

一些图的边覆盖多项式的对数凹性研究

岳清华

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连
Email: qhyuea@hotmail.com

收稿日期: 2021年8月3日; 录用日期: 2021年8月25日; 发布日期: 2021年9月7日

摘要

本文根据不同图形的特点, 通过递归的方法研究并给出了它们的边覆盖多项式, 并进一步研究了这些多项式的对数凹性, 主要包括蜈蚣图, 毛虫图, 脊椎图, 爆竹图等图。

关键词

边覆盖多项式, 对数凹性

Study on Log-Concavity of Edge Covering Polynomials of Some Graphs

Qinghua Yue

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning
Email: qhyuea@hotmail.com

Received: Aug. 3rd, 2021; accepted: Aug. 25th, 2021; published: Sep. 7th, 2021

Abstract

According to the characteristics of various graphs, their edge covering polynomials are studied and given by recursive method, we further investigate the log-concavity of the graphs in question, which include centipede graphs, caterpillar graphs, vertebrate graphs and firecracker graphs and so on.

Keywords

Edge Covering Polynomial, Log-Concavity



1. 介绍

单峰型问题是组合学中基本的研究课题之一,而对数凹性又是单峰型问题的重要组成部分。1989年, Stanley 用多种方法证明了一个序列具有对数凹性或者单峰性,并对于每种方法给出了例子[1]。1989年, Brenti 对组合学中了对数凹序列、单峰序列和 Pólya 频率序列进行了研究[2],并在1994年,更新了对代数、组合学和几何中的对数凹序列和单峰序列的研究[3]。2014年, Brändén 研究了组合学中的实根性、对数凹性和单峰性,对已经提出的一些新方法以及已经解决的问题和猜想进行了补充综述[4]。

目前,有很多学者研究了图多项式的对数凹性。1990年, Hamidoune 证明了无爪图的独立 k 子集数具有对数凹性,从而具有单峰性[5]。2012年, Bahls 证明了路径图的独立多项式具有对数凹性[6]。2012年, June Huh 对 Read 和 Rota-Heron-Welsh 关于色多项式系数的绝对值构成对数凹数列的猜想给与肯定答案[7]。2016年,祝宝宣证明了一些图的团覆盖积的独立多项式具有对称性、单峰性、对数凹性和实根性,并解决了一些单峰型猜想和问题[8]。

边覆盖多项式的概念是由 Akbari 和 Oboudi 首先提出的[9],他们证明了这类多项式有一些有趣的性质,发现在某种程度上,边覆盖多项式与其他著名的多项式相关,包括色多项式、匹配多项式、独立多项式、Tutte 多项式等。2013年, Akbari 和 Oboudi 刻画了所有边覆盖多项式恰好有一个或两个不同的根的图,并证明了这些多项式的根包含在 $\{-3, 2, 1, 0\}$ 中[9]。2011年, Csikvári 和 Oboudi 指出,边覆盖多项式的根有一个常数界,进一步证明了如果图 G 的每个块是 K_2 或一个圈,则 $E(G, x)$ 的所有实根都在区间 $(4, 0]$ 中[10]。

目前,已经有学者给出了一些图的独立多项式,并进一步研究了这些多项式的单峰性[11] [12] [13] [14]。本文我们给出一些图的边覆盖多项式并研究其对数凹性,包括蜈蚣图,毛虫图,脊椎图,爆竹图及其变化图等。下面介绍一些基本概念。

设 \mathcal{G}_n 表示在 $\{1, 2, \dots, n\}$ 上的所有简单标记图的集合。对于 $G \in \mathcal{G}_n$, 图 G 有 m 条边,图 G 的一个边覆盖是能够使得图 G 的每个顶点都至少与集合中一条边相连的一组边。图 G 的边覆盖多项式定义为

$$E(G, x) = \sum_{i=\rho(G)}^m e(G, i) x^i,$$

其中, $e(G, i)$ 表示边数为 i 的图 G 的边覆盖数, $\rho(G)$ 表示图 G 的边覆盖的最小可能数。如果图 G 有一个孤立的顶点,那么它的边覆盖多项式为 0 [9]。

一个系数为正的多项式 $\sum_{k=0}^n a_k x^k$, 如果存在 $m \geq 0$, 使得 $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{m-1} \leq a_m \geq a_{m+1} \geq \dots \geq a_n$, 则称这个多项式具有单峰性。如果对于任意 $1 \leq k \leq n-1$, 都有 $a_k^2 \geq a_{k-1} a_{k+1}$, 则称这个多项式具有对数凹性 [15]。

2. 一些图的边覆盖多项式及其对数凹性

定义 2.1 蜈蚣图 W_n (见图 1) 是一个树图, 定义为 $W_n = (A, B, E), n \geq 1$, 它的顶点集是 $A \cup B$, 边集是 $E = \{v_i w_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\}$, 其中, $A = \{v_i : 1 \leq i \leq n\}$, $B = \{w_i : 1 \leq i \leq n\}$, $A \cap B = \emptyset$ 。

定理 2.2 蜈蚣图 W_n 的边覆盖多项式为 $E(W_n, x) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{n+i}$ 。蜈蚣图 W_n 的边覆盖多项式具有对数凹性。

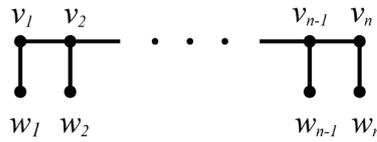


Figure 1. Centipede graph W_n
图 1. 蜈蚣图 W_n

证明：蜈蚣图 W_n 共有 $(2n-1)$ 条边。点 w_1, w_2, \dots, w_n 分别只能与点 v_1, v_2, \dots, v_n 有边相连，显然，边 $v_1w_1, v_2w_2, \dots, v_nw_n$ 是蜈蚣图 W_n 的最小边覆盖，即蜈蚣图 W_n 最少被 n 条边覆盖。可再从剩下的 $(n-1)$ 条边中选出 i 条边，与这 n 条边形成新的边覆盖，其中， $i = 0, 1, \dots, n-1$ 。

因此，蜈蚣图 W_n 的边覆盖多项式为 $E(W_n, x) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{n+i}$ 。

要证明蜈蚣图 W_n 的边覆盖多项式的对数凹性，即证 $e_k^2 \geq e_{k-1}e_{k+1}$ ，

其中， $e_k = \binom{n-1}{k}, k = 1, 2, \dots, n-2$ 。

根据蜈蚣图 W_n 的边覆盖多项式，

$$e_k = \binom{n-1}{k}, e_{k-1} = \binom{n-1}{k-1}, e_{k+1} = \binom{n-1}{k+1}$$

要证 $e_k^2 \geq e_{k-1}e_{k+1}$ ，

$$\text{即证 } \binom{n-1}{k}^2 \geq \binom{n-1}{k-1} \binom{n-1}{k+1},$$

化简，得到 $(k+1)(n-k) = k(n-k-1)$ ，

显然得证。 □

定义 2.3 由蜈蚣图 W_n 定义一个毛虫图 H_n (见图 2)，定义为 $H_n = (A, B, E), n \geq 1$ ，它的顶点集是 $A \cup B$ ，边集是 $E = \{v_iw_{ij} : 1 \leq i \leq n, j = 1, 2\} \cup \{v_iv_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\}$ ，其中， $A = \{v_i : 1 \leq i \leq n\}, B = \{w_{ij} : 1 \leq i \leq n, j = 1, 2\}, A \cap B = \emptyset$ 。

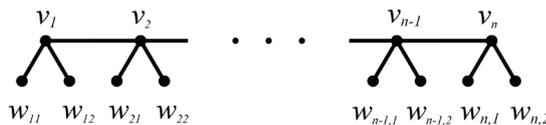


Figure 2. Caterpillar graph H_n
图 2. 毛虫图 H_n

定理 2.4 毛虫图 H_n 的边覆盖多项式为 $E(H_n, x) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{2n+i}$ 。毛虫图 H_n 的边覆盖多项式具有对数凹性。

证明：毛虫图 H_n 共有 $(3n-1)$ 条边。点 w_{11}, w_{12} 只能与点 v_1 有边相连，点 w_{21}, w_{22} 只能与点 v_2 有边相连， \dots ，点 w_{n1}, w_{n2} 只能与点 v_n 有边相连，显然，边 v_iv_{i+1} 是毛虫图 H_n 的最小边覆盖，其中， $1 \leq i \leq n, j = 1, 2$ ，即毛虫图 H_n 最少被 $2n$ 条边覆盖。可再从剩下的 $(n-1)$ 条边中选出 i 条边，与这 n 条边形成新的边覆盖，其中， $i = 0, 1, \dots, n-1$ 。

因此, 毛虫图 H_n 的边覆盖多项式为 $E(H_n, x) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{2n+i}$ 。

由此, 同定理 2.2, 很容易得到 $E(H_n, x)$ 的对数凹性。□

定义 2.5 由蜈蚣图 W_n 定义一个脊椎图 $V_n^{(3)}$ (见图 3), 定义为 $V_n^{(3)} = (A, B, E), n \geq 1$, 它的顶点集是 $A \cup B$, 边集是 $E = \{v_i w_{ij} : 1 \leq i \leq n, j = 1, 2, 3\} \cup \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\}$, 其中, $A = \{v_i : 1 \leq i \leq n\}$, $B = \{w_{ij} : 1 \leq i \leq n, j = 1, 2, 3\}$, $A \cap B = \emptyset$ 。



Figure 3. Vertebrae graph $V_n^{(3)}$

图 3. 脊椎图 $V_n^{(3)}$

定理 2.6 脊椎图 $V_n^{(3)}$ 的边覆盖多项式为 $E(V_n^{(3)}, x) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{3n+i}$ 。毛虫图 H_n 的边覆盖多项式具有对数凹性。

证明: 脊椎图 $V_n^{(3)}$ 共有 $(4n-1)$ 条边。点 w_{11}, w_{12}, w_{13} 只能与点 v_1 有边相连, 点 w_{21}, w_{22}, w_{23} 只能与点 v_2 有边相连, \dots , 点 $w_{n,1}, w_{n,2}, w_{n,3}$ 只能与点 v_n 有边相连, 显然, 边 $v_i w_{ij}$ 是脊椎图 $V_n^{(3)}$ 的最小边覆盖, 其中, $1 \leq i \leq n, j = 1, 2, 3$, 即脊椎图 $V_n^{(3)}$ 最少被 $3n$ 条边覆盖。可再从剩下的 $(n-1)$ 条边中选出 i 条边, 与这 n 条边形成新的边覆盖, 其中, $i = 0, 1, \dots, n-1$ 。

因此, 脊椎图 $V_n^{(3)}$ 的边覆盖多项式为 $E(V_n^{(3)}, x) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{3n+i}$ 。

由此, 同定理 2.2, 很容易得到 $E(V_n^{(3)}, x)$ 的对数凹性。□

定义 2.7 由蜈蚣图 W_n 定义一个脊椎图 $V_n^{(t)}$ (见图 4), 定义为 $V_n^{(t)} = (A, B, E), n \geq 1$, 它的顶点集是 $A \cup B$, 边集是 $E = \{v_i w_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq t\} \cup \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\}$, 其中, $A = \{v_i : 1 \leq i \leq n\}$, $B = \{w_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq t\}$, $A \cap B = \emptyset$ 。

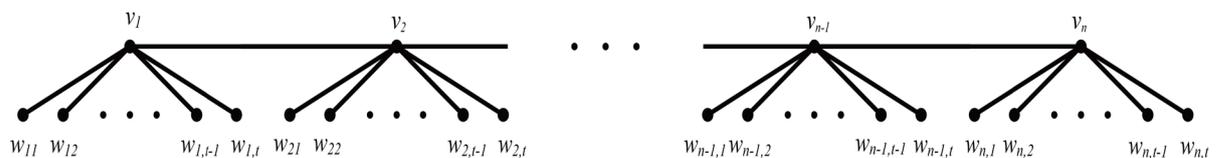


Figure 4. Vertebrae graph $V_n^{(t)}$

图 4. 脊椎图 $V_n^{(t)}$

定理 2.8 脊椎图 $V_n^{(t)}$ 的边覆盖多项式为 $E(V_n^{(t)}, x) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{tn+i}$ 。脊椎图 $V_n^{(t)}$ 的边覆盖多项式具有对数凹性。

证明: 脊椎图 $V_n^{(t)}$ 共有 $(tn+n-1)$ 条边。点 $w_{11}, w_{12}, \dots, w_{1,t}$ 只能与点 v_1 有边相连, 点 $w_{21}, w_{22}, \dots, w_{2,t}$ 只能与点 v_2 有边相连, \dots , 点 $w_{n,1}, w_{n,2}, \dots, w_{n,t}$ 只能与点 v_n 有边相连, 显然, 边 $v_i w_{ij}$ 是脊椎图 $V_n^{(t)}$ 的最小

边覆盖, 其中, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq t$, 即脊椎图 $V_n^{(t)}$ 最少被 tn 条边覆盖。可再从剩下的 $(n-1)$ 条边中选出 i 条边, 与这 n 条边形成新的边覆盖, 其中, $i = 0, 1, \dots, n-1$ 。

因此, 脊椎图 $V_n^{(t)}$ 的边覆盖多项式为 $E(V_n^{(t)}, x) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^{tn+i}$ 。

由此, 同定理 2.2, 很容易得到 $E(V_n^{(t)}, x)$ 的对数凹性。□

定义 2.9 在蜈蚣图 W_n 的每条边 $v_i v_{i+1}$ 中插入一个顶点 u_i , 其中, $1 \leq i \leq n-1$, 得到图 $A_n^{(1)}$ (见图 5)。 $A_n^{(1)} = (A, B, C, E), n \geq 1$, 它的顶点集是 $A \cup B \cup C$, 边集是 $E = \{v_i w_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i u_i : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\}$, 其中, $A = \{v_i : 1 \leq i \leq n\}, B = \{w_i : 1 \leq i \leq n\}, C = \{u_i : 1 \leq i \leq n-1\}, A \cap B = \emptyset, A \cap C = \emptyset, B \cap C = \emptyset$ 。

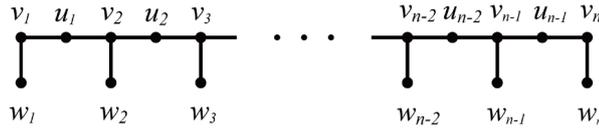


Figure 5. Graph $A_n^{(1)}$

图 5. 图 $A_n^{(1)}$

定理 2.10 图 $A_n^{(1)}$ 的边覆盖多项式为 $E(A_n^{(1)}, x) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1-i} \binom{n-1}{i} x^{2n-1+i}$ 。图 $A_n^{(1)}$ 的边覆盖多项式具有对数凹性。

证明: 图 $A_n^{(1)}$ 共有 $(3n-2)$ 条边。点 w_1, w_2, \dots, w_n 分别只能与点 v_1, v_2, \dots, v_n 有边相连, 显然, 图 $A_n^{(1)}$ 的边覆盖一定包括边 $v_1 w_1, v_2 w_2, \dots, v_n w_n$ 。要符合边覆盖, 就要再从边 $v_1 u_1, v_2 u_1$ 中选出 m_1 条边, 从边 $v_2 u_2, v_3 u_2$ 中选出 m_2 条边, \dots , 从边 $v_{n-1} u_{n-1}, v_n u_{n-1}$ 中选出 m_{n-1} 条边, 其中, $m_j = 1, 2$, 并且, $\sum_{j=1}^{n-1} m_j = n-1+i, i = 0, 1, \dots, n-1$ 。对于每个 $m_j = 1$, 有两种边的选取, 对于每个 $m_j = 2$, 只有一种边的选取, 其中, $j = 0, 1, \dots, n$ 。因此, 当 $m_1 = m_2 = \dots = m_{n-1} = 1$ 时, 图 $A_n^{(1)}$ 有最小的边覆盖, 即被 $(2n-1)$ 条边覆盖, 共有 2^{n-1} 种边的选取可能。再从剩下的 $(n-1)$ 条边中选出 i 条边, 其中, $i = 0, 1, \dots, n-1$, 与这 n 条边形成新的边覆盖, 每多加一条边, 边覆盖的选取可能数就要除以 2。

因此, 图 $A_n^{(1)}$ 的边覆盖多项式为 $E(A_n^{(1)}, x) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1-i} \binom{n-1}{i} x^{2n-1+i}$ 。

要证明图 $A_n^{(1)}$ 的边覆盖多项式的对数凹性, 即证 $e_k^2 \geq e_{k-1} e_{k+1}$,

其中, $e_k = 2^{n-1-k} \binom{n-1}{k}, k = 1, 2, \dots, n-2$ 。

根据图 $A_n^{(1)}$ 的边覆盖多项式,

$$e_k = 2^{n-1-k} \binom{n-1}{k}, e_{k-1} = 2^{n-k} \binom{n-1}{k-1}, e_{k+1} = 2^{n-2-k} \binom{n-1}{k+1}$$

要证 $e_k^2 \geq e_{k-1} e_{k+1}$,

$$\text{即证 } 2^{2n-2-2k} \binom{n-1}{k} \binom{n-1}{k} \geq 2^{2n-2-2k} \binom{n-1}{k-1} \binom{n-1}{k+1},$$

化简, 得到 $(k+1)(n-k) = k(n-k-1)$,

显然得证。□

定义 2.11 在毛虫图 H_n 的每条边 $v_i v_{i+1}$ 中插入一个顶点 u_i , 其中, $1 \leq i \leq n-1$, 得到图 $D_{n,2}^{(1)}$ (见图 6)。
 $D_{n,2}^{(1)} = (A, B, C, E), n \geq 1$, 它的顶点集是 $A \cup B \cup C$, 边集是
 $E = \{v_i w_{ij} : 1 \leq i \leq n, j = 1, 2\} \cup \{v_i u_i : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\}$, 其中, $A = \{v_i : 1 \leq i \leq n\}$,
 $B = \{w_{ij} : 1 \leq i \leq n, j = 1, 2\}$, $C = \{u_i : 1 \leq i \leq n-1\}$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$ 。



Figure 6. Graph $D_{n,2}^{(1)}$

图 6. 图 $D_{n,2}^{(1)}$

定理 2.12 图 $D_{n,2}^{(1)}$ 的边覆盖多项式为 $E(D_{n,2}^{(1)}, x) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1-i} \binom{n-1}{i} x^{3n-1+i}$ 。图 $D_{n,2}^{(1)}$ 的边覆盖多项式具有对数凹性。

证明: 图 $D_{n,2}^{(1)}$ 共有 $(4n-2)$ 条边。点 w_{11}, w_{12} 只能与点 v_1 有边相连, 点 w_{21}, w_{22} 只能与点 v_2 有边相连, ..., 点 $w_{n,1}, w_{n,2}$ 只能与点 v_n 有边相连, 显然, 图 $D_{n,2}^{(1)}$ 的边覆盖一定包括边 $v_i w_{ij}$, 其中, $1 \leq i \leq n, j = 1, 2$ 。要符合边覆盖, 就要再从边 $v_1 u_1, v_2 u_1$ 中选出 m_1 条边, 从边 $v_2 u_2, v_3 u_2$ 中选出 m_2 条边, ..., 从边 $v_{n-1} u_{n-1}, v_n u_{n-1}$ 中选出 m_{n-1} 条边, 其中, $m_j = 1, 2$, 并且, $\sum_{j=1}^{n-1} m_j = n-1+i, i = 0, 1, \dots, n-1$ 。对于每个 $m_j = 1$, 有两种边的选取, 对于每个 $m_j = 2$, 只有一种边的选取, 其中, $j = 0, 1, \dots, n$ 。因此, 当 $m_1 = m_2 = \dots = m_{n-1} = 1$ 时, 图 $D_{n,2}^{(1)}$ 有最小的边覆盖, 即被 $(3n-1)$ 条边覆盖, 共有 2^{n-1} 种边的选取可能。再从剩下的 $(n-1)$ 条边中选出 i 条边, 其中, $i = 0, 1, \dots, n-1$, 与这 n 条边形成新的边覆盖, 每多加一条边, 边覆盖的选取可能数就要除以 2。

因此, 图 $D_{n,2}^{(1)}$ 的边覆盖多项式为 $E(D_{n,2}^{(1)}, x) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1-i} \binom{n-1}{i} x^{3n-1+i}$ 。

由此, 同定理 2.10, 很容易得到 $E(D_{n,2}^{(1)}, x)$ 的对数凹性。 □

定义 2.13 在脊椎图 $V_n^{(1)}$ 的每条边 $v_i v_{i+1}$ 中插入一个顶点 u_i , 其中, $1 \leq i \leq n-1$, 得到图 $D_{n,3}^{(1)}$ (见图 7)。
 $D_{n,3}^{(1)} = (A, B, C, E), n \geq 1$, 它的顶点集是 $A \cup B \cup C$, 边集是
 $E = \{v_i w_{ij} : 1 \leq i \leq n, j = 1, 2, 3\} \cup \{v_i u_i : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\}$, 其中, $A = \{v_i : 1 \leq i \leq n\}$,
 $B = \{w_{ij} : 1 \leq i \leq n, j = 1, 2, 3\}$, $C = \{u_i : 1 \leq i \leq n-1\}$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$ 。



Figure 7. Graph $D_{n,3}^{(1)}$

图 7. 图 $D_{n,3}^{(1)}$

定理 2.14 图 $D_{n,3}^{(1)}$ 的边覆盖多项式为 $E(D_{n,3}^{(1)}, x) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1-i} \binom{n-1}{i} x^{4n-1+i}$ 。图 $D_{n,3}^{(1)}$ 的边覆盖多项式具有对数凹性。

证明: 图 $D_{n,3}^{(1)}$ 共有 $(5n-2)$ 条边。点 w_{11}, w_{12}, w_{13} 只能与点 v_1 有边相连, 点 w_{21}, w_{22}, w_{23} 只能与点 v_2 有边相连, \dots , 点 $w_{n,1}, w_{n,2}, w_{n,3}$ 只能与点 v_n 有边相连, 显然, 图 $D_{n,3}^{(1)}$ 的边覆盖一定包括边 $v_i w_{ij}$, 其中, $1 \leq i \leq n, j=1,2,3$ 。要符合边覆盖, 就要再从边 $v_1 u_1, v_2 u_1$ 中选出 m_1 条边, 从边 $v_2 u_2, v_3 u_2$ 中选出 m_2 条边, \dots , 从边 $v_{n-1} u_{n-1}, v_n u_{n-1}$ 中选出 m_{n-1} 条边, 其中, $m_j = 1, 2$, 并且, $\sum_{j=1}^{n-1} m_j = n-1+i, i=0,1,\dots,n-1$ 。对于每个 $m_j = 1$, 有两种边的选取, 对于每个 $m_j = 2$, 只有一种边的选取, 其中, $j=0,1,\dots,n$ 。因此, 当 $m_1 = m_2 = \dots = m_{n-1} = 1$ 时, 图 $D_{n,3}^{(1)}$ 有最小的边覆盖, 即被 $(4n-1)$ 条边覆盖, 共有 2^{n-1} 种边的选取可能。再从剩下的 $(n-1)$ 条边中选出 i 条边, 其中, $i=0,1,\dots,n-1$, 与这 n 条边形成新的边覆盖, 每多加一条边, 边覆盖的选取可能数就要除以 2。

$$\text{因此, 图 } D_{n,3}^{(1)} \text{ 的边覆盖多项式为 } E(D_{n,3}^{(1)}, x) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1-i} \binom{n-1}{i} x^{4n-1+i}.$$

由此, 同定理 2.10, 很容易得到 $E(D_{n,3}^{(1)}, x)$ 的对数凹性。 \square

定义 2.15 在脊椎图 $V_n^{(t)}$ 的每条边 $v_i v_{i+1}$ 中插入一个顶点 u_i , 其中, $1 \leq i \leq n-1$, 得到图 $D_{n,t}^{(1)}$ (见图 8)。
 $D_{n,t}^{(1)} = (A, B, C, E), n \geq 1$, 它的顶点集是 $A \cup B \cup C$, 边集是
 $E = \{v_i w_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq t\} \cup \{v_i u_i : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\}$, 其中, $A = \{v_i : 1 \leq i \leq n\}$,
 $B = \{w_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq t\}$, $C = \{u_i : 1 \leq i \leq n-1\}$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$ 。



Figure 8. Graph $D_{n,t}^{(1)}$

图 8. 图 $D_{n,t}^{(1)}$

定理 2.16 图 $D_{n,t}^{(1)}$ 的边覆盖多项式为 $E(D_{n,t}^{(1)}, x) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1-i} \binom{n-1}{i} x^{tn+n-1+i}$ 。图 $D_{n,t}^{(1)}$ 的边覆盖多项式具有对数凹性。

证明: 图 $D_{n,t}^{(1)}$ 共有 $(tn+2t-2)$ 条边。点 $w_{11}, w_{12}, \dots, w_{1,t}$ 只能与点 v_1 有边相连, 点 $w_{21}, w_{22}, \dots, w_{2,t}$ 只能与点 v_2 有边相连, \dots , 点 $w_{n,1}, w_{n,2}, \dots, w_{n,t}$ 只能与点 v_n 有边相连, 显然, 图 $D_{n,t}^{(1)}$ 的边覆盖一定包括边 $v_i w_{ij}$, 其中, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq t$ 。要符合边覆盖, 就要再从边 $v_1 u_1, v_2 u_1$ 中选出 m_1 条边, 从边 $v_2 u_2, v_3 u_2$ 中选出 m_2 条边, \dots , 从边 $v_{n-1} u_{n-1}, v_n u_{n-1}$ 中选出 m_{n-1} 条边, 其中, $m_j = 1, 2$, 并且, $\sum_{j=1}^{n-1} m_j = n-1+i, i=0,1,\dots,n-1$ 。对于每个 $m_j = 1$, 有两种边的选取, 对于每个 $m_j = 2$, 只有一种边的选取, 其中, $j=0,1,\dots,n$ 。因此, 当 $m_1 = m_2 = \dots = m_{n-1} = 1$ 时, 图 $D_{n,t}^{(1)}$ 有最小的边覆盖, 即被 $(tn+n-1)$ 条边覆盖, 共有 2^{n-1} 种边的选取可能。再从剩下的 $(n-1)$ 条边中选出 i 条边, 其中, $i=0,1,\dots,n-1$, 与这 n 条边形成新的边覆盖, 每多加一条边, 边覆盖的选取可能数就要除以 2。

$$\text{因此, 图 } D_{n,t}^{(1)} \text{ 的边覆盖多项式为 } E(D_{n,t}^{(1)}, x) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{n-1-i} \binom{n-1}{i} x^{tn+n-1+i}.$$

由此, 同定理 2.10, 很容易得到 $E(D_{n,t}^{(1)}, x)$ 的对数凹性。 \square

定义 2.17 爆竹图 $F_n^{(3)}$ (见图 9), 定义为 $F_n^{(3)} = (A, B, C, E), n \geq 1$, 它的顶点集是 $A \cup B \cup C$, 边集是
 $E = \{u_i w_{ij} : 1 \leq i \leq n, j=1,2\} \cup \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_i u_i : 1 \leq i \leq n\}$, 其中, $A = \{v_i : 1 \leq i \leq n\}$,
 $B = \{w_{ij} : 1 \leq i \leq n, j=1,2\}$, $C = \{u_i : 1 \leq i \leq n\}$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$ 。

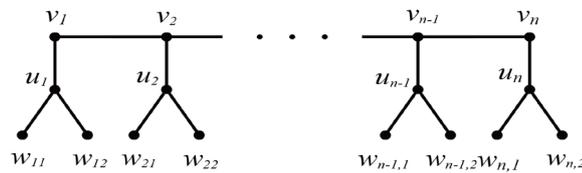


Figure 9. Firecracker graph $F_n^{(3)}$

图 9. 爆竹图 $F_n^{(3)}$

定理 2.18 爆竹图 $F_n^{(3)}$ 的边覆盖多项式为 $E(F_n^{(3)}, x) = (2x^3 + x^4)E(F_{n-1}^{(3)}, x) + (x^5 + x^6)E(F_{n-2}^{(3)}, x)$ 。

证明：显然，爆竹图 $F_1^{(3)}$ 的边覆盖多项式为

$$E(F_1^{(3)}, x) = x^3。$$

分两种情况计算爆竹图 $F_n^{(3)}$ 的边覆盖多项式：

(1) 爆竹图 $F_n^{(3)}$ 的边覆盖不包括边 $v_{n-1}u_n$ ，爆竹图 $F_n^{(3)}$ 的边覆盖多项式为

$$E(F_1^{(3)}, x)E(F_{n-1}^{(3)}, x) = x^3 E(F_{n-1}^{(3)}, x)，$$

(2) 爆竹图 $F_n^{(3)}$ 的边覆盖包括边 $v_{n-1}u_n$ ，

① 包括边 $v_{n-2}v_{n-1}$ 或边 $v_{n-1}u_{n-1}$ ，爆竹图 $F_n^{(3)}$ 的边覆盖多项式为

$$x^3 E(F_{n-1}^{(3)}, x)(1+x) = (x^3 + x^4) E(F_{n-1}^{(3)}, x)，$$

② 不包括边 $v_{n-2}v_{n-1}$ 和边 $v_{n-1}u_{n-1}$ ，爆竹图 $F_n^{(3)}$ 的边覆盖多项式为

$$xE(F_{n-2}^{(3)}, x)x^2x^2(1+x) = (x^5 + x^6)E(F_{n-2}^{(3)}, x)，$$

综上，爆竹图 $F_n^{(3)}$ 的边覆盖多项式为

$$\begin{aligned} E(F_n^{(3)}, x) &= x^3 E(F_{n-1}^{(3)}, x) + (x^3 + x^4) E(F_{n-1}^{(3)}, x) + (x^5 + x^6) E(F_{n-2}^{(3)}, x) \\ &= (2x^3 + x^4) E(F_{n-1}^{(3)}, x) + (x^5 + x^6) E(F_{n-2}^{(3)}, x) \end{aligned}$$

□

定义 2.19 图 H_{2m+1} (见图 10) 定义为 $H_{2m+1} = (A, B, E)$, $n \geq 1$ ，它的顶点集是 $A \cup B$ ，边集是 $E = \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq 2m\} \cup \{v_i u_i : 1 \leq i \leq 2m+1\} \cup \{v_i u_{i+1} : 1 \leq i \leq 2m+1\} \cup \{u_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq 2m-1\} \cup \{u_i v_i : 2 \leq i \leq 2m\}$ ，其中， $A = \{v_i : 1 \leq i \leq 2m+1\}$ ， $B = \{u_i : 1 \leq i \leq 2m+2\}$ ， $A \cap B = \emptyset$ 。

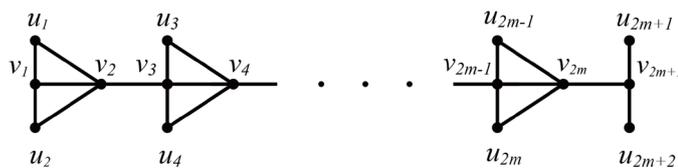


Figure 10. Graph H_{2m+1}

图 10. 图 H_{2m+1}

图 H_{2m} (见图 11) 定义为 $H_{2m} = (A, B, E)$, $n \geq 1$ ，它的顶点集是 $A \cup B$ ，边集是

$$E = \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq 2m-1\} \cup \{v_i u_i : 1 \leq i \leq 2m-1\} \cup \{v_i u_{i+1} : 1 \leq i \leq 2m-1\} \cup \{u_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq 2m-1\} \cup \{u_i v_i : 2 \leq i \leq 2m\}$$

$$B = \{u_i : 1 \leq i \leq 2m\}, \quad A \cap B = \emptyset.$$

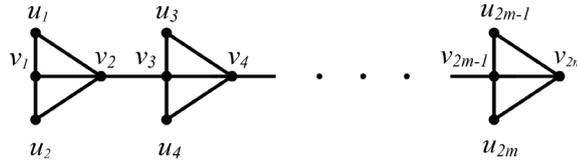


Figure 11. Graph H_{2m}

图 11. 图 H_{2m}

定理 2.20 图 H_{2m+1} 的边覆盖多项式为 $E(H_{2m+1}, x) = (x^2 + x^3)E(H_{2m}, x) + x^3E(H_{2m-1}, x)$, 图 H_{2m} 的边覆盖多项式为 $E(H_{2m}, x) = 2x^2 + 11x^3 + 13x^4 + 6x^5 + x^6E(H_{2m-2}, x) + (3x^3 + 8x^4 + 5x^5 + x^6)E(H_{2m-3}, x)$.

证明: 很容易能写出, $E(H_1, x) = x^2$, $E(H_2, x) = 2x^2 + 8x^3 + 5x^4 + x^5$.

分两种情况计算图 H_{2m+1} 的边覆盖多项式:

(1) 图 H_{2m+1} 的边覆盖不包括边 $v_{2m}v_{2m+1}$, 图 H_{2m+1} 的边覆盖多项式为

$$E(H_1, x)E(H_{2m}, x) = x^2E(H_{2m}, x),$$

(2) 图 H_{2m+1} 的边覆盖包括边 $v_{2m}v_{2m+1}$,

① 包括边 $u_{2m-1}v_{2m}$ 或边 $v_{2m-1}v_{2m}$ 或边 $u_{2m}v_{2m}$, 图 H_{2m+1} 的边覆盖多项式为

$$xE(H_{2m}, x)E(H_1, x) = x^3E(H_{2m}, x),$$

② 不包括边 $u_{2m-1}v_{2m}$, $v_{2m-1}v_{2m}$, $u_{2m}v_{2m}$, 图 H_{2m+1} 的边覆盖多项式为

$$xE(H_1, x)E(H_{2m-1}, x) = x^3E(H_{2m-1}, x),$$

综上, 图 H_{2m+1} 的边覆盖多项式为

$$\begin{aligned} E(H_{2m+1}, x) &= x^2E(H_{2m}, x) + x^3E(H_{2m}, x) + x^3E(H_{2m-1}, x) \\ &= (x^2 + x^3)E(H_{2m}, x) + x^3E(H_{2m-1}, x). \end{aligned}$$

分两种情况计算图 H_{2m} 的边覆盖多项式:

(1) 图 H_{2m} 的边覆盖不包括边 $v_{2m-2}v_{2m-1}$, 图 H_{2m} 的边覆盖多项式为

$$E(H_{2m}, x) = E(H_2, x)E(H_{2m-2}, x) = (2x^2 + 8x^3 + 5x^4 + x^5)E(H_{2m-2}, x),$$

(2) 图 H_{2m} 的边覆盖包括边 $v_{2m-2}v_{2m-1}$,

① 包括边 $v_{2m-2}u_{2m-3}$ 或边 $v_{2m-3}v_{2m-2}$ 或边 $v_{2m-2}u_{2m-2}$,

(i) 包括边 $v_{2m-1}u_{2m-1}$ 或边 $v_{2m-1}v_{2m}$ 或边 $v_{2m-1}u_{2m}$, 图 H_{2m} 的边覆盖多项式为

$$E(H_{2m}, x) = xE(H_2, x)E(H_{2m-2}, x) = (2x^3 + 8x^4 + 5x^5 + x^6)E(H_{2m-2}, x),$$

(ii) 不包括边 $v_{2m-1}u_{2m-1}$, 边 $v_{2m-1}v_{2m}$, 边 $v_{2m-1}u_{2m}$, 图 H_{2m} 的边覆盖多项式为

$$E(H_{2m}, x) = xE(H_1, x)E(H_{2m-2}, x) = x^3E(H_{2m-2}, x),$$

② 不包括边 $v_{2m-2}u_{2m-3}$, 边 $v_{2m-3}v_{2m-2}$, 边 $v_{2m-2}u_{2m-2}$,

(i) 包括边 $v_{2m-1}u_{2m-1}$ 或边 $v_{2m-1}v_{2m}$ 或边 $v_{2m-1}u_{2m}$, 图 H_{2m} 的边覆盖多项式为

$$E(H_{2m}, x) = xE(H_2, x)E(H_{2m-3}, x) = (2x^3 + 8x^4 + 5x^5 + x^6)E(H_{2m-3}, x),$$

(ii) 不包括边 $v_{2m-1}u_{2m-1}$, 边 $v_{2m-1}v_{2m}$, 边 $v_{2m-1}u_{2m}$, 图 H_{2m} 的边覆盖多项式为

$$E(H_{2m}, x) = xE(H_1, x)E(H_{2m-3}, x) = x^3E(H_{2m-3}, x),$$

综上, 图 H_{2m} 的边覆盖多项式为

$$E(H_{2m}, x) = 2x^2 + 11x^3 + 13x^4 + 6x^5 + x^6E(H_{2m-2}, x) + (3x^3 + 8x^4 + 5x^5 + x^6)E(H_{2m-3}, x). \quad \square$$

3. 结论

本文应用 Akbari 和 Oboudi 给出的边覆盖多项式的定义, 归纳写出以上几个图的边覆盖多项式, 并研究其对数凹性, 证明了图 1~8 的边覆盖多项式具有对数凹性。

参考文献

- [1] Stanley, R.P. (1989) Log-Concave and Unimodal Sequences in Algebra, Combinatorics, and Geometry. *Annals of the New York Academy of Sciences*, **576**, 500-535. <https://doi.org/10.1111/j.1749-6632.1989.tb16434.x>
- [2] Brenti, F. (1989) Unimodal, Log-Concave, and Pólya Frequency Sequences in Combinatorics. *Memoirs of the American Mathematical Society*, **81**, 106 p.
- [3] Brenti, F. (1994) Log-Concave and Unimodal Sequences in Algebra, Combinatorics, and Geometry. *Electronic Contemporary Mathematics*, **178**, 71-84. <https://doi.org/10.1090/conm/178/01893>
- [4] Brändén, P. (2014) Unimodality, Log-Concavity, Real-Rootedness and Beyond. arXiv:1410.6601.
- [5] Hamidoune, Y.O. (1990) On the Number of Independent K-Sets in a Claw-Free Graph. *Journal of Combinatorial Theory*, **50**, 241-244. [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(90\)90079-F](https://doi.org/10.1016/0095-8956(90)90079-F)
- [6] Bahls, P. (2012) On the Independence Polynomials of Path-Like Graphs. *The Australasian Journal of Combinatorics*, **53**, 3-18.
- [7] Huh, J. (2012) Milnor Numbers of Projective Hypersurfaces and the Chromatic Polynomial of Graphs. *Journal of the American Mathematical Society*, **25**, 907-927. <https://doi.org/10.1090/S0894-0347-2012-00731-0>
- [8] Zhu, B.-X. (2016) Clique Cover Products and Unimodality of Independence Polynomials. *Discrete Applied Mathematics*, **206**, 172-180. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2016.01.030>
- [9] Akbari, S. and Oboudi, M. (2013) On the Edge Cover Polynomial of a Graph. *European Journal of Combinatorics*, **34**, 297-321. <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2012.05.005>
- [10] Csikvári, P. and Oboudi, M. (2011) On the Roots of Edge Cover Polynomials of Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **32**, 1407-1416. <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2011.06.009>
- [11] Wang, Y. and Zhu, B.-X. (2011) On the Unimodality of Independence Polynomials of Some Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **32**, 10-20. <https://doi.org/10.1016/j.ejc.2010.08.003>
- [12] Zhu, Z.F. (2007) The Unimodality of Independence Polynomials of Some Graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, **38**, 27-33.
- [13] Levit, V.E. and Mandrescu, E. (2002) On Well-Covered Trees with Unimodal Independence Polynomials. *Congressus Numerantium*, **159**, 193-202.
- [14] Levit, V.E. and Mandrescu, E. (2007) A Family of Graphs Whose Independence Polynomials Are Both Palindromic and Unimodal. *Carpathian Journal of Mathematics*, **23**, 108-116.
- [15] Zhu, B.-X. and Chen, Y. (2019) Log-Concavity of Independence Polynomials of Some Kinds of Trees. *Applied Mathematics and Computation*, **342**, 35-44. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.09.028>