Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(11), 3613-3617
Published Online November 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.1011381

Hans汉斯

*N*维空间中弱导数的一些性质

廖玲蓝，邵建鑫，刘红霞

贵州师范大学，数学科学学院，贵州 贵阳

收稿日期：2021年10月2日；录用日期：2021年10月23日；发布日期：2021年11月4日

摘 要

针对某些不满足可导条件的函数，充分运用变分法基本引理、分部积分公式等方法来推广弱导数的性质。从一维的弱导数性质出发，总结证明*N*维空间中弱导数的一些常用性质，深化分部积分在定积分中的实际应用。通过偏微分方程的学习，*N*维空间中弱导数的性质更适用于解决高维问题。

关键词

弱导数，分部积分法，变分问题

Some Properties of Weak Derivative in *N*-Dimensional Space

Linglan Liao, Jianxin Shao, Hongxia Liu

College of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou

Received: Oct. 2nd, 2021; accepted: Oct. 23rd, 2021; published: Nov. 4th, 2021

Abstract

For some functions that do not satisfy the differentiable condition, the basic lemma of variational method and partial integral formula are fully used to generalize the properties of weak derivative. Starting from the property of one-dimensional weak derivative, this paper summarizes the property of weak derivative in dimensional space, and deepens the practical application of partial integral in definite integral. Through the learning of partial differential equations, the properties of weak derivatives in *N*-dimensional space are more suitable for solving higher dimensional problems.

文章引用: 廖玲蓝, 邵建鑫, 刘红霞. *N* 维空间中弱导数的一些性质[J]. 应用数学进展, 2021, 10(11): 3613-3617.
DOI: 10.12677/aam.2021.1011381

Keywords

Weak Derivative, Integration by Parts, Variational Problem

1. 引言

在偏微分方程的学习中，数[1] [2]知识几乎贯穿整个数学体系。由于导数条件的限制与实际情况的需要，导致 N 维弱导数[3] [4] [5] [6]出现。弱导数是一个函数的微分(强微分)概念的推广。通过弱导数和磨光函数将函数磨光，在函数没有可微的条件下，也能得到和函数可导相似的结果。本文主要证明了 N 维空间中弱导数的一些性质。该结果贯穿于整个偏微分方程的学习中，特别是解决了光滑函数的局部逼近和全局逼近问题。

2. 弱导数的定义

引理 1 [5] [6]：设 $u,\upsilon \in L^1_{weak}(\Omega)$，$\alpha$ 是多重指标，若任一测试函数 $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ 满足 $\int_\Omega u D^\alpha \phi \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \upsilon\phi \mathrm{d}x$，则称 υ 是 u 的 α 阶弱导数，记作 $D^\alpha u = \upsilon$。

引理 2 [5]：设函数 $\phi(x)$ 定义在开区间 $I=(-1,1)$ 上，若 $\phi(x)$ 在 I 上无穷次可微，且 u 的支集 $spt\{\phi\} = \left\{\overline{x\in I:\phi(x)\neq 0}\right\} \subset\subset I$，则称 $\phi(x)$ 是试验函数，记为 $\phi \in C_c^\infty(I)$。

引理 3 [7]：(变分法基本引理) 若 $u\in C^0(\Omega)$ 且对任意的 $\phi\in C_c^\infty(\Omega)$ 有

$$\int_\Omega u(x)\phi(x)\mathrm{d}x = 0，\text{则在 }\Omega\text{ 中 } u\equiv 0。$$

引理 4 [6]：(分部积分公式) 设 $u,\upsilon\in C^1(\overline{\Omega})$，则

$$\int_\Omega u_{x_i}\upsilon \mathrm{d}x = -\int_\Omega u\upsilon_{x_i}\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u\upsilon\nu^i \mathrm{d}S\ (i=1,\cdots,n).$$

3. 弱导数的性质

性质 1：(唯一性) 若 u 的 α 阶弱导数存在，则在零测集的意义下一定唯一。

证明：假设 $\upsilon,\overline{\upsilon}\in L^1_{loc}(\Omega)$ 都是 u 的 α 阶弱导数，从而对 $\forall\phi\in C_c^\infty(\Omega)$，有

$$\int_\Omega uD^\alpha\phi \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \upsilon\phi \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \overline{\upsilon}\phi \mathrm{d}x,$$

即对 $\forall\phi\in C_c^\infty(\Omega)$，有 $\int_\Omega(\upsilon-\overline{\upsilon})\phi \mathrm{d}x = 0$。

由此可知，$\upsilon=\overline{\upsilon}$ 在 Ω 上几乎处处成立，从而原求证成立。

性质 2：设 α 和 β 是两个多重指标，如果 $D^{\alpha+\beta}u$ 存在，那么 $D^\beta(D^\alpha u)$ 和 $D^\alpha(D^\beta u)$ 存在，并且 $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta}u$。

证明：固定 $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$，则 $D^\beta\phi\in C_c^\infty(\Omega)$，根据引理 1 有

$$\begin{aligned}\int_\Omega D^\alpha u D^\beta \phi \mathrm{d}x &= (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u D^{\alpha+\beta}\phi \mathrm{d}x \\ &= (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha+\beta|}\int_\Omega D^{\alpha+\beta}u\cdot\phi \mathrm{d}x \\ &= (-1)^{|\beta|}\int_\Omega D^{\alpha+\beta}u\cdot\phi \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

而 $\int_\Omega D^\alpha u D^\beta \phi \mathrm{d}x = (-1)^{|\beta|}\int_\Omega D^\beta\left(D^\alpha u\right)\cdot\phi \mathrm{d}x$，

从而有 $\int_\Omega D^{\alpha+\beta}u\cdot\phi \mathrm{d}x = \int_\Omega D^\beta\left(D^\alpha u\right)\cdot\phi \mathrm{d}x$ 。

因此 $D^\beta\left(D^\alpha u\right) = D^{\alpha+\beta}u$ 。

同理有 $D^\alpha\left(D^\beta u\right) = D^{\alpha+\beta}u$ 。

故在弱意义下 $D^\beta\left(D^\alpha u\right)$， $D^\alpha\left(D^\beta u\right)$ 存在，且等于 $D^{\alpha+\beta}u$ 。

性质 3：设 $1<p<\infty$， $v\in L^p(\Omega)$，假设存在函数列 $\{v_j\}$ 满足 $v_j, Dv_j \in L^p(\Omega)$ 以及

1) 对 $\forall\phi\in C_0^\infty(\Omega)$，有 $\lim_{j\to\infty}\int_\Omega v_j\phi \mathrm{d}x = \int_\Omega v\phi \mathrm{d}x$；

2) 存在正常数 C，使得 $\left\|Dv_j\right\|_{L^p(\Omega)} \le C$， $\forall j\in N^+$ 。

那么 v 在 Ω 内存在一阶弱导数 Dv，并且 $Dv\in L^p(\Omega)$， $\|Dv\|_{L^p(\Omega)}\le C$ 。

证明：由(2)知存在 $\{Dv_j\}$ 的子列，不妨设为 $\{Dv_j\}$ 以及 $u\in L^p(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中 $Dv_j \rightharpoonup u$ 且 $\|u\|_{L^p(\Omega)}\le C$ 。显然，对 $\forall\phi\in C_0^\infty(\Omega)$ 有

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega \phi Dv_j \mathrm{d}x = \int_\Omega \phi u \mathrm{d}x,$$

由弱导数的定义知

$$\int_\Omega \phi Dv_j \mathrm{d}x = -\int_\Omega v_j D\phi \mathrm{d}x,$$

结合 1)我们有

$$\int_\Omega \phi u \mathrm{d}x = -\int_\Omega v D\phi \mathrm{d}x,$$

故 $u = Dv\in L^p(\Omega)$，并且 $\|Dv\|_{L^p(\Omega)}\le C$ 。

从而原求证成立。

性质 4：假设 $u,v\in W^{k,p}(\Omega)$， $|\alpha\le k|$，那么对每个 $\lambda,\mu\in R$， $\lambda u+\mu v\in W^{k,p}(\Omega)$ 并且当 $|\alpha\le k|$ 时有 $D^\alpha(\lambda u+\mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$ 。

证明：固定 $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$，则 $D^\alpha\phi\in C_c^\infty(\Omega)$ 。

$$\begin{aligned}\int_\Omega D^\alpha(\lambda u+\mu v)\phi \mathrm{d}x &= \int_\Omega D^\alpha \lambda u\phi \mathrm{d}x + \int_\Omega D^\alpha \mu v\phi \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \lambda D^\alpha u\phi \mathrm{d}x + \int_\Omega \mu D^\alpha v\phi \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega\left(\lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v\right)\phi \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此 $D^\alpha(\lambda u+\mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$ 。

从而原求证成立。

性质 5：假设 $u,v\in W^{k,p}(\Omega)$， $|\alpha\le k|$，如果 $\xi\in C_c^\infty(\Omega)$，那么 $\xi u\in W^{k,p}(\Omega)$ 且 $D^\alpha(\xi u) = \sum_{\beta\le\alpha}\binom{\beta}{\alpha}D^\beta\xi D^{\alpha-\beta}u$，其中 $\binom{\alpha}{\beta} = \dfrac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$ 。

证明：先证明$\begin{pmatrix}\beta\\ \sigma-\gamma\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta\\ \sigma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \sigma\end{pmatrix}$。

$$\because \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}=C_\alpha^\beta,$$

$\therefore$ 我们将其当作排 $(uv)'=u'v+uv'$ 列组合来证明 $C_\beta^{\sigma-\gamma}+C_\beta^\sigma=C_\alpha^\sigma=C_{\beta+\gamma}^\sigma$，其中 $\gamma=1$，即证明 $C_\beta^{\sigma-1}+C_\beta^\sigma=C_{\beta+1}^\sigma$。

$$\begin{aligned}C_\beta^{\sigma-1}+C_\beta^\sigma&=\frac{\beta!}{(\sigma-1)!(\beta+1-\sigma)!}+\frac{\beta!}{\sigma!(\beta-\sigma)!}\\&=\frac{\beta!}{(\sigma-1)!(\beta+1-\sigma)!}+\frac{\beta!(\beta-\sigma+1)}{\sigma!(\beta-\sigma+1)!}\\&=\frac{\beta!(\beta-\sigma+1+\sigma)}{\sigma!(\beta-\sigma+1)!}=\frac{\beta!(\beta+1)}{\sigma!(\beta-\sigma+1)!}\\&=\frac{(\beta+1)!}{\sigma!(\beta-\sigma+1)!}=C_{\beta+1}^\sigma.\end{aligned}$$

下面我们用数学归纳法来证明：若 u 有 k 阶弱导，则 ξu 也有 k 阶弱导。

第一步 假设$|\alpha|=1$，任一$\phi\in C_0^\infty(\Omega)$，

则由分部积分公式有$(uv)'=u'v+uv'$

得

$$\begin{aligned}\int_\Omega \xi uD^\alpha\phi\mathrm{d}x&=\int_\Omega\left[uD^\alpha(\xi\phi)-u\left(D^\alpha\xi\right)\phi\right]\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega uD^\alpha(\xi\phi)\mathrm{d}x-\int_\Omega u\left(D^\alpha\xi\right)\phi\mathrm{d}x\\&=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega\left(D^\alpha u\right)\xi\phi\mathrm{d}x-\int_\Omega u\left(D^\alpha\xi\right)\phi\mathrm{d}x\\&=-\int_\Omega\left(D^\alpha u\right)\xi\phi\mathrm{d}x-\int_\Omega u\left(D^\alpha\xi\right)\phi\mathrm{d}x\\&=-\int_\Omega\xi\left(D^\alpha u\right)\phi\mathrm{d}x-\int_\Omega u\left(D^\alpha\xi\right)\phi\mathrm{d}x\\&=-\int_\Omega\left[\xi\left(D^\alpha u\right)+u\left(D^\alpha\xi\right)\right]\phi\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

而$\int_\Omega\xi uD^\alpha\phi\mathrm{d}x=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D^\alpha(\xi u)\phi\mathrm{d}x=-\int_\Omega D^\alpha(\xi u)\phi\mathrm{d}x$。

因此$D^\alpha(\xi u)=\xi D^\alpha u+uD^\alpha\xi$。

第二步 现在假设对$|\alpha|\le l$成立的所有函数ξ，原求证都成立。

第三步 当$|\alpha|=l+1$时，对某个$|\beta|=l,|\gamma|=1,\alpha=\beta+l$，上述的$\phi\in C_0^\infty(\Omega)$有

$$\begin{aligned}\int_\Omega\xi uD^\alpha\phi\mathrm{d}x&=\int_\Omega\xi uD^{\beta+\gamma}\phi\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega\xi uD^\beta\left(D^\gamma\phi\right)\mathrm{d}x\\&=(-1)^{|\beta|}\int_\Omega D^\beta(\xi u)D^\gamma\phi\mathrm{d}x\\&=(-1)^{|\beta|}\int_\Omega\sum_{\sigma\le\beta}\begin{pmatrix}\beta\\ \sigma\end{pmatrix}D^\sigma\xi D^{\beta-\sigma}uD^\gamma\phi\mathrm{d}x\\&=(-1)^{|\beta|+|\gamma|}\int_\Omega\sum_{\sigma\le\beta}\begin{pmatrix}\beta\\ \sigma\end{pmatrix}D^\gamma\left(D^\sigma\xi D^{\beta-\sigma}u\right)\phi\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

代入 $D^{\alpha}(\xi u)=\xi D^{\alpha}u+uD^{\alpha}\xi$，

得

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\xi uD^{\alpha}\phi\mathrm{d}x&=(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega}\sum_{\sigma\le\beta}\binom{\beta}{\sigma}\left[D^{\sigma}\xi D^{\gamma}D^{\beta-\sigma}u+D^{\sigma}\xi D^{\alpha-\sigma}u\right]\phi\mathrm{d}x\\&=(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega}\sum_{\sigma\le\beta}\binom{\beta}{\sigma}\left[D^{\sigma+\gamma}\xi D^{\alpha-(\sigma+\gamma)}u+D^{\sigma}\xi D^{\alpha-\sigma}u\right]\phi\mathrm{d}x\\&=(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega}\left[\sum_{\sigma\le\beta}\binom{\beta}{\sigma}D^{\sigma+\gamma}\xi D^{\alpha-(\sigma+\gamma)}u+\sum_{\sigma\le\beta}\binom{\beta}{\sigma}D^{\sigma}\xi D^{\alpha-\sigma}u\phi\right]\mathrm{d}x,\end{aligned}\tag{1}$$

对于 $\sum_{\sigma\le\beta}\binom{\beta}{\sigma}D^{\sigma+\gamma}\xi D^{\alpha-(\sigma+\gamma)}u$，令 $\rho=\sigma+\gamma$ 则 $\beta=\alpha+\sigma-\rho$。

从而

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma\le\beta}\binom{\beta}{\sigma}D^{\sigma+\gamma}\xi D^{\alpha-(\sigma+\gamma)}u&=\sum_{\sigma\le\alpha+\sigma-\rho}\binom{\beta}{\rho-\gamma}D^{\rho}\xi D^{\alpha-\rho}u\\&=\sum_{\rho\le\alpha}\binom{\beta}{\rho-\gamma}D^{\rho}\xi D^{\alpha-\rho}u\\&\overset{\rho,\sigma\text{的任意性}}{=}\sum_{\sigma\le\alpha}\binom{\beta}{\sigma-\gamma}D^{\sigma}\xi D^{\alpha-\sigma}u.\end{aligned}\tag{2}$$

将(2)代入(1)得

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\xi uD^{\alpha}\phi\mathrm{d}x&=(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega}\sum_{\sigma\le\alpha}\left[\binom{\beta}{\sigma-\gamma}+\binom{\beta}{\sigma}\right]D^{\sigma}\xi D^{\alpha-\sigma}u\phi\mathrm{d}x\\&=(-1)^{|\alpha|}\sum_{\sigma\le\alpha}\binom{\alpha}{\sigma}D^{\sigma}\xi D^{\alpha-\sigma}u\phi\mathrm{d}x\\&=(-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega}D^{\alpha}(\xi u)\phi\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此，当 $|\alpha|=l+1$ 时，ξu 也 n 有 $l+1$ 阶弱导。

综上所述，原求证成立。

4. 结束语

本文主要是对 N 维空间中弱导数的性质进行总结证明，将一维中的弱导数推广到 N 维空间中，从而得到比一维空间中弱导数更广泛的性质。根据本文推广的形式，后续可以继续改进推广更高阶线性形式。

参考文献

[1] 姜礼尚, 陈亚浙. 数学物理方程讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.

[2] 谷超豪, 李大潜. 数学物理方程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.

[3] 钟延生. 古典导数与弱导数[J]. 福建师范大学学报(自然科学版), 2013, 29(4): 120-124.

[4] 王跃, 索洪敏, 吴德科, 彭林艳, 蔡梅梅. 弱导数与弱解的一个注记[J]. 湖北民族大学学报(自然科学版), 2020, 38(1): 58-63.

[5] 王明新. 索伯列夫空间[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013.

[6] Evans, L.C. (2010) Partial Differential Equations. American Mathematical Society, Rhode Island.

[7] 陆文端. 微分方程中的变分方法(修订版) [M]. 北京: 科学出版社, 2003.