Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(11), 3618-3622
Published Online November 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.1011382

一类代数图的Cayley性

杨富元，章 超*

贵州大学数学与统计学院，贵州 贵阳

收稿日期：2021年10月2日；录用日期：2021年10月23日；发布日期：2021年11月4日

摘 要

设R是一个有限环。本文基于代数图论的基本事实，研究一类重要的图族的Cayley性质，构造了代数图$B\Gamma_n(R; f_2, ..., f_n)$的一个无限子族，其中每个图都是Cayley图，在此基础上进一步考虑这类代数图的最大圈。

关键词

Cayley图，Hamilton图，广义二面体群

Cayley Properties of a Class of Algebraic Graphs

Fuyuan Yang, Chao Zhang*

School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: Oct. 2^{nd}, 2021; accepted: Oct. 23^{rd}, 2021; published: Nov. 4^{th}, 2021

Abstract

Let R be a finite ring. Based on the basic facts of algebraic graph theory, this paper studies the Cayley properties of an important family of graphs, and constructs an

* 通讯作者 Email: zhangc@amss.ac.cn

文章引用: 杨富元, 章超. 一类代数图的Cayley性[J]. 应用数学进展, 2021, 10(11): 3618-3622.
DOI: 10.12677/aam.2021.1011382

infinite subfamily of algebraic graphs $B\Gamma_n(R; f_2, ..., f_n)$, in which each graph is Cayley graph. On this basis, the maximal cycle of this kind of algebraic graph is further considered.

Keywords

Cayley Graph, Hamiltonian Graph, Generalized Dihedral Group

1. 引言

本文中，所有的图都是简单的无loop无向图。方程组定义的图最早是由Lazebnik提出的一类图，最初用来解决极值图论中的问题 [1]，Lazebnik和Woldar建立了这类图的一些重要的性质 [2]，包括正则性和双正则性。2002年，文章 [3]讨论了一系列半对称的方程组定义的图并判定了它们是否连通，这一系列图不是Cayley图并且函数不全是对称的。此外，图$B\Gamma_n(R; f_2, ..., f_n)$的更多性质和问题可以在Lazebnik的文章 [4]中找到。在应用方面，Ustimenko和他的合作者将方程组定义的图应用于编码理论和密码学 [5]。

Cayley图Cay(G, S)是以群G中元素为顶点，以子集S定义边的一类图，它与Hamilton图被广泛研究 [6]。Lazebnik 在文章 [2]的5.2节中给出了图的一些公开问题，本文主要研究其中一个重要的公开问题，即方程组定义图的哪些函数确定图$B\Gamma_n(R; f_2, ..., f_n)$是Cayley图或者是Hamilton图，这是一个有趣的且有意义的问题，本文构造了一系列方程组定义的Cayley图，并且得到图$B\Gamma_2(\mathbb{F}_q; p_1l_1)$的最大圈。

2. 预备知识

设Γ是一个图，我们总是用$V(\Gamma)$表示顶点集，用$E(\Gamma)$表示边集，$x \sim y$表示顶点x和y相邻。

定义 1 [2]　设R是有限环，函数$f_i : R^{2i-2} \to R$是任意给定的函数。我们定义二分图$B\Gamma_n = B\Gamma_n(R; f_2, ..., f_n)$。它的两个部集是分别等于$R^n$的$P_n$和$L_n$，$P_n$和$L_n$中的元素分别称为点$(p) = (p_1, ..., p_n)$和线$[l] = [l_1, ..., l_n]$。我们定义顶点$(p)$和$[l]$邻接当且仅当下面$n-1$个条件成立：

$$\begin{aligned} p_2 + l_2 &= f_2(p_1, l_1), \\ p_3 + l_3 &= f_3(p_1, l_1, p_2, l_2), \\ &\cdots \quad \cdots \\ p_n + l_n &= f_n(p_1, l_1, p_2, l_2, \ldots, p_{n-1}, l_{n-1}). \end{aligned}$$

显然，如果R的阶是r，那么图$B\Gamma_n(R;f_2,...,f_n)$的顶点数是$2r^n$且是$r-$正则的，因为对于任何顶点$a\in V(B\Gamma_n)$和$x\in R$，存在唯一的顶点$b\in V(B\Gamma_n)$，使得b与a相邻，并且b的第一个坐标是x。

定义 2 [7]　设G是群，S是G的子集。有向图$\Gamma=\text{Cay}(G,S)$是Cayley图，如果$\text{Cay}(G,S)$的顶点集为G且两个顶点$x,y\in G$相邻，当且仅当$yx^{-1}\in S$。如果$S^{-1}=S$，则该邻接关系是对称的，此时Cayley图$\text{Cay}(G,S)$等价一个无向图。

定义 3　设Γ是一个图，H是全自同构群$\text{Aut}(\Gamma)$的一个子群。如果H在$V(\Gamma)$是传递的且对于任意$v\in V(\Gamma)$ 和$\sigma\in H$，使得$\sigma(v)=v$，那么σ是恒等自同构，则称H 在$V(\Gamma)$上是正则的。

引理 1 [7]　图Γ是群G的Cayley图当且仅当$\text{Aut}(\Gamma)$包含与G同构的子群在$V(\Gamma)$上是正则的。

定义 4　群G是广义二面体群，如果它有一个指数为2的交换子群A和一个阶为2的元素$\pi\in G\setminus A$，对任意$g\in A$，使得$\pi g\pi=g^{-1}$。在这种情况下，我们记作$G=\langle\pi,A\rangle$。

定义 5 [8]　包含图Γ的每个顶点的路径称为Γ的Hamilton路径；类似地，Γ的Hamilton圈是包含Γ的每个顶点的圈。若图Γ包含Hamilton圈，则称图Γ是Hamilton图或者是hamiltonian。

引理 2 [6]　设G是有限群，S是G的子集。此外满足，

(1) S是G的生成集，

(2) A是G的正规$p-$子群对某些素数p，且

(3) $st^{-1}\in A$对所有的$s,t\in S$，

那么$\text{Cay}(G,S)$有一个Hamliton圈。

3. 主要结果

下面构造了一系列方程组定义的图$B\Gamma_n(R;f_2,...,f_n)$都是Cayley图。

定理 1　若$\{f_i\mid i=2,...,n\}$满足以下情况，则图$B\Gamma_n(R;f_2,...,f_n)$是Cayley图。

(1) $f_i=\sum\limits_{s=1}^{i-1}a_s(p_s+l_s)^{b_s}+c$，其中$a_s,c\in R$是常数且$b_s$是整数；

(2) $n=2$且$f_2=cp_1l_1$对常数$c\in R$，其中R是交换环且$2^{-1}\in R$；

(3) $f_n=\sum\limits_{s=1}^{n-1}b_s(p_sl_s)+\sum\limits_{s=1}^{n-1}c_s(p_s+l_s)^{d_s}+\sum\limits_{s=1}^{n-1}e_s(p_sl_s)^{mp}+c$和$f_i=\sum\limits_{s=1}^{i-1}a_{i,s}(p_s+l_s)^{b_{i,s}}+d_i$对$i=2,\cdots,n-1$，其中$R$是特征$p$且$2^{-1}\in R$的交换环，$mp$是奇数，$a_{i,s},b_s,c_s,e_s,c,d_i\in R$，$b_{i,s},d_s$是整数；

(4) $f_m=p_{m-1}l_{m-1}$，$f_i=p_1+l_1$对$2\leq i<m$和$f_i=p_{m-1}+l_{m-1}$对$m<i\leq n$，其中R是交换环且$2^{-1}\in R$。

证明：对于$1\leq k<i\leq n$和$x\in R$，我们设下面映射$\phi,\sigma_{i,x}:R^n\to R^n$，

$$\begin{aligned}\phi\ &:(p_1,...,p_n)\mapsto[p_1,...,p_n],\ \ [\,l_1,...,l_n\,]\mapsto(l_1,...,l_n).\\ \sigma_{k,x}\ &:(p)\mapsto(p_1,...,p_k+x,p_{k+1}+b_{k+1,k},...,p_i+b_{i,k},...,p_n+b_{n,k})\\ &\quad\ [\,l\,]\mapsto[\,l_1,...,l_k-x,l_{k+1}+y_{k+1,k},...,l_i+y_{i,k},...,l_n+y_{n,k}\,].\end{aligned}$$

对于(1)，定义$b_{i,k}=0$，$y_{i,k}=0$。

对于(2)，令$b_{2,1}=c(-p_1x-\frac{1}{2}x^2)$，$y_{2,1}=c(l_1x-\frac{1}{2}x^2)$。

对于(3)，设$b_{i,k}=y_{i,k}=0$ 对于$k<i<n$，且

$$b_{n,k}=\sum_{s=1}^{n-1}b_s(-p_sx-\frac{1}{2}x^2)+\sum_{s=1}^{n-1}e_s(-(p_sx)^{mp}-\frac{1}{2}x^{2mp}),$$
$$y_{n,k}=\sum_{s=1}^{n-1}b_s(l_sx-\frac{1}{2}x^2)+\sum_{s=1}^{n-1}e_s((l_sx)^{mp}-\frac{1}{2}x^{2mp}).$$

对于(4)，令$b_{i,k}=-p_1x-\frac{1}{2}x^2, y_{i,k}=l_1x-\frac{1}{2}x^2$对$1\leq k<m<i\leq n$，$b_{i,k}=y_{i,k}=0$对于其他情况。对于任意的$x,y\in R$我们不难验证映射$\phi,\sigma_{i,x}$是图$B\Gamma_n$的自同构且下面交换性成立：

$$\sigma_{k,x}\sigma_{j,y}=\sigma_{j,y}\sigma_{k,x},\ \phi\sigma_{k,x}\phi=\sigma_{k,-x}=\sigma_{k,x}^{-1}.$$

设$A=\langle\sigma_{k,x}\mid k=1,...,n;\ x\in R\rangle$和$G=\langle\phi,A\rangle$。不难验证$A$是一个交换群。

此外，$|\phi|=2$，对$1\leq k\leq n$，集合$\{\sigma_{k,x}\mid x\in R\}$有$r$个元素。由于$\sigma_{k,x}\sigma_{k,y}=\sigma_{k,x+y}$，则交换群$A$有$r^n$个自同构，因此$G=\langle\phi,A\rangle\leq \mathrm{Aut}(B\Gamma_n)$是广义二面体群且有$2r^n$个元素。我们可以验证$G$在$V(B\Gamma_n)$上是正则的。由引理1，可知$B\Gamma_n$ 是广义二面体群上的Cayley图。

现在本文考虑图$B\Gamma_2(\mathbb{F}_q;p_1l_1)$和图$B\Gamma_2(\mathbb{F}_q;p_1+l_1)$的最大圈，文章 [3]中的定理蕴含$B\Gamma_2(\mathbb{F}_q;p_1l_1)$是连通的，下面推论可知$B\Gamma_2(\mathbb{F}_q;p_1l_1)$有一个Hamilton圈。

推论 1　设$\mathbb{F}_q$是一个有限域，其中$q=p^k$且p是奇素数，则图$B\Gamma_2(\mathbb{F}_q;p_1l_1)$是Hamilton图，图$B\Gamma_2(\mathbb{F}_q;p_1+l_1)$有一个长度为$2q$的圈。

证明：由定理1可知图$B\Gamma_2(\mathbb{F}_q;p_1l_1)$和$B\Gamma_2(\mathbb{F}_q;p_1+l_1)$是广义二面体群上的Cayley图Cay$(G,S)$。对于图$B\Gamma_2(\mathbb{F}_q;p_1l_1)$，首先图$B\Gamma_2(\mathbb{F}_q;p_1l_1)$是连通的，由引理1中寻找生成集$\langle S\rangle$，可知$\phi\sigma_{2,\frac{x^2}{2}}\sigma_{1,x}\in\langle S\rangle$由于$(0)\sim[x,0]$ 对任意$x\in\mathbb{F}_q$。令$x=0$，于是$\phi\in\langle S\rangle$，$\sigma_{2,x^2},\sigma_{2,-x^2}\in\langle S\rangle$，我们有$\sigma_{2,-\frac{x^2}{2}}\in\langle S\rangle$和$\sigma_{1,x}\in\langle S\rangle$，$x^2+y^2=z$有解$(x,y)$对任意的$z\in\mathbb{F}_q$，于是$\sigma_{2,z}\in\langle S\rangle$，可知图$B\Gamma(\mathbb{F}_q;p_1l_1)$连通。可以验证Cay$(G,S)$满足引理2的条件，于是图$B\Gamma_2(\mathbb{F}_q;p_1l_1)$有一个Hamliton圈。对于图$B\Gamma_2(\mathbb{F}_q;p_1+l_1)$同构Cay$(G',S')$，由于$(0)\sim[x,x]$，其连接集$S'$生成的集合$\langle S'\rangle$为$\langle\phi\sigma_{1,x}\sigma_{2,x}\rangle$，由定理1中的交换性可知$\langle\phi\sigma_{1,x}\sigma_{2,x}\rangle$=$\langle\phi,\sigma_{1,x}\sigma_{2,x}\rangle$的阶是$2q$，故图$B\Gamma_2(\mathbb{F}_q;p_1+l_1)$有一个长度为$2q$的圈。

基金项目

本文由贵州省科技厅项目(批准号：黔科合基础[2020]1Y405)资助。

参考文献

[1] Lazebnik, F. and Ustimenko, V.A. (1993) New Examples of Graphs without Small Cycles and of Large Size. *European Journal of Combinatorics*, **14**, 445-460.

https://doi.org/10.1006/eujc.1993.1048

[2] Lazebnik, F. and Woldar, A.J. (2001) General Properties of Some Families of Graphs Defined by Systems of Equations. *Journal of Graph Theory*, **38**, 65-86. https://doi.org/10.1002/jgt.1024

[3] Lazebnik, F. and Viglione, R. (2002) An Infinite Series of Regular Edge－But Not Vertex-Transitive Graphs. *Journal of Graph Theory*, **41**, 249-258. https://doi.org/10.1002/jgt.10064

[4] Lazebnik, F., Sun, S. and Wang, Y. (2017) Some Families of Graphs, Hypergraphs and Digraphs Defined by Systems of Equations: A Survey. *Lecture Notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica*, **14**, 105-142.

[5] Klisowski, M. and Ustimenko, V. (2012) On the Comparison of Cryptographical Properties of Two Different Families of Graphs with Large Cycle Indicator. *Mathematics in Computer Science*, **6**, 181-198.

[6] Morris, D.W. (2012) 2-Generated Cayley Digraphs on Nilpotent Groups Have Hamiltonian Paths. *Contributions to Discrete Mathematics*, **7**, 41-47. https://doi.org/10.11575/cdm.v7i1.62051

[7] Biggs, N. (1992) Algebraic Graph Theory. Cambridge University Press, New York.

[8] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1976) Graph Theory with Applications. Macmillan, London.