^2}^2\left(1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)\right)+\frac{\mu}{2}\|\Delta w\|_{L^2}^2.\end{aligned}\tag{4.5}$$

和

$$
\begin{aligned}
I_2+I_3+I_5 &= -2\chi\int_{R^3} curl\,w\cdot\Delta u\mathrm{d}x-2\chi\int_{R^3} curl\,u\cdot\Delta w\mathrm{d}x-4\chi\|\nabla w\|_{L^2}^2\\
&=-4\chi\int_{R^3} curlw\cdot\Delta u\mathrm{d}x-4\chi\|\nabla w\|_{L^2}^2\\
&\le 4\chi\left|\int_{R^3} curlw\cdot\Delta u\mathrm{d}x\right|-4\chi\|\nabla w\|_{L^2}^2\\
&\le 4\chi\|\nabla w\|_{L^2}\|\Delta u\|_{L^2}-4\chi\|\nabla w\|_{L^2}^2\\
&\le 4\chi\|\nabla w\|_{L^2}^2+\chi\|\Delta u\|_{L^2}^2-4\chi\|\nabla w\|_{L^2}^2\\
&\le \chi\|\Delta u\|_{L^2}^2 .
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

将(4.4)，(4.5)，(4.6)代入(4.3)，就有

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla w\|_{L^2}^2\right)+\upsilon\|\Delta u\|_{L^2}^2+\mu\|\Delta w\|_{L^2}^2+2\kappa\|\nabla div\,w\|_{L^2}^2\\
&\le C\frac{\|\nabla u\|_{\dot B_{\infty,\infty}^{-\gamma}}^{\frac{2}{2-\gamma}}}{1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)}\|\nabla u\|_{L^2}^2\left(1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)\right)\\
&\quad +C\frac{\|\nabla w\|_{\dot B_{\infty,\infty}^{-1}}^2}{1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)}\|\nabla u\|_{L^2}^2\left(1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)\right)\\
&\le C\frac{\|\nabla u\|_{\dot B_{\infty,\infty}^{-\gamma}}^{\frac{2}{2-\gamma}}+\|\nabla w\|_{\dot B_{\infty,\infty}^{-1}}^2}{1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)}\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla w\|_{L^2}^2\right)\left(1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla w\|_{L^2}^2\right)\right).
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

然后，利用 Gronwall 不等式，我们就能得到

$$
\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla w\|_{L^2}^2\le\left(\|\nabla u_0\|_{L^2}^2+\|\nabla w_0\|_{L^2}^2\right)\exp\left\{\int_0^T\left[C\frac{\|\nabla u\|_{\dot B_{\infty,\infty}^{-\gamma}}^{\frac{2}{2-\gamma}}+\|\nabla w\|_{\dot B_{\infty,\infty}^{-1}}^2}{1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)}\left(1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla w\|_{L^2}^2\right)\right)\right]\right\}\mathrm{d}t. \tag{4.8}
$$

接下来，我们来估计 $\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla w\|_{L^2}^2\right)$，由以上不等式可得到

$$
\begin{aligned}
&\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla w\|_{L^2}^2\right)\\
&\le\ln\left(e+\|\nabla u_0\|_{L^2}^2+\|\nabla w_0\|_{L^2}^2\right)+\int_0^T\left[C\frac{\|\nabla u\|_{\dot B_{\infty,\infty}^{-\gamma}}^{\frac{2}{2-\gamma}}+\|\nabla w\|_{\dot B_{\infty,\infty}^{-1}}^2}{1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)}\left(1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla w\|_{L^2}^2\right)\right)\right].
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

再次用 Gronwall 不等式，有

$$
\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla w\|_{L^2}^2\right)\le C\left(u_0,w_0\right)\exp\left\{\int_0^T\left[C\frac{\|\nabla u\|_{\dot B_{\infty,\infty}^{-\gamma}}^{\frac{2}{2-\gamma}}+\|\nabla w\|_{\dot B_{\infty,\infty}^{-1}}^2}{1+\ln\left(e+\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)}\right]\mathrm{d}t\right\}. \tag{4.10}
$$

我们得出结论

$$
\operatorname{ess\,sup}_{0<t<T}\left\{\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla w\|_{L^2}^2\right\}<\infty.
$$

定理 2.1 得证。

参考文献

[1] Heywood, J.G. (1980) The Navier-Stokes Equations: On the Existence, Regularity and Decay of Solutions. *Indiana University Mathematics Journal*, **29**, 639-681. https://doi.org/10.1512/iumj.1980.29.29048

[2] Caffarelli, L., Kohn, R. and Nirenberg, L. (1982) Partial Regularity of Suitable Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **35**, 771-831. https://doi.org/10.1002/cpa.3160350604

[3] Cao, C. and Titi, E.S. (2008) Regularity Criteria for the Three-Dimensional Navier-Stokes Equations. *Indiana University Mathematics Journal*, **57**, 2643-2661. https://doi.org/10.1512/iumj.2008.57.3719

[4] Eringen, A.C. (1966) Theory of Micropolar Fluids. *Journal of Mathematics and Mechanics*, **16**, 1-18. https://doi.org/10.1512/iumj.1967.16.16001

[5] Dong, B.Q. and Zhang, W. (2010) On the Regularity Criterion for the Three-Dimensional Micropolar Flows in Besov Spaces. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **73**, 2334-2341. https://doi.org/10.1016/j.na.2010.06.029

[6] Wang, Y.X. and Zhao, H.J. (2012) Logarithmically Improved Blow up Criterion for Smooths Solution to the 3D Micropolar Fluid Equations. *Journal of Applied Mathematics*, **10**, 1-13. https://doi.org/10.1155/2012/541203

[7] Zhang, H. (2014) Logarithmically Improved Regularity Criterion for the 3D Micropolar Fluid Equations. *International Journal of Analysis*, **10**, 1-6. https://doi.org/10.1155/2014/386269

[8] Gala, S. (2011) On Regularity Criteria for the Three-Dimensional Micropolar Fluid Equations in the Critical Morrey-Campanato Space. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **12**, 2142-2150. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2010.12.028

[9] Lions, P.L. (1998) Mathematical Topics in Fluid Mechanics. Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications. Clarendon Press, Oxford.

[10] Yuan, B. (2010) Regularity of Weak Solutions to Magneto-Micropolar Fluid Equations. *Acta Mathematica Scientia*, **30**, 1469-1480. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(10)60139-7