

# 外平面图的区间全染色

张乔慧, 井普宁

浙江师范大学数学与计算机科学学院, 浙江 金华

Email: 2975386290@qq.com, jingpuning@163.com

收稿日期: 2021年8月6日; 录用日期: 2021年8月31日; 发布日期: 2021年9月8日

## 摘要

图 $G$ 的一个正常全染色是指一个映射  $\varphi: V(G) \cup E(G) \rightarrow N$ , 使得  $V(G) \cup E(G)$  中任意两个相邻的或相关联的元素染不同颜色。一个 $t$ -区间是指 $t$ 个连续整数组成的集合。如果 $G$ 的一个使用了颜色 $1, 2, \dots, t$ 的全染色使得 $G$ 中任意顶点 $v$ 以及与 $v$ 关联的边使用了 $d_G(v)+1$ 种连续的颜色, 其中 $d_G(v)$ 是 $G$ 中顶点 $v$ 的度, 并且 $G$ 中至少存在一个顶点或者一条边被染颜色 $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, t$ , 则称此全染色为图 $G$ 的一个区间全染色。在本文中, 我们研究外平面图的区间全染色。

## 关键词

区间全染色, 外平面图

# The Interval Total Colorings of Outerplane Graphs

Qiaohui Zhang, Puning Jing

College of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Email: 2975386290@qq.com, jingpuning@163.com

Received: Aug. 6<sup>th</sup>, 2021; accepted: Aug. 31<sup>st</sup>, 2021; published: Sep. 8<sup>th</sup>, 2021

## Abstract

A total coloring of a graph  $G$  is a mapping  $\varphi: V(G) \cup E(G) \rightarrow N$ , such that no adjacent vertices, edges, and no incident vertices and edges in  $V(G) \cup E(G)$  obtain the same color. A  $t$ -interval is a set of  $t$  consecutive integers. An interval total  $t$ -coloring of a graph  $G$  is a total coloring of  $G$  with colors  $1, 2, \dots, t$  such that at least one vertex or edge of  $G$  is colored by  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, t$ , and the

文章引用: 张乔慧, 井普宁. 外平面图的区间全染色[J]. 应用数学进展, 2021, 10(9): 2976-2987.

DOI: 10.12677/aam.2021.109312

edges incident to each vertex  $v$  together with  $v$  are colored by  $d_G(v)+1$  consecutive colors, where  $d_G(v)$  is the degree of the vertex  $v$  in  $G$ . In this paper, we study the interval total coloring of outerplane graphs.

## Keywords

Interval Total Coloring, Outerplane Graphs

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

本文只考虑有限的无向的简单图, 设  $G$  是一个点集为  $V(G)$ , 边集为  $E(G)$  的图, 它的最大度, 最小度分别为  $\Delta(G)$ ,  $\delta(G)$ 。对于任意顶点  $v \in V(G)$ , 令  $d_G(v)$  为  $G$  中顶点  $v$  的度。对于  $G$  的一个全染色  $\varphi$ , 将  $S[v, \varphi]$  定义为

$$S[v, \varphi] = \{\varphi(v)\} \cup \{\varphi(e) \mid e \text{ 关联于顶点 } v\}.$$

对于任意两个整数  $a, b$ ,  $[a, b] = \{a, a+1, \dots, b\}$ 。一个  $t$ -区间是指  $t$  个连续整数组成的集合。设  $\varphi$  为  $G$  的一个全染色, 所使用的颜色集合为  $C = \{1, 2, \dots, t\}$ , 且每种颜色至少出现一次, 若对于每一个顶点  $v \in V(G)$ , 与  $v$  相关联的边以及  $v$  本身所使用的颜色构成一个整数区间, 则称此全染色为图  $G$  的一个  $t$ -区间全染色。我们将使得图  $G$  存在一个  $t$ -区间全染色的最小的和最大的非负整数  $t$  分别称为图  $G$  的最小区间全色数和最大区间全色数, 分别记为  $w_t(G)$  和  $W_t(G)$ 。

2005 年, Petrosyan 在[1]中首先给出了图的区间全染色的概念, 并且证明了如果  $m+n+2-\gcd(m, n) \leq t \leq m+n+1$ , 那么完全二部图  $K_{m,n}$  存在  $t$ -区间全染色。2008 年, Petrosyan 和 Torosyan 在[2]中得出了  $w_t(K_n)$ ,  $W_t(K_n)$  和  $w_t(Q_n)$  的值以及  $W_t(Q_n)$  的下界。2009 年, Petrosyan 和 Torosyan 在[3]中得出了  $W_t(K_{m,n})$  的值。2009 年, Petrosyan, Shashikyan 和 Khachatryan 在[4] [5]中得出了树的最小区间全色数的上界以及轮图  $W_n$  的  $w_t(W_n)$  和  $W_t(W_n)$  的值。2010 年, Petrosyan, Shashikyan 和 Torosyan 在[6]中得出了  $(r, r-1)$ -双正则二部图以及  $(r, 2)$ -双正则二部图都存在区间全染色。2013 年, Petrosyan 和 Khachatryan 在[7]中证明了路或圈与  $r$ -正则图的笛卡尔积分别存在区间全染色。2014 年, Petrosyan 和 Khachatryan 在[8]中得出了  $w_t(K_{n, \dots, n})$  的上界和  $W_t(K_{n, \dots, n})$  的下界。

## 2. 主要结果

在展示主要结果前, 我们先建立一些引理。

**引理 1** [9] 如果图  $G$  是一个  $\Delta=3$  的 2-连通外平面图, 则至少有以下之一成立:

- (1) 存在相邻的两个 2 度点  $u$  和  $v$ ;
- (2) 存在一个三角面  $uvw$  使得  $d_G(u) = d_G(w) = 3$ ,  $d_G(v) = 2$ 。

**定理 1** 如果图  $G$  是一个  $\Delta=3$  的外平面图, 则  $w_t(G) \leq 5$ 。

证明: 我们先考虑  $\delta=2$  的情况。

**情况 1**  $G$  中不存在割边。

我们对图  $G$  的顶点数  $|V(G)|$  进行归纳。对于  $|V(G)| = 4$ , 结论显然成立。假设此定理对于图  $H$  成立, 其中  $\Delta(H) = 3$ ,  $\delta(H) = 2$  且  $4 < |V(H)| < |V(G)|$ 。由引理 1 知: 至少有以下之一成立: (1) 存在相邻的两个 2 度点  $u$  和  $v$ ; (2) 存在一个三角面  $uvw$  使得  $d_G(u) = d_G(w) = 3$ ,  $d_G(v) = 2$ 。因此, 我们考虑两种子情况。

**情况 1.1**  $uv \in E(G)$  且  $d_G(u) = d_G(v) = 2$ 。

显然, 此时  $G$  中存在两个不同顶点  $x, y$  使得  $ux \in E(G)$ ,  $vy \in E(G)$ 。

**情况 1.1.1**  $xy \notin E(G)$ 。

令  $H = G - u - v + xy$ , 显然,  $|V(H)| < |V(G)|$ , 且  $\Delta(H) = 3$ ,  $\delta(H) = 2$ 。由归纳假设知:  $H$  存在一个区间全染色  $\varphi$  且  $w_t(H) \leq 5$ 。

(1)  $d_G(x) = d_G(y) = 2$ , 即  $d_H(x) = d_H(y) = 2$ 。

①  $\varphi(xy) = 1$  (或 5)。

不失一般性, 根据对称性可假设  $\varphi(x) = 2(3)$ ,  $\varphi(y) = 3(4)$ 。将边  $xy$  删掉, 然后分别将边  $xu$ ,  $vy$  和  $uv$  染颜色  $4(2)$ ,  $1(5)$ ,  $3(3)$ 。然后将顶点  $u$  和  $v$  分别染颜色  $1(5)$  和  $2(4)$ 。剩余顶点和边的颜色与  $H$  中对应的顶点和边的颜色相同。显然, 所获得的全染色是  $G$  的一个 5-区间全染色。

②  $\varphi(xy) = 2$  (或 4)。

此时, 将边  $xy$  删掉, 然后分别将边  $xu$ ,  $vy$  和  $uv$  染颜色  $2(4)$ ,  $2(4)$ ,  $3(3)$ 。因为  $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ , 所以如果  $\varphi(x) = 4(5)$  或  $\varphi(y) = 1(2)$ , 那么将顶点  $u$  和  $v$  分别染颜色  $1(2)$  和  $4(5)$ 。否则将顶点  $u$  和  $v$  分别染颜色  $4(5)$  和  $1(2)$ 。剩余顶点和边的颜色与  $H$  中对应的顶点和边的颜色相同。显然, 所获得的全染色是  $G$  的一个 5-区间全染色。

③  $\varphi(xy) = 3$ 。

此时, 将边  $xy$  删掉, 然后分别将边  $xu$ ,  $vy$  和  $uv$  染颜色  $3, 3, 4$ 。因为  $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ , 所以如果  $\varphi(x) = 5$  或  $\varphi(y) = 2$ , 那么将顶点  $u$  和  $v$  分别染颜色  $2$  和  $5$ 。否则将顶点  $u$  和  $v$  分别染颜色  $5$  和  $2$ 。剩余顶点和边的颜色与  $H$  中对应的顶点和边的颜色相同。显然, 所获得的全染色是  $G$  的一个 5-区间全染色。

(2)  $d_G(x) = 2$  且  $d_G(y) = 3$ 。

①  $\varphi(xy) = a$ ,  $a = 1, 2, 3, 4$ 。

在这些情况中, 染色规则与(1)中对应相同。

②  $\varphi(xy) = 5$ 。

如果  $\varphi(x) = 4$  或  $\varphi(y) = 2$ , 那么将边  $xy$  删掉, 然后分别将边  $xu$ ,  $vy$  和  $uv$  染颜色  $2, 5, 3$ , 将顶点  $u$  和  $v$  分别染颜色  $1$  和  $4$ 。否则就将边  $xy$  删掉, 然后分别将边  $xu$ ,  $vy$  和  $uv$  染颜色  $5, 1, 3$ , 将顶点  $u$  和  $v$  分别染颜色  $4$  和  $2$ 。剩余顶点和边的颜色与  $H$  中对应的顶点和边的颜色相同。显然, 所获得的全染色是  $G$  的一个 5-区间全染色。

(3)  $d_G(x) = d_G(y) = 3$ 。

①  $\varphi(xy) = 1$  (或 5)。

如果  $\varphi(x) = 4$  或  $\varphi(y) = 2$ , 那么将边  $xy$  删掉, 然后分别将边  $xu$ ,  $vy$  和  $uv$  染颜色  $1, 5, 3$ , 将顶点  $u$  和  $v$  分别染颜色  $2$  和  $4$ 。否则就将边  $xy$  删掉, 然后分别将边  $xu$ ,  $vy$  和  $uv$  染颜色  $5, 1, 3$ , 将顶点  $u$  和  $v$  分别染颜色  $4$  和  $2$ 。剩余顶点和边的颜色与  $H$  中对应的顶点和边的颜色相同。显然, 所获得的全染色是  $G$  的一个 5-区间全染色。

②  $\varphi(xy) = a$ ,  $a = 2, 3, 4$ 。

在这些情况中, 染色规则与(1)中对应相同。

**情况 1.1.2**  $xy \in E(G)$ 。

令  $H = G - u - v$ ，显然， $|V(H)| < |V(G)|$  且  $\Delta(H) = 3$ ，由归纳假设知： $H$  存在一个 5-区间全染色  $\varphi$ 。显然此时有： $d_G(x) = d_G(y) = 3$ 。

①  $\varphi(xy) = 1$  (或 5)。

不失一般性，根据对称性可假设  $\varphi(x) = 2(3)$ ， $\varphi(y) = 3(4)$ 。然后分别将边  $xu$ ， $vy$  和  $uv$  染颜色 4(2)，4(2)，3(3)。然后将顶点  $u$  和  $v$  分别染颜色 5(4) 和 2(1)。剩余顶点和边的颜色与  $H$  中对应的顶点和边的颜色相同。显然，所获得的全染色是  $G$  的一个 5-区间全染色。

②  $\varphi(xy) = 2$  (或 4)。

(i)  $S[x, \varphi] = S[y, \varphi] = [1, 3]$  (或  $[3, 5]$ )。

不失一般性，根据对称性可假设  $\varphi(x) = 3(5)$ ， $\varphi(y) = 1(3)$ 。然后分别将边  $xu$ ， $vy$  和  $uv$  染颜色 4(2)，4(2)，3(3)。然后将顶点  $u$  和  $v$  分别染颜色 2(1) 和 5(4)。剩余顶点和边的颜色与  $H$  中对应的顶点和边的颜色相同。显然，所获得的全染色是  $G$  的一个 5-区间全染色。

(ii)  $S[x, \varphi] = [1, 3]$ ， $S[y, \varphi] = [2, 4]$  (或  $S[x, \varphi] = [2, 4]$ ， $S[y, \varphi] = [3, 5]$ )。

因为  $4(5) \notin S[x, \varphi]$  且  $1(2) \notin S[y, \varphi]$ ，所以可以分别将边  $xu$ ， $vy$  和  $uv$  染颜色 4(5)，1(2)，3(3)。然后将顶点  $u$  和  $v$  分别染颜色 5(4) 和 2(1)。剩余顶点和边的颜色与  $H$  中对应的顶点和边的颜色相同。显然，所获得的全染色是  $G$  的一个 5-区间全染色。

(iii)  $S[x, \varphi] = S[y, \varphi] = [2, 4]$  (或  $[2, 4]$ )。

不失一般性，根据对称性可假设  $\varphi(x) = 3(2)$ ， $\varphi(y) = 4(3)$ 。这两种子情况可以用相同的染色方法。因为  $5 \notin S[x, \varphi]$  且  $1 \notin S[y, \varphi]$ ，所以分别将边  $xu$ ， $vy$  和  $uv$  染颜色 5，1，3。然后将顶点  $u$  和  $v$  分别染颜色 4 和 2。剩余顶点和边的颜色与  $H$  中对应的顶点和边的颜色相同。显然，所获得的全染色是  $G$  的一个 5-区间全染色。

③  $\varphi(xy) = 3$ 。

(i)  $S[x, \varphi] = S[y, \varphi] = [1, 3]$ 。

不失一般性，根据对称性可假设  $\varphi(x) = 1$ ， $\varphi(y) = 2$ 。这种情况下，染色规则与情况 1.1.2 中②(i)的对应情况一样。

(ii)  $S[x, \varphi] = [1, 3]$ ， $S[y, \varphi] = [2, 4]$ 。

如果  $\varphi(x) \neq 1$  且  $\varphi(y) \neq 2$ ，染色规则与情况 1.1.2 中②(ii)的对应情况一样。否则就分别将边  $xu$ ， $vy$  和  $uv$  染颜色 4，5，3。然后将顶点  $u$  和  $v$  分别染颜色 2 和 4。剩余顶点和边的颜色与  $H$  中对应的顶点和边的颜色相同。显然，所获得的全染色是  $G$  的一个 5-区间全染色。

(iii)  $S[x, \varphi] = [1, 3]$ ， $S[y, \varphi] = [3, 5]$ 。

因为  $4, 5 \notin S[x, \varphi]$  且  $1, 2 \notin S[y, \varphi]$ ，所以分别将边  $xu$ ， $vy$  和  $uv$  染颜色 4，2，3。然后将顶点  $u$  和  $v$  分别染颜色 5 和 1。剩余顶点和边的颜色与  $H$  中对应的顶点和边的颜色相同。显然，所获得的全染色是  $G$  的一个 5-区间全染色。

(iv)  $S[x, \varphi] = S[y, \varphi] = [2, 4]$  (或  $[3, 5]$ )。

不失一般性，根据对称性可假设  $\varphi(x) = 2(4)$ ， $\varphi(y) = 4(5)$ 。染色规则与情况 1.1.2 中②的对应情况一样。

(v)  $S[x, \varphi] = [2, 4]$ ， $S[y, \varphi] = [3, 5]$ 。

如果  $\varphi(x) \neq 4$  且  $\varphi(y) \neq 5$ ，那么将边  $xy$  删掉，然后分别将边  $xu$ ， $vy$  和  $uv$  染颜色 5，2，3，将顶点  $u$  和  $v$  分别染颜色 4 和 1。否则就将边  $xy$  删掉，然后分别将边  $xu$ ， $vy$  和  $uv$  染颜色 1，2，3，将顶点  $u$  和

$v$  分别染颜色 2 和 1。剩余顶点和边的颜色与  $H$  中对应的顶点和边的颜色相同。显然, 所获得的全染色是  $G$  的一个 5-区间全染色。

**情况 1.2**  $uv, vw, uw \in E(G)$ , 且  $d_G(u) = d_G(w) = 3$ ,  $d_G(v) = 2$ 。

令  $H = G - v$ , 显然,  $|V(H)| < |V(G)|$  且  $\Delta(H) = 3$ , 由归纳假设知:  $H$  存在一个 5-区间全染色  $\varphi$ 。我们考虑边  $uw$  的颜色  $\varphi(uw)$ 。由于  $d_G(u) = 3$ , 所以  $G$  中存在一个顶点  $u' \in N_G(u) \setminus \{v, w\}$ 。同理存在一个顶点  $w' \in N_G(w) \setminus \{u, v\}$ 。

**情况 1.2.1**  $\varphi(uw) = 1$ (或 5)。

不失一般性, 根据对称性可假设  $\varphi(u) = 3(3)$ ,  $\varphi(w) = 2(4)$ 。如果  $\varphi(u') \neq 4(2)$ , 那么将顶点  $u$  的颜色改为颜色 4(2), 然后将边  $uv$ ,  $vw$  和顶点  $v$  分别染颜色 3(3), 4(2), 5(1)。否则就将顶点  $u$  和边  $uw$  的颜色改为颜色 5(1)和 4(2), 然后将边  $uv$ ,  $vw$  和顶点  $v$  分别染颜色 3(3), 5(1), 4(2)。剩余顶点和边的颜色与  $H$  中对应的顶点和边的颜色相同。显然, 所获得的全染色是  $G$  的一个 5-区间全染色。

**情况 1.2.2**  $\varphi(uw) = 2$ (或 4)。

(1)  $S[u, \varphi] = S[w, \varphi] = [1, 3]$ (或  $[3, 5]$ )。

不失一般性, 根据对称性可假设  $\varphi(u) = 1(3)$ ,  $\varphi(w) = 3(5)$ 。如果  $\varphi(w') \neq 4(\varphi(u') \neq 2)$ , 那么将顶点  $w$  ( $u$ ) 的颜色改为颜色 4(2), 然后将边  $uv$ ,  $vw$  和顶点  $v$  分别染颜色 4(3), 3(2), 2(4)。否则就将顶点  $w(u)$  和边  $uw$  的颜色分别改为颜色 2(4)和 4(2), 然后将边  $uv$ ,  $vw$  和顶点  $v$  分别染颜色 2(3), 3(4), 4(2)。剩余顶点和边的颜色与  $H$  中对应的顶点和边的颜色相同。显然, 所获得的全染色是  $G$  的一个 5-区间全染色。

(2)  $S[u, \varphi] = [1, 3]$ ,  $S[w, \varphi] = [2, 4]$  ( $S[u, \varphi] = [2, 4], S[w, \varphi] = [3, 5]$ )。

①  $\varphi(u) = 1(3)$  且  $\varphi(w) = 3(5)$ 。

如果  $\varphi(w') \neq 5(\varphi(u') \neq 1)$ , 那么将顶点  $w$  ( $u$ ) 的颜色改为颜色 5 (1), 然后将边  $uv$ ,  $vw$  和顶点  $v$  分别染颜色 4(3), 3(2), 2(4)。如果  $\varphi(w') = 5$  且  $\varphi(u') \neq 4$  ( $\varphi(u') = 1$  且  $\varphi(w') \neq 2$ ), 那么将顶点  $u$ ,  $w$  和边  $uw$  的颜色分别改为颜色 4(4), 2(2)和 1(5), 然后将边  $uv$ ,  $vw$  和顶点  $v$  分别染颜色 2(3), 3(4), 1(5)。如果  $\varphi(w') = 5$  且  $\varphi(u') = 4$  ( $\varphi(u') = 1$  且  $\varphi(w') = 2$ ), 那么将顶点  $u$  和  $w$  的颜色分别改为颜色 5(5)和 1(1), 然后将边  $uv$ ,  $vw$  和顶点  $v$  分别染颜色 4(3), 3(2), 2(4)。剩余顶点和边的颜色与  $H$  中对应的顶点和边的颜色相同。显然, 所获得的全染色是  $G$  的一个 5-区间全染色。

②  $\varphi(u) = 1(2)$  且  $\varphi(w) = 4(5)$ 。

因为  $4(1) \notin S[u, \varphi]$  且  $5(2) \notin S[w, \varphi]$ , 所以将边  $uv$ ,  $vw$  和顶点  $v$  分别染颜色 4(1), 5(2), 3(3)。剩余顶点和边的颜色与  $H$  中对应的顶点和边的颜色相同。显然, 所获得的全染色是  $G$  的一个 5-区间全染色。

③  $\varphi(u) = 3(2)$  且  $\varphi(w) = 4(3)$ 。

如果  $\varphi(u') \neq 4$  且  $\varphi(w') \neq 5$  ( $\varphi(u') \neq 1$  且  $\varphi(w') \neq 2$ ), 那么将顶点  $u$  和  $w$  的颜色分别改为颜色 4(1), 5(2), 然后将边  $uv$ ,  $vw$  和顶点  $v$  分别染颜色 3(2), 4(3), 2(4)。如果  $\varphi(u') = 4$  且  $\varphi(w') \neq 5$  ( $\varphi(u') \neq 1$  且  $\varphi(w') = 2$ ), 那么将顶点  $u$ ,  $w$  和边  $uw$  的颜色分别改为颜色 2(1), 5(4)和 4(2), 然后将边  $uv$ ,  $vw$  和顶点  $v$  分别染颜色 3(4), 2(3), 4(2)。如果  $\varphi(u') \neq 4$  且  $\varphi(w') = 5$  ( $\varphi(u') = 1$  且  $\varphi(w') \neq 2$ ), 那么将顶点  $u$  和  $w$  的颜色分别改为颜色 4(5), 1(2), 然后将边  $uv$ ,  $vw$  和顶点  $v$  分别染颜色 3(2), 4(3), 2(4)。如果  $\varphi(u') = 4$  且  $\varphi(w') = 5$  ( $\varphi(u') = 1$  且  $\varphi(w') = 2$ ), 那么将顶点  $u$ ,  $w$  和边  $uw$  的颜色分别改为颜色 2(5), 1(4)和 4(2), 然后将边  $uv$ ,  $vw$  和顶点  $v$  分别染颜色 3(4), 2(3), 4(2)。剩余顶点和边的颜色与  $H$  中对应的顶点和边的颜色相同。显然, 所获得的全染色是  $G$  的一个 5-区间全染色。

(3)  $S[u, \varphi] = S[w, \varphi] = [2, 4]$ ( $[2, 4]$ )。

不失一般性, 根据对称性可假设  $\varphi(u) = 3(2)$ ,  $\varphi(w) = 4(3)$ 。如果  $\varphi(u') \neq 1(\varphi(w') \neq 5)$ , 那么将顶点

$u(w)$  的颜色改为颜色 1(5), 然后将边  $uv$ ,  $vw$  和顶点  $v$  分别染颜色 3(5), 1(3), 2(4)。否则就将顶点  $u(w)$  的颜色改为颜色 5(1), 然后将边  $uv$ ,  $vw$  和顶点  $v$  分别染颜色 3(5), 1(3), 2(4)。剩余顶点和边的颜色与  $H$  中对应的顶点和边的颜色相同。显然, 所获得的全染色是  $G$  的一个 5-区间全染色。

**情况 1.2.3**  $\varphi(uw) = 3$ 。

(1)  $S[u, \varphi] = S[w, \varphi] = [1, 3]$ 。

不失一般性, 根据对称性可假设  $\varphi(u) = 1$ ,  $\varphi(w) = 2$ 。如果  $\varphi(w') \neq 4$ , 那么将顶点  $w$  的颜色改为颜色 4, 然后将边  $uv$ ,  $vw$  和顶点  $v$  分别染颜色 4, 2, 3。否则就将顶点  $w$  和边  $uw$  的颜色分别改为 3, 4, 然后将边  $uv$ ,  $vw$  和顶点  $v$  分别染颜色 3, 2, 4。剩余顶点和边的颜色与  $H$  中对应的顶点和边的颜色相同。显然, 所获得的全染色是  $G$  的一个 5-区间全染色。

(2)  $S[u, \varphi] = [1, 3]$ ,  $S[w, \varphi] = [2, 4]$  ( $S[u, \varphi] = [1, 3]$ ,  $S[w, \varphi] = [3, 5]$ )。

因为  $4(4) \notin S[u, \varphi]$  且  $5(2) \notin S[w, \varphi]$ , 所以将边  $uv$ ,  $vw$  和顶点  $v$  分别染颜色 4(4), 5(2), 3(3)。剩余顶点和边的颜色与  $H$  中对应的顶点和边的颜色相同。显然, 所获得的全染色是  $G$  的一个 5-区间全染色。

(3)  $S[u, \varphi] = S[w, \varphi] = [2, 4]$ 。

不失一般性, 根据对称性可假设  $\varphi(u) = 2$ ,  $\varphi(w) = 4$ 。如果  $\varphi(u') \neq 5$ , 那么将顶点  $u$  的颜色改为颜色 5, 然后将边  $uv$ ,  $vw$  和顶点  $v$  分别染颜色 2, 1, 3。否则就将顶点  $u$  的颜色改为颜色 1, 然后将边  $uv$ ,  $vw$  和顶点  $v$  分别染颜色 2, 1, 3。剩余顶点和边的颜色与  $H$  中对应的顶点和边的颜色相同。显然, 所获得的全染色是  $G$  的一个 5-区间全染色。

(4)  $S[u, \varphi] = [2, 4]$ ,  $S[w, \varphi] = [3, 5]$

因为  $1 \notin S[u, \varphi]$  且  $2 \notin S[w, \varphi]$ , 所以将边  $uv$ ,  $vw$  和顶点  $v$  分别染颜色 1, 2, 3。剩余顶点和边的颜色与  $H$  中对应的顶点和边的颜色相同。显然, 所获得的全染色是  $G$  的一个 5-区间全染色。

(5)  $S[u, \varphi] = S[w, \varphi] = [3, 5]$ 。

不失一般性, 根据对称性可假设  $\varphi(u) = 4$ ,  $\varphi(w) = 5$ 。如果  $\varphi(w') \neq 2$ , 那么将顶点  $w$  的颜色改为颜色 2, 然后将边  $uv$ ,  $vw$  和顶点  $v$  分别染颜色 2, 1, 3。否则就将顶点  $w$  和边  $vw$  的颜色分别改为 3, 2, 然后将边  $uv$ ,  $vw$  和顶点  $v$  分别染颜色 3, 1, 2。剩余顶点和边的颜色与  $H$  中对应的顶点和边的颜色相同。显然, 所获得的全染色是  $G$  的一个 5-区间全染色。

**情况 2**  $G$  中存在割边。

显然,  $G$  中存在某条割边与一个 2-连通块  $B$  关联。

**情况 2.1**  $|V(B)| \geq 5$ 。

此时, 我们可以在块  $B$  中借助数学归纳法证明此定理, 方法情况 1 与一样。

**情况 2.2**  $|V(B)| = 3$ 。

令顶点  $w$  是块  $B$  与割边的公共顶点。显然  $d_G(w) = 3$ 。令  $N_B(w) = \{u, v\}$ , 令  $x$  为距离顶点  $w$  最近的 3 度点。我们先假设  $x$  不在圈上。

**情况 2.2.1**  $x$  与顶点  $w$  相邻。

对  $|V(G)|$  进行归纳。如果  $|V(G)| = 7$ , 定理成立。假设此定理对于图  $H$  成立, 其中  $\Delta(H) = 3$ ,  $\delta(H) = 2$  且  $7 < |V(H)| < |V(G)|$ 。令  $H = G - u - v - w$ 。显然,  $|V(H)| < |V(G)|$  且  $\Delta(H) = 3$ ,  $\delta(H) = 2$ 。由归纳假设知:  $H$  存在一个 5-区间全染色  $\varphi$ 。令  $\varphi(xw) = a$ 。

(1)  $\varphi(xw) = a \in \{1, 5\}$ 。

如果  $\varphi(x) \neq 2$ , 那么将顶点  $u$ ,  $v$  和  $w$  分别染颜色 4, 3, 2, 然后将边  $uw$ ,  $vw$  和  $uv$  分别染颜色 3, 4, 2。否则就将顶点  $u$ ,  $v$  和  $w$  分别染颜色 4, 2, 3, 然后将边  $uw$ ,  $vw$  和  $uv$  分别染颜色 2, 4, 3。

(2)  $\varphi(xw) = a \in \{2, 3, 4\}$ 。

存在两个正整数  $b, c$  使得  $\{1, a, b, c\} = [1, 4]$ , 其中  $a \neq b \neq c \neq 1$  且  $a, b, c \in \{2, 3, 4\}$ 。如果  $\varphi(x) \neq 1$ , 那么将顶点  $u, v$  和  $w$  分别染颜色  $c, b, 1$ , 然后将边  $uw, vw$  和  $uv$  分别染颜色  $b, c, a$ 。如果  $\varphi(x) = 1$  且  $\varphi(xw) = 2$ , 那么将顶点  $u, v$  和  $w$  分别染颜色  $3, 1, 4$ , 然后将边  $uw, vw$  和  $uv$  分别染颜色  $1, 3, 2$ 。如果  $\varphi(x) = 1$  且  $\varphi(xw) \in \{3, 4\}$ , 那么将顶点  $u, v$  和  $w$  分别染颜色  $2, 1, 4$ , 然后将边  $uw, vw$  和  $uv$  分别染颜色  $1, 2, 3$ 。

**情况 2.2.2** 顶点  $x$  与顶点  $w$  之间是一条路  $P_m$ 。令  $V(P_m) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ , 其中  $x_1 = x, x_m = w$ 。

1.  $\varphi(x_1x_2) = 1$ 。

给图  $G$  定义一个全染色  $\psi$  :

(1) 对于任意  $i \in \{2, 3, \dots, m-1\}$ ,

$$\psi(x_i) = \begin{cases} 2 & i \equiv 2 \pmod{3} \\ 1 & i \equiv 0 \pmod{3} \\ 3 & i \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$$

(2) 对于任意  $j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ ,

$$\psi(x_jx_{j+1}) = \begin{cases} 1 & j \equiv 1 \pmod{3} \\ 3 & j \equiv 2 \pmod{3} \\ 2 & j \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

如果  $\varphi(x_1) = 2$ , 那么交换(1)中染颜色 2 和 3 的顶点的颜色, 且同时交换(2)中染颜色 2 和 3 的边的颜色。显然  $\psi(x_{m-1}x_m) = 1$  或 2 或 3。

①  $\psi(x_{m-1}x_m) = 1$ 。

如果  $\psi(x_{m-1}) = 2$ , 那么将顶点  $u, v$  和  $w$  分别染颜色 4, 2, 3, 然后将边  $uw, vw$  和  $uv$  分别染颜色 2, 4, 3。如果  $\psi(x_{m-1}) = 3$ , 那么将顶点  $u, v$  和  $w$  分别染颜色 4, 3, 2, 然后将边  $uw, vw$  和  $uv$  分别染颜色 3, 4, 2。

②  $\psi(x_{m-1}x_m) = 2(3)$ 。

因为  $\psi(x_{m-1}) \neq 4$ , 所以将顶点  $u, v$  和  $w$  分别染颜色 3(2), 1(1), 4(4), 然后将边  $uw, vw$  和  $uv$  分别染颜色 1(1), 3(2), 2(3)。

2.  $\varphi(x_1x_2) = 2(3)$ 。

在 1 中的(1)和(2)的基础上, 交换(1)中染颜色 1(1)和 2(3)的顶点的颜色, 且同时交换(2)中染颜色 1(1)和 2(3)的边的颜色。假设新得到的全染色为  $\psi_1(\psi_2)$ 。如果  $\varphi(x_1) = 1(2)$ , 那么在  $\psi_1(\psi_2)$  的基础上, 交换(1)中染颜色 1(1)和 3(2)的顶点的颜色, 且同时交换(2)中染颜色 1(1)和 3(2)的边的颜色。显然  $\psi_1(x_{m-1}x_m) = 1$  或 2 或 3 ( $\psi_2(x_{m-1}x_m) = 1, 2, 3$ )。在各种子情况下, 染色规则与 1 中①②③分别对应相同。

3.  $\varphi(x_1x_2) = 4$ 。

给图  $G$  定义一个全染色  $\psi'$  :

(1) 对于任意  $i \in \{2, 3, \dots, m-1\}$ ,

$$\psi'(x_i) = \begin{cases} 2 & i \equiv 2 \pmod{3} \\ 4 & i \equiv 0 \pmod{3} \\ 3 & i \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$$

(2) 对于任意  $j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ ,

$$\psi'(x_j x_{j+1}) = \begin{cases} 4 & j \equiv 1(\text{mod } 3) \\ 3 & j \equiv 2(\text{mod } 3) \\ 2 & j \equiv 0(\text{mod } 3) \end{cases}$$

如果  $\varphi(x_1) = 2$ , 那么交换(1)中染颜色 2 和 3 的顶点的颜色, 且同时交换(2)中染颜色 2 和 3 的边的颜色。显然  $\psi'(x_{m-1}x_m) = 2$  或 3 或 4。

①  $\psi'(x_{m-1}x_m) = 2$  或 3。

因为  $\psi'(x_{m-1}) \neq 1$ , 所以将顶点  $u, v$  和  $w$  分别染颜色 4, 3, 1, 然后将边  $uw, vw$  和  $uv$  分别染颜色 3, 4, 2。

②  $\psi'(x_{m-1}x_m) = 4$ 。

因为  $\psi'(x_{m-1}) \neq 1$ , 所以将顶点  $u, v$  和  $w$  分别染颜色 3, 2, 1, 然后将边  $uw, vw$  和  $uv$  分别染颜色 2, 3, 4。

4.  $\varphi(x_1x_2) = 5$ 。

给图  $G$  定义一个全染色  $\psi''$  :

(1) 对于任意  $i \in \{2, 3, \dots, m-1\}$ ,

$$\psi''(x_i) = \begin{cases} 3 & i \equiv 2(\text{mod } 3) \\ 5 & i \equiv 0(\text{mod } 3) \\ 4 & i \equiv 1(\text{mod } 3) \end{cases}$$

(2) 对于任意  $j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ ,

$$\psi''(x_j x_{j+1}) = \begin{cases} 5 & j \equiv 1(\text{mod } 3) \\ 4 & j \equiv 2(\text{mod } 3) \\ 3 & j \equiv 0(\text{mod } 3) \end{cases}$$

如果  $\varphi(x_1) = 3$ , 那么交换(1)中染颜色 3 和 4 的顶点的颜色, 且同时交换(2)中染颜色 3 和 4 的边的颜色。显然  $\psi''(x_{m-1}x_m) = 3$  或 4 或 5。

①  $\psi''(x_{m-1}x_m) = 3(4)$ 。

因为  $\psi''(x_{m-1}) \neq 1$ , 所以将顶点  $u, v$  和  $w$  分别染颜色 4(3), 2(2), 1(1), 然后将边  $uw, vw$  和  $uv$  分别染颜色 2(2), 4(3), 3(4)。

②  $\psi''(x_{m-1}x_m) = 5$ 。

因为  $\psi''(x_{m-1}) \neq 2$ , 所以将顶点  $u, v$  和  $w$  分别染颜色 4, 3, 2, 然后将边  $uw, vw$  和  $uv$  分别染颜色 3, 4, 2。

最后, 我们考虑顶点  $x$  在圈上。令此圈为  $C_t$  且  $V(C_t) = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ , 其中  $x_1 = x$ 。

**情况 2.2.3**  $x$  与顶点  $w$  相邻。我们先染此圈。

1.  $t = 3k$ ,  $k \in N$ 。

给图  $C_t$  定义一个全染色  $\psi$  :

(1) 对于任意  $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ ,

$$\psi(x_i) = \begin{cases} 2 & i \equiv 0(\text{mod } 3) \\ 1 & i \equiv 1(\text{mod } 3) \\ 3 & i \equiv 2(\text{mod } 3) \end{cases}$$

(2) 对于任意  $j \in \{1, 2, \dots, t-1\}$ ,

$$\psi(x_j x_{j+1}) = \begin{cases} 3 & j \equiv 0 \pmod{3} \\ 2 & j \equiv 1 \pmod{3} \\ 1 & j \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

(3)  $\psi(x_1 x_t) = 3$ 。

2.  $t \neq 3k$ ,  $k \in N$  且  $t$  为奇数。

给图  $C_t$  定义一个全染色  $\psi$  :

(1) 对于任意  $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ ,

$$\psi(x_i) = \begin{cases} 4 & i \equiv 0 \pmod{2}, i \neq t-1 \\ 1 & i \equiv 1 \pmod{2}, i \neq t \\ 2 & i = t-1 \\ 3 & i = t \end{cases}$$

(2) 对于任意  $j \in \{1, 2, \dots, t-1\}$ ,

$$\psi(x_j x_{j+1}) = \begin{cases} 2 & j \equiv 0 \pmod{2}, j \neq t-1 \\ 3 & j \equiv 1 \pmod{2} \\ 4 & j = t-1 \end{cases}$$

(3)  $\psi(x_1 x_t) = 2$ 。

3.  $t \neq 3k$ ,  $k \in N$  且  $t$  为偶数。

给图  $C_t$  定义一个全染色  $\psi$  :

(1) 对于任意  $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ ,

$$\psi(x_i) = \begin{cases} 4 & i \equiv 0 \pmod{2} \\ 1 & i \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

(2) 对于任意  $j \in \{1, 2, \dots, t-1\}$ ,

$$\psi(x_j x_{j+1}) = \begin{cases} 2 & j \equiv 0 \pmod{2} \\ 3 & j \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

(3)  $\psi(x_1 x_t) = 2$ 。

显然,  $S[x_1, \psi] = [1, 3]$  且  $\psi(x_1) = 1$ 。所以我们可以将边  $x_1 w$  染颜色 4, 然后将顶点  $u$ ,  $v$  和  $w$  分别染颜色 2, 1, 3, 然后将边  $uw$ ,  $vw$  和  $uv$  分别染颜色 1, 2, 3。

**情况 2.2.4**  $x$  与顶点  $w$  之间是一条路。令此路为  $P_m$  且  $V(P_m) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ , 其中  $y_1 = x_1$ ,  $y_m = w$ 。

先用 **情况 2.2.3** 中同样的方法染圈  $C_t$ 。然后将边  $y_1 y_2$  染颜色 4。对于剩余顶点与边, 染色规则与 **情况 2.2.2** 中 4 的方法一样。

**情况 2.3**  $|V(B)| = 4$ 。

令顶点  $w$  是块  $B$  与割边的公共顶点。显然  $d_G(w) = 3$ 。令  $N_B(w) = \{x, z\}$ , 顶点  $y$  是  $x$  和  $z$  的公共顶点。如果边  $xz \in E(G)$ , 那么染色规则与 **情况 1** 一样。因此我们只需考虑  $B = C_4$ 。令  $w'$  为距离顶点  $w$  最近的 3 度点。我们先假设  $w'$  不在圈上。

**情况 2.3.1** 顶点  $w$  与  $w'$  相邻。

对  $|V(G)|$  进行归纳。如果  $|V(G)| = 8$ , 定理显然成立。假设对于任意的  $H$  来说, 定理成立, 其中  $8 < |V(H)| < |V(G)|$  且  $\Delta(H) = 3$ ,  $\delta(H) = 2$ 。令  $H = G - x - y - z - w$ , 由归纳假设知:  $H$  存在一个

5-区间全染色点  $\varphi$ 。令  $\varphi(w w') = a$ 。

(1)  $\varphi(w w') = a \in \{1, 5\}$ 。

如果  $\varphi(w') \neq 2$ , 那么将顶点  $x, y, z$  和  $w$  分别染颜色 5, 2, 5, 2, 然后将边  $xw, xy, yz$  和  $zw$  分别染颜色 3, 4, 3, 4。否则就将顶点  $x, y, z$  和  $w$  分别染颜色 1, 4, 1, 4, 然后将边  $xw, xy, yz$  和  $zw$  分别染颜色 2, 3, 2, 3。

(2)  $\varphi(w w') = a \in \{2, 3\}$ 。

如果  $\varphi(w') \neq 1$ , 那么将顶点  $x, y, z$  和  $w$  分别染颜色 2(4), 5(1), 2(3), 1(1), 然后将边  $xw, xy, yz$  和  $zw$  分别染颜色 3(2), 4(3), 3(2), 4(4)。否则就将顶点  $x, y, z$  和  $w$  分别染颜色 2(2), 5(5), 2(3), 4(4), 然后将边  $xw, xy, yz$  和  $zw$  分别染颜色 1(1), 3(3), 4(4), 3(2)。

(3)  $\varphi(w w') = 4$ 。

如果  $\varphi(w') \neq 1$ , 那么将顶点  $x, y, z$  和  $w$  分别染颜色 4, 1, 4, 1, 然后将边  $xw, xy, yz$  和  $zw$  分别染颜色 2, 3, 2, 3。否则就将顶点  $x, y, z$  和  $w$  分别染颜色 4, 1, 4, 5, 然后将边  $xw, xy, yz$  和  $zw$  分别染颜色 2, 3, 2, 3。

**情况 2.3.2** 顶点  $w'$  与顶点  $w$  之间是一条路  $P_m$ 。令  $V(P_m) = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ , 其中  $w_1 = w'$ ,  $w_m = w$ 。

1.  $\varphi(w_1 w_2) = 1$ 。

给图  $G$  定义一个全染色  $\psi$ :

(1) 对于任意  $i \in \{2, 3, \dots, m-1\}$ ,

$$\psi(w_i) = \begin{cases} 2 & i \equiv 2 \pmod{3} \\ 1 & i \equiv 0 \pmod{3} \\ 3 & i \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$$

(2) 对于任意  $j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ ,

$$\psi(w_j w_{j+1}) = \begin{cases} 1 & j \equiv 1 \pmod{3} \\ 3 & j \equiv 2 \pmod{3} \\ 2 & j \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

如果  $\varphi(w_1) = 2$ , 那么交换(1)中染颜色 2 和 3 的顶点的颜色, 且同时交换(2)中染颜色 2 和 3 的边的颜色。显然  $\psi(w_{m-1} w_m) = 1$  或 2 或 3。

①  $\psi(w_{m-1} w_m) = 1$ 。

因为  $\psi(w_{m-1}) \neq 4$ , 那么将顶点  $x, y, z$  和  $w$  分别染颜色 1, 4, 1, 4, 然后将边  $xw, xy, yz$  和  $zw$  分别染颜色 2, 3, 2, 3。

②  $\psi(w_{m-1} w_m) \in \{2, 3\}$ 。

因为  $\psi(w_{m-1}) \neq 4$ , 那么将顶点  $x, y, z$  和  $w$  分别染颜色 2(2), 5(5), 2(3), 4(4), 然后将边  $xw, xy, yz$  和  $zw$  分别染颜色 1(1), 3(3), 4(4), 3(2)。

2.  $\varphi(w_1 w_2) \in \{2, 3\}$ 。

在 1 中(1)和(2)的基础上, 交换(1)中染颜色 1(1)和 2(3)的顶点的颜色, 且同时交换(2)中染颜色 1(1)和 2(3)的边的颜色。假设新得到的全染色为  $\psi_1(\psi_2)$ 。如果  $\varphi(w_1) = 1(2)$ , 那么在  $\psi_1(\psi_2)$  的基础上, 交换(1)中染颜色 1(1)和 3(2)的顶点的颜色, 且同时交换(2)中染颜色 1(1)和 3(2)的边的颜色。显然  $\psi_1(w_{m-1} w_m) = 1$  或 2 或 3 ( $\psi_2(w_{m-1} w_m) = 1, 2, 3$ )。在各种子情况下, 染色规则与 1 中①②③分别对应相同。

3.  $\varphi(w_1 w_2) = 4$ 。

给图  $G$  定义一个全染色  $\psi'$ :

(1) 对于任意  $i \in \{2, 3, \dots, m-1\}$ ,

$$\psi'(w_i) = \begin{cases} 2 & i \equiv 2 \pmod{3} \\ 4 & i \equiv 0 \pmod{3} \\ 3 & i \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$$

(2) 对于任意  $j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ ,

$$\psi'(w_j w_{j+1}) = \begin{cases} 4 & j \equiv 1 \pmod{3} \\ 3 & j \equiv 2 \pmod{3} \\ 2 & j \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

如果  $\varphi(w_1) = 2$ , 那么交换(1)中染颜色 2 和 3 的顶点的颜色, 且同时交换(2)中染颜色 2 和 3 的边的颜色。显然  $\psi'(w_{m-1}w_m) = 2$  或 3 或 4。因为  $\psi'(w_{m-1}) \neq 1$ , 所以我们使用**情况 2.3.1** 中对应情况的染色规则来染剩余顶点与边。

4.  $\varphi(w_1 w_2) = 5$ 。

给图  $G$  定义一个全染色  $\psi''$ :

(1) 对于任意  $i \in \{2, 3, \dots, m-1\}$ ,

$$\psi''(w_i) = \begin{cases} 3 & i \equiv 2 \pmod{3} \\ 5 & i \equiv 0 \pmod{3} \\ 4 & i \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$$

(2) 对于任意  $j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ ,

$$\psi''(w_j w_{j+1}) = \begin{cases} 5 & j \equiv 1 \pmod{3} \\ 4 & j \equiv 2 \pmod{3} \\ 3 & j \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

如果  $\varphi(w_1) = 3$ , 那么交换(1)中染颜色 3 和 4 的顶点的颜色, 且同时交换(2)中染颜色 3 和 4 的边的颜色。显然  $\psi''(w_{m-1}w_m) = 3$  或 4 或 5。因为  $\psi''(w_{m-1}) \neq 1$  且  $\psi''(w_{m-1}) \neq 2$ , 所以我们使用**情况 2.3.1** 中对应情况的染色规则来染剩余顶点与边。

最后, 我们考虑顶点  $w'$  在圈上。令此圈为  $C_s$  且  $V(C_s) = \{y_1, y_2, \dots, y_s\}$ , 其中  $y_1 = w'$ 。

**情况 2.3.3**  $d_G(y_1) = d_G(w') = 3$  且  $y_1$  与  $w$  相邻。

先用**情况 2.2.3** 中染圈  $C_i$  的方法来染圈  $C_s$ 。然后将边  $wy_1$  染颜色 4。对于剩余顶点与边, 染色规则与**情况 2.3.1** 中(4)的方法一样。

**情况 2.3.4**  $y_1$  与顶点  $w$  之间是一条路。令此路为  $P_m$  且  $V(P_m) = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ , 其中  $w_1 = y_1$ ,  $w_m = w$ 。

先用**情况 2.2.3** 中染圈  $C_i$  的方法来染圈  $C_s$ 。然后将边  $w_1 w_2$  染颜色 4。对于剩余顶点与边, 染色规则与**情况 2.3.2** 中 3 的方法一样。

最后我们考虑  $\delta = 1$ , 即图  $G$  中存在叶子点, 将其中一个叶子点记为  $u$ , 将顶点  $u$  的邻点记为  $v$ 。对图  $G$  顶点数  $|V(G)|$  进行归纳, 如果  $|V(G)| = 2$ , 定理显然成立。假设对于任意的平面图  $H$  来说, 定理成立, 其中  $2 < |V(H)| < |V(G)|$  且  $\Delta(H) = 3$ ,  $\delta(H) = 2$ 。令  $H = G - u$ , 由归纳假设知:  $H$  存在一个 5-区间全染色点  $\varphi$ 。

**情况 3**  $d_G(v) = 2$ 。

(1)  $S[v, \varphi] = [1, 2]$  或  $[2, 3]$ 。

因为  $\max(S[v, \varphi]) + 1, \max(S[v, \varphi]) + 2 \notin S[v, \varphi]$ , 所以我们可以将边  $uv$  和顶点  $u$  分别染颜色  $\max(S[v, \varphi]) + 1, \max(S[v, \varphi]) + 2$ 。

(2)  $S[v, \varphi] = [3, 4]$  或  $[4, 5]$ 。

因为  $\min(S[v, \varphi]) - 1, \min(S[v, \varphi]) - 2 \notin S[v, \varphi]$ , 所以我们可以将边  $uv$  和顶点  $u$  分别染颜色  $\min(S[v, \varphi]) - 1, \min(S[v, \varphi]) - 2$ 。

**情况 4**  $d_G(v) = 3$ 。

(1)  $S[v, \varphi] = [1, 3]$  ( $[3, 5]$ )。

因为  $4, 5 \notin S[v, \varphi]$  ( $1, 2 \notin S[v, \varphi]$ ), 所以将边  $uv$  和顶点  $u$  分别染颜色  $4(2), 5(1)$ 。

(2)  $S[v, \varphi] = [2, 4]$ 。

如果  $\varphi(v) \neq 2$ , 所以将边  $uv$  和顶点  $u$  分别染颜色  $1, 2$ 。否则就将边  $uv$  和顶点  $u$  分别染颜色  $5, 4$ 。

**情况 2, 情况 3 和情况 4** 中剩余顶点和边的颜色与  $H$  中对应的顶点和边的颜色相同。显然, 所得到的全染色均为图  $G$  的一个 5-区间全染色且  $w_t(G) \leq 5$ 。□

## 参考文献

- [1] Petrosyan, P.A. (2007) Interval Total Colorings of Complete Bipartite Graphs. *Proceedings of the CSIT Conference*, 84-85.
- [2] Petrosyan, P.A. (2008) Interval Total Colorings of Certain Graphs. *Mathematical Problems of Computer Science*, **31**, 122-129.
- [3] Petrosyan, P.A. and Torosyan, A.Y. (2009) Interval Total Colorings of Complete Graphs. *Proceedings of the CSIT Conference*, 99-102.
- [4] Petrosyan, P.A. and Shashikyan, A.S. (2009) On Interval Total Colorings of Trees. *Mathematical Problems of Computer Science*, **32**, 70-73.
- [5] Petrosyan, P.A. and Khachatryan, N.A. (2009) Interval Total Coloring of Graphs with a Spanning Star. *Mathematical Problems of Computer Science*, **32**, 78-85.
- [6] Petrosyan, P.A., Shashikyan, A.S. and Torosyan, A.Y. (2010) Interval Total Colorings of Bipartite Graphs. *Proceedings of the 9th Cologne-Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization*, 133-136.
- [7] Petrosyan, P.A. and Khachatryan, N.A. (2013) On Interval Total Colorings of the Cartesian Products of Graphs, *Discrete Math. Proceedings of the CSIT Conference*, 85-86.
- [8] Petrosyan, P.A. and Khachatryan, N.A. (2014) Interval Total Colorings of Complete Multipartite Graphs and Hypercubes. *Mathematical Problems of Computer Science*, **32**, 28-42.
- [9] 王维凡, 张克明.  $\Delta$ -匹配与边面全色数[J]. 应用数学学报, 1999(22): 237-242.