Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2022, 11(1), 193-203**
Published Online January 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.111024

分数阶不可压缩Navier-Stokes-Coriolis方程周期解的存在性

何港晶，孙小春*

西北师范大学，甘肃 兰州

收稿日期：2021年12月13日；录用日期：2022年1月3日；发布日期：2022年1月19日

摘 要

本文研究了带有旋转效应的分数阶**Navier-Stokes**方程在给定周期外力作用下周期**mild**解的存在唯一性，并且建立了**Besov**空间中分数阶热半群的线性估计。首先，给出符号及函数空间的定义。其次，采用分数阶热半群的 $L^p - L^q$ 估计，分别对分数阶不可压缩**Navier-Stokes-Coriolis**方程的线性项及非线性项进行了估计。最后证明了给定一个具有周期ω的外力f，分数阶不可压缩**Navier-Stokes-Coriolis**方程周期**mild**解是唯一存在的，且周期也为ω。

关键词

分数阶不可压缩**Navier-Stokes-Coriolis**方程，周期解，半群算子估计

Existence of Periodic Solutions to the Fractional Navier-Stokes-Coriolis Equation

Gangjing He, Xiaochun Sun*

Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Dec. 13th, 2021; accepted: Jan. 3rd, 2022; published: Jan. 19th, 2022

Abstract

In this paper, we study the existence and uniqueness of periodic mild solution for fractional incompressible Navier-Stokes equations in the rotational framework and establish the linear estimation of fractional heat semigroups in Besov space. Firstly, the definition of symbol and function space is given. Secondly, the linear and nonlinear terms of the fractional incompressible Navi-

*通讯作者。

文章引用: 何港晶，孙小春. 分数阶不可压缩 Navier-Stokes-Coriolis 方程周期解的存在性[J]. 应用数学进展，2022, 11(1): 193-203. DOI: 10.12677/aam.2022.111024

er-Stokes-Coriolis equations were estimated by using the L^p-L^q estimates of fractional heat semigroups. Finally, we proved that given an external force with periodic *ω*, the periodic mild solution of the fractional incompressible Navier-Stokes-Coriolis equation is uniqueness and its period is also *ω*.

Keywords

Fractional Incompressible Navier-Stokes-Coriolis Equation, Periodic Solution, Semigroup Operator Estimation

1. 引言

考虑分数阶不可压缩 Navier-Stokes-Coriolis 方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+(-\Delta)^{\alpha}u+\Omega e_3\times u+(u\cdot\nabla)u+\nabla p=f, \\ \operatorname{div}u=0, \end{cases} \tag{1.1}$$

的周期解。其中，向量函数 $u=u(x,t)=\left(u^1(x,t),u^2(x,t),u^3(x,t)\right)$ 表示流体在点 $(x,t)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$ 的未知速度，标量函数 $p=p(x,t)$ 是流体在 $(x,t)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}$ 的未知压力。$\Omega\in\mathbb{R}$ 是围绕垂直单位向量 $e_3=(0,0,1)$ 的旋转速度。$f=f(x,t)=\left(f^1(x,t),f^2(x,t),f^3(x,t)\right)$ 表示给定具有时间周期 ω 的外力，$\Delta=\sum_{i=1}^{3}\partial_{xi}^2$ 是关于空间变量 x 的 Laplacian 微分算子。设 $\alpha>0$，分数阶 Laplacian 微分算子 $(-\Delta)^{\alpha}$ 通过 Fourier 变换定义为：

$$\mathcal{F}\left((-\Delta)^{\alpha}u\right)(\xi,t)=|\xi|^{2\alpha}\mathcal{F}u(\xi,t).$$

不可压缩 Navier-Stokes 方程在气象学、海洋学和地球物理学等众多领域中有着广泛的应用。由于地球自转对空气流及海洋流产生着旋转效应与周期效应，因此研究带有旋转效应的不可压缩 Navier-Stokes 方程周期解的适定性问题具有一定的理论意义。

当 $\alpha=1$ 时，(1.1)式为经典的不可压缩 Navier-Stokes-Coriolis 方程。Hieber, M.和 Shibata, Y.在文献[1]中证明了初值为 u_0 的 $H_\sigma^{\frac{1}{2}}$ 空间范数充分小时，不可压缩 Navier-Stokes-Coriolis 方程初值问题存在唯一的整体 mild 解。Zhao, H.和 Wang, Y. X.在文献[2]中证明了对于一类特殊大初值 $u_0(x)=u_{01}(x)+u_{02}(x)$，不可压缩 Navier-Stokes-Coriolis 方程初值问题整体解的存在性，其中 $\nabla\cdot u_{01}=0$ 而 $u_{02}(x)$ 满足其它更多条件。Wang, W. H.和 Wu, G.在文献[3]中证明了空间 $\mathcal{X}^{1-2\alpha}$ 中三维不可压缩广义 Navier-Stokes-Coriolis 方程解的整体适定性，其中 $\frac{1}{2}\le\alpha\le 1$。Iwabuchi, T.和 Takada, R.在文献[4]中证明了当 Ω 足够大时，具有时间周期外力 Navier-Stokes-Coriolis 方程的周期解。

当 $\alpha>0$ 时，(1.1)式为分数阶不可压缩 Navier-Stokes-Coriolis 方程。Ding, Y.和 Sun, X. C.在文献[5]中证明了分数阶不可压缩 Navier-Stokes-Coriolis 方程的色散效应和解的局部适定性。Kiahimoto, N.和 Yoneda, T.在文献[6]中研究了 Ω 足够大时在周期坐标系内三维旋转流体方程整体解的存在性。Wang, W. H.和 Wu, G. [7]证明了在空间 $F\dot{B}_{b,r}^{1-2\alpha+3/n}$ 中分数阶随机不可压缩 Navier-Stokes-Coriolis 方程解的全局存在性，其中 $2\le b\le\infty$，$\frac{2}{3}<\alpha<\frac{5}{3}-\frac{1}{b}$，$1\le r\le\infty$。

根据 Duhamel 定理，(1.1)式等价于下列积分方程：

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}T_\Omega(t-\tau)\mathbb{P}f(\tau)\mathrm{d}\tau-\int_{-\infty}^{t}T_\Omega(t-\tau)\mathbb{P}\left[\left(u(\tau)\cdot\nabla\right)u(\tau)\right]\mathrm{d}\tau, \tag{IP}$$

其中，$\mathbb{P}=\left(\delta_{ij}+R_iR_j\right)(1\le i,j\le 3)$ 为散度自由向量域上的 Helmholtz 投影，(IP)中的 $T_\Omega(\cdot)$ 为(1.1)式的线性方程的解半群：

$$T_\Omega(t)u=\mathcal{F}^{-1}\left[\cos\left(\Omega\frac{\xi_3}{|\xi|}t\right)\mathrm{e}^{-t|\xi|^{2\alpha}}I\hat{u}(\xi)+\sin\left(\Omega\frac{\xi_3}{|\xi|}t\right)\mathrm{e}^{-t|\xi|^{2\alpha}}R(\xi)\hat{u}(\xi)\right],$$

其中 $t\in\mathbb{R}$，$\operatorname{div}u=0$。I 表示单位矩阵，$R(\xi)$ 为 Riesz 变换：$\widehat{Rf}(\xi):=\frac{i\xi}{|\xi|}\hat{f}(\xi)$。

本文考虑了分数阶不可压缩 Navier-Stokes-Coriolis 方程的周期性解。主要结论为：

定理 1.1 设 $s>0$，$1<p\le 2$，$\frac{3}{4}<\alpha\le 1$，$2\le r<3$，$2\le q\le\frac{12}{5}$，并且 $(r,q)\ne(2,2)$，且

$$\frac{s}{3}+\frac{1}{p}>\frac{1}{r}+\frac{2}{3},\quad \frac{1}{2}\le\frac{1}{l}<\frac{1}{q}+\frac{1}{6}. \tag{1.2}$$

存在正常数 $\varsigma=\varsigma(r,q,s,p,l)$，$K=K(r,q,s,p,l)$ 及 ω，使得 $\forall f\in BC\left(\mathbb{R};\dot{B}_{p,2}^{-s}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)\cap BC\left(\mathbb{R};L^l\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$，对 $\forall t\in\mathbb{R}$，$f(t)=f(t+\omega)$ 且

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|f(t)\right\|_{\dot{B}_{p,2}^{-s}}+\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|f(t)\right\|_{L^l}\le\varsigma,$$

(1.1)式存在唯一的周期 mild 解 $u\in X_K^{r,q}$，并且 $u(t)=u(t+\omega)$，其中

$$X_K^{r,q}:=\left\{u\in BC\left(\mathbb{R};L_\sigma^r\left(\mathbb{R}^3\right)\right)\cap BC\left(\mathbb{R};\dot{W}^{1,q}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)\middle|\left\|u\right\|_{X^{r,q}}\le K\right\},$$

$$\left\|u\right\|_{X^{r,q}}:=\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|u(t)\right\|_{L^r}+\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|\nabla u(t)\right\|_{L^q}.$$

注记 1.2 Kozono, H.和 Nakao, M.在文献[8]中证明了三维不可压缩 Navier-Stokes 方程在条件 $2<r<3$，$\frac{3}{2}<q<3$，$s>0$，$1<p<\min\{r,q\}$ 及 $\frac{s}{3}+\frac{1}{p}>\frac{1}{r}+\frac{2}{3}$，$\frac{1}{q}\le\frac{1}{l}<\frac{1}{q}+\frac{1}{3}$ 下存在唯一的周期解。Iwabuchi, T.和 Takada, R.在文献[4]中证明了外力满足与参数 $|\Omega|$ 相关的尺寸条件下不可压缩 Navier-Stoke-Coriolis 方程周期解的存在性。受以上两篇文献启发，本文定理 1.1 将结论推广至分数阶不可压缩 Navier-Stoke-Coriolis 方程，其中 $\frac{3}{4}<\alpha\le 1$。

2. 预备知识

首先给出符号说明及相关函数空间的定义。

$C_{0,\sigma}^\infty\left(\mathbb{R}^3\right)$ 表示具有紧支集的所有实值 C^∞ 向量函数 $\phi=\left(\phi^1,\phi^2,\phi^3\right)$ 的集合，且 $\operatorname{div}\phi=0$。$L_\sigma^r\left(\mathbb{R}^3\right)$ 为 $C_{0,\sigma}^\infty\left(\mathbb{R}^3\right)$ 关于范数 $\|\cdot\|_{L^r}$ 的闭包，其中 $1<r<\infty$。$L^r\left(\mathbb{R}^3\right)$ 表示 $\mathbb{R}^3$ 上 r 次 Lebesgue 可积函数空间，$\dot{W}^{1,r}\left(\mathbb{R}^3\right)$ 表示齐次 Sobolev 空间。$L_\sigma^{r'}\left(\mathbb{R}^3\right)$ 表示为 $L_\sigma^r\left(\mathbb{R}^3\right)$ 的对偶空间，$1<r<\infty$，$\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$。

其次介绍 Littlewood-Paley 分解.设 $\mathfrak{S}\left(\mathbb{R}^3\right)$ 为 Schwartz 函数空间，$\mathfrak{S}'\left(\mathbb{R}^3\right)$ 为缓增广义函数空间.设 $\varphi\in\mathfrak{S}\left(\mathbb{R}^3\right)$ 为径向函数，且 $\hat{\varphi}$ 满足下列性质

$$\operatorname{supp}\hat{\varphi}\subset\mathcal{C}:=\left\{\xi\in\mathbb{R}^3:2^{-1}<|\xi|<2\right\};\ \sum_{j\in\mathbb{Z}}\hat{\varphi}\left(2^{-j}\xi\right)=1,\ \forall\xi\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}.$$

令 $\varphi_j(x) := 2^{3j}\varphi(2^j x)$，定义频率局部化算子 Δ_j 为

$$\Delta_j f := \varphi_j * f\,,\ \forall j \in \mathbb{Z},\ \ f \in \mathfrak{S}'(\mathbb{R}^3).$$

令 $\tilde{\mathfrak{S}}(\mathbb{R}^3) := \mathfrak{S}'(\mathbb{R}^3)/\mathcal{P}[\mathbb{R}^3]$，其中 $\mathcal{P}[\mathbb{R}^3]$ 为定义在 $\mathbb{R}^3$ 上的全体多项式所构成的线性空间。设 $s \in \mathbb{R}$，$1 \le p$，$q \le \infty$，则齐次 Besov 空间 $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^3)$ 定义为

$$\left\{ f \in \tilde{\mathfrak{S}}(\mathbb{R}^3) : \|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^3)} < \infty \right\},$$

其中

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^3)} = \begin{cases} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{sqj} \|\Delta_j f\|^q_{L^p(\mathbb{R}^3)} \right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \le q < \infty, \\ \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{sj} \|\Delta_j f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}, & q = \infty. \end{cases}$$

3. 非线性估计

对(IP)中的非线性项进行估计。设

$$N(u,v)(t) = \int_{-\infty}^{t} T_\Omega(t-\tau)\mathbb{P}\big[(u(\tau)\cdot\nabla)u(\tau)\big]\mathrm{d}\tau\,. \tag{3.1}$$

Hieber, M.和 Shibata, Y.在文献[1]中给出了热半群 T_Ω 的 $L^p - L^q$ 估计。在此基础上，Liu, J.和 Sun, X. C. [9]及 Miao, C. X.，Yuan, B. Q.，Zhang, B.在文献[10]中给出了分数阶热半群 T_Ω 的 $L^p - L^q$ 估计。

引理 3.1 [9]设 $1 < p_0 \le 2 \le p_1 < \infty$，且 $\beta = (\beta_1,\beta_2,\beta_3) \in (\mathbb{N}\cup\{0\})^3$，则存在正常数 $C = C(\alpha, p_0, p_1, \beta)$，使得 $\forall t > 0$，$\alpha > 0$ 及 $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^3)$，有

$$\left\|\partial_x^\beta T_\Omega(t) f\right\|_{L^{p_1}} \le C t^{-\frac{\beta}{2\alpha} - \frac{3}{2\alpha}\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}\right)} \|f\|_{L^{p_0}}\,. \tag{3.2}$$

引理 3.2 [10]设 $1 < p_0 \le 2 \le p_1 < \infty$，且 $s > 0$，则存在正常数 $C = C(\alpha, p_0, p_1, s)$，使得 $\forall t > 0$，$\alpha > 0$ 及 $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^3)$，有

$$\left\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} T_\Omega(t) f\right\|_{L^{p_1}} \le C t^{-\frac{s}{2\alpha} - \frac{3}{2\alpha}\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}\right)} \|f\|_{L^{p_0}}\,. \tag{3.3}$$

引理 3.3 设 $\frac{3}{4} < \alpha \le 1$，$2 \le r < 3$，$2 \le q \le \frac{12}{5}$，并且 $(r,q) \ne (2,2)$。对 $\forall u,v \in BC(\mathbb{R}; L^r_\sigma(\mathbb{R}^3)) \cap BC(\mathbb{R}; \dot{W}^{1,q}(\mathbb{R}^3))$，$\forall C = C(q,r) > 0$，使得 $N(u,v) \in BC(\mathbb{R}; L^r_\sigma(\mathbb{R}^3)) \cap BC(\mathbb{R}; \dot{W}^{1,q}(\mathbb{R}^3))$，且

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|N(u,v)(t)\|_{L^r} \le C \sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t)\|_{L^r} \left\{ \sup_{t\in\mathbb{R}} \|v(t)\|_{L^r} + \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\nabla v(t)\|_{L^q} \right\}, \tag{3.4}$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\nabla N(u,v)(t)\|_{L^q} \le C \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\nabla v(t)\|_{L^q} \left\{ \sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t)\|_{L^r} + \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\nabla u(t)\|_{L^q} \right\}. \tag{3.5}$$

证明：将 $N(u,v)(t)$ 分为两个部分

$$N(u,v)(t) = N_1(u,v)(t) + N_2(u,v)(t),$$

其中

$$N_1(u,v)(t)=\int_{-\infty}^{t-1}T_\Omega(t-\tau)\mathbb{P}\left[\left(u(\tau)\cdot\nabla\right)u(\tau)\right]\mathrm{d}\tau,$$

$$N_2(u,v)(t)=\int_{t-1}^{t}T_\Omega(t-\tau)\mathbb{P}\left[\left(u(\tau)\cdot\nabla\right)u(\tau)\right]\mathrm{d}\tau.$$

首先证明(3.4)式。

$N_1(u,v)(t)$ 的估计：由于 $1\le\frac{r}{2}<\frac{3}{2}$，$3<\left(\frac{r}{2}\right)'\le\infty$，$\frac{3}{2}<r'\le 2$，$\frac{r}{2}$ 与 $\left(\frac{r}{2}\right)'$，$r$ 与 r' 分别为共轭关系，$\phi\in C_{0,\sigma}^{\infty}\left(\mathbb{R}^3\right)$。由引理 3.1 及 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}\left|\left(N_1(u,v)(t),\phi\right)\right|&=\left|\int_{-\infty}^{t-1}\left(\left(u(\tau)\cdot\nabla\right)T_\Omega(t-\tau)\phi,v(\tau)\right)\mathrm{d}\tau\right|\\&\le\int_{-\infty}^{t-1}\left\|\nabla T_\Omega(t-\tau)\phi\right\|_{L^{\left(\frac{r}{2}\right)'}}\left\|u(\tau)\otimes v(\tau)\right\|_{L^{\frac{r}{2}}}\mathrm{d}\tau\\&\le C\int_{-\infty}^{t-1}(t-\tau)^{-\frac{1}{2\alpha}-\frac{3}{2\alpha}\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{(r/2)'}\right)}\|\phi\|_{L^{r'}}\left\|u(\tau)\right\|_{L^r}\left\|v(\tau)\right\|_{L^r}\mathrm{d}\tau\\&\le C\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|u(t)\right\|_{L^r}\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|v(t)\right\|_{L^r}\|\phi\|_{L^{r'}}\int_1^{\infty}\tau^{-\frac{1}{2\alpha}-\frac{3}{2\alpha r}}\mathrm{d}\tau\\&\le C\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|u(t)\right\|_{L^r}\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|v(t)\right\|_{L^r}\|\phi\|_{L^{r'}}\end{aligned}$$

由对偶性可得

$$\left\|N_1(u,v)(t)\right\|_{L^r}\le C\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|u(t)\right\|_{L^r}\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|v(t)\right\|_{L^r}.\tag{3.6}$$

$N_2(u,v)(t)$ 的估计：对 $\forall t\in\mathbb{R}$，$1<k<\frac{4}{3}$，

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{r}+\frac{1}{q},\tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}\left\|N_2(u,v)(t)\right\|_{L^r}&\le\int_{t-1}^{t}\left\|T_\Omega(t-\tau)\mathbb{P}\left[\left(u(\tau)\cdot\nabla\right)v(\tau)\right]\right\|_{L^r}\mathrm{d}\tau\\&\le C\int_{t-1}^{t}(t-\tau)^{-\frac{3}{2\alpha}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{r}\right)}\left\|\left(u(\tau)\cdot\nabla\right)v(\tau)\right\|_{L^k}\mathrm{d}\tau\\&\le C\int_{t-1}^{t}(t-\tau)^{-\frac{3}{2\alpha q}}\left\|u(\tau)\right\|_{L^r}\left\|\nabla v(\tau)\right\|_{L^q}\mathrm{d}\tau\\&\le C\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|u(t)\right\|_{L^r}\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|\nabla v(t)\right\|_{L^q}\int_0^1\tau^{-\frac{3}{2\alpha q}}\mathrm{d}\tau\\&\le C\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|u(t)\right\|_{L^r}\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|\nabla v(t)\right\|_{L^q}\end{aligned}\tag{3.8}$$

故由(3.6)式和(3.8)式可得

$$\left\|N(u,v)(t)\right\|_{L^r}\le C\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|u(t)\right\|_{L^r}\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|v(t)\right\|_{L^r}+\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|\nabla v(t)\right\|_{L^q}\right\}.$$

其次，证明(3.5)式。

$\nabla N_1(u,v)(t)$ 的估计：由(3.7)式，引理 3.1 及 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}\left\|\nabla N_1(u,v)(t)\right\|_{L^q} &\le \int_{-\infty}^{t-1}\left\|\nabla T_\Omega(t-\tau)\mathbb{P}\left[\left(u(\tau)\cdot\nabla\right)v(\tau)\right]\right\|_{L^q}\mathrm{d}\tau\\ &\le C\int_{-\infty}^{t-1}(t-\tau)^{-\frac{1}{2\alpha}-\frac{3}{2\alpha}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{q}\right)}\left\|\left(u(\tau)\cdot\nabla\right)v(\tau)\right\|_{L^k}\mathrm{d}\tau\\ &\le C\int_{-\infty}^{t-1}(t-\tau)^{-\frac{1}{2\alpha}-\frac{3}{2\alpha r}}\left\|u(\tau)\right\|_{L^r}\left\|\nabla v(\tau)\right\|_{L^q}\mathrm{d}\tau\\ &\le C\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|u(t)\right\|_{L^r}\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|\nabla v(t)\right\|_{L^q}\int_1^{\infty}\tau^{-\frac{1}{2\alpha}-\frac{3}{2\alpha r}}\mathrm{d}\tau\\ &\le C\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|u(t)\right\|_{L^r}\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|\nabla v(t)\right\|_{L^q}\end{aligned} \tag{3.9}$$

$\nabla N_2(u,v)(t)$ 的估计：引入参数 q^* 和 l，$2\le q\le\frac{12}{5}$，$\frac{3}{2}\le l\le 2$，$\frac{1}{q^*}=\frac{1}{q}-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{l}=\frac{1}{q^*}+\frac{1}{q}$。根据嵌入关系 $\dot{W}^{1,q}\left(\mathbb{R}^3\right)\hookrightarrow L^{q^*}\left(\mathbb{R}^3\right)$ 和引理 3.1 可得

$$\begin{aligned}\left\|\nabla N_2(u,v)(t)\right\|_{L^q} &\le \int_{t-1}^{t}\left\|\nabla T_\Omega(t-\tau)\mathbb{P}\left[\left(u(\tau)\cdot\nabla\right)v(\tau)\right]\right\|_{L^q}\mathrm{d}\tau\\ &\le C\int_{t-1}^{t}(t-\tau)^{-\frac{1}{2\alpha}-\frac{3}{2\alpha}\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{q}\right)}\left\|\left(u(\tau)\cdot\nabla\right)v(\tau)\right\|_{L^l}\mathrm{d}\tau\\ &\le C\int_{t-1}^{t}(t-\tau)^{-\frac{1}{2\alpha}-\frac{3}{2\alpha q^*}}\left\|u(\tau)\right\|_{L^{q^*}}\left\|\nabla v(\tau)\right\|_{L^q}\mathrm{d}\tau\\ &\le C\int_{t-1}^{t}(t-\tau)^{-\frac{3}{2\alpha q}}\left\|\nabla u(\tau)\right\|_{L^q}\left\|\nabla v(\tau)\right\|_{L^q}\mathrm{d}\tau\\ &\le C\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|\nabla u(t)\right\|_{L^q}\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|\nabla v(t)\right\|_{L^q}\int_0^1\tau^{-\frac{3}{2\alpha q}}\mathrm{d}\tau\\ &\le C\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|\nabla u(t)\right\|_{L^q}\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|\nabla v(t)\right\|_{L^q}\end{aligned} \tag{3.10}$$

故由(3.9)式和(3.10)式可得

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|\nabla N(u,v)(t)\right\|_{L^r}\le C\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|\nabla v(t)\right\|_{L^q}\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|u(t)\right\|_{L^q}+\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|\nabla u(t)\right\|_{L^q}\right\}.$$

4. 线性估计

对(IP)中的线性项进行估计。设

$$F(t)=\int_{-\infty}^{t}T_\Omega(t-\tau)\mathbb{P}f(\tau)\mathrm{d}\tau .$$

Kozono, H.，Ogawa, T.和 Taniuchi, Y. [11]在齐次 Besov 空间中对热半群 $\mathrm{e}^{\Delta t}$ 做估计。Miao, C. X.，Yuan, B. Q.和 Zhang, B. [10]对分数阶的热半群 $\mathrm{e}^{-t(-\Delta)^\alpha}$ 做了 L^p-L^q 的估计。Sun, X. C.和 Ding, Y. [12]推广到齐次 Besov 空间。

引理 4.1 [12]设 $-\infty<s_0\le s_1<\infty$，$1\le p\le q\le\infty$，则存在正常数 $C=C(s_0,s_1)$，使得对 $\forall t>0$，$\alpha>0$ 及 $f\in\dot{B}^{s_0}_{p,q}\left(\mathbb{R}^3\right)$，有

$$\left\|\mathrm{e}^{-t(-\Delta)^\alpha}f\right\|_{\dot{B}^{s_1}_{p,q}}\le Ct^{-\frac{1}{2\alpha}(s_1-s_0)}\left\|f\right\|_{\dot{B}^{s_0}_{p,q}} .$$

引理 4.2 设 $-\infty<s_0\le s_1<\infty$，$1\le p_0\le p_1\le\infty$，$1\le q\le\infty$，则存在正常数 $C=C(s_0,s_1,p_0,p_1)$，使得 $\forall t>0$，$\alpha>0$ 及 $f\in\dot{B}^{s_0}_{p,q}\left(\mathbb{R}^3\right)$，有

$$\left\| \mathrm{e}^{-t(-\Delta)^{\alpha}} f \right\|_{\dot{B}^{s_1}_{p_1,q}} \le C t^{-\frac{1}{2\alpha}(s_1-s_0)-\frac{3}{2\alpha}\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}\right)} \|f\|_{\dot{B}^{s_0}_{p_0,q}}.$$

证明： 设 $G_t(x)=\mathrm{e}^{-t(-\Delta)^{\alpha}}$，记 $G_t(x)*f=\mathrm{e}^{-t(-\Delta)^{\alpha}} f$。

令 $G_t'(x)=\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}(-\Delta)^{\alpha}}$，则 $G_t'(x)*G_t'(x)*f=\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}(-\Delta)^{\alpha}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}(-\Delta)^{\alpha}} f$。

下证

$$2^{s_1 j}\left\|\varphi_j * G_t' * G_t' * a\right\|_{L^{p_1}} \le C t^{-\frac{1}{2\alpha}(s_1-s_0)-\frac{3}{2\alpha}\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}\right)} 2^{s_0 j}\left\|\varphi_j * a\right\|_{L^{p_0}},$$

$\operatorname{supp}\widehat{\varphi_j}=\left\{\xi\in\mathbb{R}^n; 2^{j-1}\le|\xi|\le 2^{j+1}\right\}$，存在正常数 $C=C(s_0,s_1)$，$j\in\mathbb{Z}$，$1<P\le\infty$。

有 $\varphi_j * G_t' * G_t' * f=\widetilde{\varphi_j} * G_t' * \varphi_j * G_t' * a$，$\widetilde{\varphi_j}=\varphi_{j-1}+\varphi_j+\varphi_{j+1}$。

$$\begin{aligned}
2^{s_1 j}\left\|\varphi_j * G_t' * G_t' * a\right\|_{L^{p_1}} &= 2^{s' j} 2^{s_0 j}\left\|(-\Delta)^{-\frac{s'}{2}}\widetilde{\varphi_j} * (-\Delta)^{\frac{s'}{2}} G_t' * \varphi_j * G_t' * a\right\|_{L^{p_1}} \\
&\le 2^{s' j}\left\|(-\Delta)^{-\frac{s'}{2}}\widetilde{\varphi_j}\right\|_{L^1}\left\|(-\Delta)^{\frac{s'}{2}} G_t'\right\|_{L^1}\left(2^{s_0 j}\left\|\varphi_j * G_t' * a\right\|_{L^{p_1}}\right) \\
&\le C t^{-\frac{1}{2\alpha}(s_1-s_0)}\left(2^{s_0 j}\left\|\varphi_j * G_t' * a\right\|_{L^{p_1}}\right)
\end{aligned}$$

其中 $s'=s_1-s_0$，$\left\|(-\Delta)^{-\frac{s'}{2}}\widetilde{\varphi_j}\right\|_{L^1}=C2^{-s' j}$，$\left\|(-\Delta)^{\frac{s'}{2}} G_t'\right\|_{L^1}=C t^{-\frac{1}{2\alpha}(s_1-s_0)}$。

再根据引理 3.1 可得

$$\left\|\varphi_j * G_t' * a\right\|_{L^{p_1}} \le C t^{-\frac{3}{2\alpha}\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}\right)}\left\|\varphi_j * a\right\|_{L^{p_0}},$$

可得

$$2^{s_1 j}\left\|\varphi_j * G_t' * G_t' * a\right\|_{L^{p_1}} \le C t^{-\frac{1}{2\alpha}(s_1-s_0)-\frac{3}{2\alpha}\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}\right)} 2^{s_0 j}\left\|\varphi_j * a\right\|_{L^{p_0}}.$$

引理 4.3 设 $\frac{3}{4}\le\alpha\le 1$，$2\le r<3$，$2\le q<3$，并且 $(r,q)\ne(2,2)$。指标 s,p,l 满足

$$s>0,\ 1<p\le 2,\ \frac{s}{3}+\frac{1}{p}>\frac{1}{r}+\frac{2}{3},\ \frac{1}{2}\le\frac{1}{l}<\frac{1}{q}+\frac{1}{6}. \tag{4.1}$$

对 $\forall f\in BC\left(\mathbb{R};\dot{B}^{-s}_{p,2}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)\cap BC\left(\mathbb{R};L^l\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$，使得 $F\in BC\left(\mathbb{R};L^r_\sigma\left(\mathbb{R}^3\right)\right)\cap BC\left(\mathbb{R};\dot{W}^{1,q}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$，并存在正常数 $C=C(r,q,s,p,l)$ 有

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|F(t)\|_{L^r}\le C\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(t)\|_{\dot{B}^{-s}_{p,2}}+\sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(t)\|_{L^l}\right), \tag{4.2}$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|\nabla F(t)\|_{L^q}\le C\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(t)\|_{\dot{B}^{-s}_{p,2}}+\sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(t)\|_{L^l}\right). \tag{4.3}$$

证明： 将 $F(t)$ 分为两个部分

$$F(t)=F_1(t)+F_2(t),$$

其中

$$F_1(t)=\int_{-\infty}^{t-1} T_\Omega(t-\tau)\mathbb{P}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$F_2(t)=\int_{t-1}^{t} T_\Omega(t-\tau)\mathbb{P}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

首先估计(4.2)式。

$F_1(t)$ 的估计：$1<p\le 2$，$2\le r<3$。由引理 4.3，Plancherel 定理及参考文献[13]连续嵌入关系 $L^p(\mathbb{R}^3)\hookrightarrow \dot{B}^0_{p,2}(\mathbb{R}^3)$ $(1<p\le 2)$ 和 $\dot{B}^0_{p,2}(\mathbb{R}^3)\hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$ $(2\le p<\infty)$。

$$\begin{aligned}\|F_1(t)\|_{L^r}&\le\int_{-\infty}^{t-1}(t-\tau)^{-\frac{3}{2\alpha}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)}\left\|T_\Omega\left(\frac{t-\tau}{2}\Delta\right)\mathbb{P}f(\tau)\right\|_{L^2}\mathrm{d}\tau\\&\le C\int_{-\infty}^{t-1}(t-\tau)^{-\frac{3}{2\alpha}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)}\left\|\mathrm{e}^{\frac{t-\tau}{2}\Delta}\mathbb{P}f(\tau)\right\|_{L^2}\mathrm{d}\tau\\&\le C\int_{-\infty}^{t-1}(t-\tau)^{-\frac{3}{2\alpha}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)-\frac{s}{2\alpha}}\left\|\mathrm{e}^{\frac{t-\tau}{4}\Delta}\mathbb{P}f(\tau)\right\|_{\dot{B}^{-s}_{2,2}}\mathrm{d}\tau\\&\le C\int_{-\infty}^{t-1}(t-\tau)^{-\frac{3}{2\alpha}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)-\frac{s}{2\alpha}-\frac{3}{2\alpha}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}\|f(\tau)\|_{\dot{B}^{-s}_{p,2}}\mathrm{d}\tau\\&\le C\sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(t)\|_{\dot{B}^{-s}_{p,2}}\int_1^\infty\tau^{-\frac{3}{2\alpha}\left(\frac{s}{3}+\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}\mathrm{d}\tau\\&\le C\sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(t)\|_{\dot{B}^{-s}_{p,2}}\end{aligned}\tag{4.4}$$

$F_2(t)$ 的估计：$\frac{3}{2}<l\le 2$，$2\le r<3$。由引理 3.1 可得

$$\begin{aligned}\|F_2(t)\|_{L^r}&\le C\int_{t-1}^{t}(t-\tau)^{-\frac{3}{2\alpha}\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{r}\right)}\|f(\tau)\|_{L^l}\mathrm{d}\tau\\&\le C\sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(t)\|_{L^l}\int_0^1\tau^{-\frac{3}{2\alpha}\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{r}\right)}\mathrm{d}\tau\\&\le C\sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(t)\|_{L^l}\end{aligned}\tag{4.5}$$

故由(4.4)式和(4.5)式可证得

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|F(t)\|_{L^r}\le C\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(t)\|_{\dot{B}^{-s}_{p,2}}+\sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(t)\|_{L^l}\right).$$

其次，证明(4.3)式。

$\nabla F_1(t)$ 的估计：$1<p\le 2$，$2\le q<3$。由引理 3.1，引理 4.2，Plancherel 定理和(4.1)式可得

$$\begin{aligned}\|\nabla F_1(t)\|_{L^q}&\le C\int_{-\infty}^{t-1}(t-\tau)^{-\frac{3}{2\alpha}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{2\alpha}}\left\|T_\Omega\left(\frac{t-\tau}{2}\right)\mathbb{P}f(\tau)\right\|_{L^2}\mathrm{d}\tau\\&\le C\int_{-\infty}^{t-1}(t-\tau)^{-\frac{3}{2\alpha}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{2\alpha}}\left\|\mathrm{e}^{\frac{t-\tau}{2}\Delta}\mathbb{P}f(\tau)\right\|_{L^2}\mathrm{d}\tau\\&\le C\int_{-\infty}^{t-1}(t-\tau)^{-\frac{3}{2\alpha}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{2\alpha}-\frac{s}{2\alpha}}\left\|\mathrm{e}^{\frac{t-\tau}{4}\Delta}\mathbb{P}f(\tau)\right\|_{\dot{B}^{-s}_{2,2}}\mathrm{d}\tau\\&\le C\int_{-\infty}^{t-1}(t-\tau)^{-\frac{3}{2\alpha}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{2\alpha}-\frac{s}{2\alpha}-\frac{3}{2\alpha}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}\|f(\tau)\|_{\dot{B}^{-s}_{p,2}}\mathrm{d}\tau\\&\le C\sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(t)\|_{\dot{B}^{-s}_{p,2}}\int_1^\infty\tau^{-\frac{3}{2\alpha}\left(\frac{s}{3}+\frac{1}{p}+\frac{1}{3}-\frac{1}{q}\right)}\mathrm{d}\tau\\&\le C\sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(t)\|_{\dot{B}^{-s}_{p,2}}\end{aligned}\tag{4.6}$$

$\nabla F_2(t)$ 的估计：$\frac{3}{2}<l\le 2$，$2\le q<3$。由引理 3.1 可得

$$\begin{aligned}\left\|\nabla F_2(t)\right\|_{L^q} &\le C\int_{t-1}^{t}(t-\tau)^{-\frac{3}{2\alpha}\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{2\alpha}}\left\|f(\tau)\right\|_{L^l}\mathrm{d}\tau \\ &\le C\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|f(t)\right\|_{L^l}\int_0^1\tau^{-\frac{3}{2\alpha}\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{2\alpha}}\mathrm{d}\tau \\ &\le C\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|f(t)\right\|_{L^l}\end{aligned}\tag{4.7}$$

故由(4.6)式和(4.7)式可得

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|\nabla F(t)\right\|_{L^q}\le C\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|f(t)\right\|_{\dot{B}_{p,2}^{-s}}+\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|f(t)\right\|_{L^l}\right).$$

5. 证明定理 1.1

设 $\frac{3}{4}<\alpha\le 1$，$2\le r<3$，$2\le q\le\frac{12}{5}$，并且 $(r,q)\ne(2,2)$。定义 Banach 空间 $\left(X^{r,q},\|\cdot\|_{X^{r,q}}\right)$ 如下：

$$X^{r,q}:=BC\left(\mathbb{R};L_\sigma^r\left(\mathbb{R}^3\right)\right)\cap BC\left(\mathbb{R};\dot{W}^{1,q}\left(\mathbb{R}^3\right)\right),$$

$$\|u\|_{X^{r,q}}:=\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|u(t)\right\|_{L^r}+\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|\nabla u(t)\right\|_{L^q}.$$

由迭代逼近方法构造时间周期 mild 解

$$\begin{aligned}v_0(t)&:=\int_{-\infty}^{t}T_\Omega(t-\tau)\mathbb{P}f(\tau)\mathrm{d}\tau, \\ v_{m+1}(t)&:=v_0(t)-N(v_m,v_m),\quad m\in\mathbb{N}\cup\{0\},\end{aligned}\tag{5.1}$$

其中，$N(u,v)(t)=\int_{-\infty}^{t}T_\Omega(t-\tau)\mathbb{P}\left[\left(u(\tau)\cdot\nabla\right)v(\tau)\right]\mathrm{d}\tau$。

指标 s、p、l、α 满足(1.2)式，根据引理 4.3，$v_0\in X^{r,q}$，$f\in BC\left(\mathbb{R};\dot{B}_{p,2}^{-s}\left(\mathbb{R}^3\right)\right)\cap BC\left(\mathbb{R};L^l\left(\mathbb{R}^3\right)\right)$，存在正常数 $C_1=C(r,q,s,p,l,\alpha)$ 使得

$$\begin{aligned}\left\|v_0\right\|_{X^{r,q}}&=\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|v(t)\right\|_{L^r}+\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|\nabla v(t)\right\|_{L^q} \\ &\le C_1\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|f(t)\right\|_{\dot{B}_{p,2}^{-s}}+\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|f(t)\right\|_{L^l}\right)\end{aligned}\tag{5.2}$$

又因 f 是给定周期为 ω 的外力，则 $v_0(t)$ 的周期也为 ω。根据归纳理论及引理 3.3 可得，$\forall m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，$v_m(t)$ 属于 Banach 空间 $X^{r,q}$，且周期也为 ω.

由(3.4)式和(3.5)式，存在正常数 $C_2=C(r,q)$ 使得

$$\begin{aligned}\left\|v_{m+1}\right\|_{X^{r,q}}&\le\left\|v_0\right\|_{X^{r,q}}+\left\|N(v_m,v_m)\right\|_{X^{r,q}} \\ &\le\left\|v_0\right\|_{X^{r,q}}+C_2\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|v_m(t)\right\|_{L^r}+\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|v_m(t)\right\|_{L^q}\right)^2 \\ &=\left\|v_0\right\|_{X^{r,q}}+C_2\left\|v_m\right\|_{X^{r,q}}^2\end{aligned}\tag{5.3}$$

假设

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|f(t)\right\|_{\dot{B}_{p,2}^{-s}}+\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\|f(t)\right\|_{L^l}<\frac{1}{4C_1C_2}.\tag{5.4}$$

那么由(5.2)式和(5.4)式可得

$$\|v_0\|_{X^{r,q}} < \frac{1}{4C_2}.$$

根据(5.3)式和归纳理论可得

$$\|v_m\|_{X^{r,q}} \le \frac{\sqrt{1-4C_2\|v_0\|_{X^{r,q}}}}{2C_2} = K, \tag{5.5}$$

注意到 $0 < 2C_2K < 1$.设 $w_m = v_m - v_{m-1}$， $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，并且 $v_{-1} = 0$

$$\begin{aligned} w_{m+1}(t) &= v_{m+1}(t) - v_m(t) \\ &= -N(v_m, v_m)(t) + N(v_{m-1}, v_{m-1})(t) \\ &= -N(w_m, v_m)(t) - N(v_{m-1}, w_m)(t) \end{aligned}$$

由引理 3.3 和(5.5)式可得

$$\begin{aligned} \|w_{m+1}\|_{X^{r,q}} &\le \|N(w_m, v_m)\|_{X^{r,q}} + \|N(v_{m-1}, w_m)\|_{X^{r,q}} \\ &\le C_2\left(\|w_m\|_{X^{r,q}}\|v_m\|_{X^{r,q}} + \|v_{m-1}\|_{X^{r,q}}\|w_m\|_{X^{r,q}}\right) \\ &\le 2C_2K\|w_m\|_{X^{r,q}} \\ &\le \cdots \\ &\le (2C_2K)^{m+1}\|v_0\|_{X^{r,q}} \end{aligned} \tag{5.6}$$

设 $v_m(t) = \sum_{i=0}^{m} w_i(t)$， $0 < 2C_2K < 1$。(5.6)式为柯西列， $X^{r,q}$ 为完备的赋范空间，故极限 v 属于空间 $X^{r,q}$ 可表示为

$$\lim_{m\to\infty} v_m = v. \tag{5.7}$$

从而极限 v 的周期与 f 的周期相同为 ω。

$$\begin{aligned} &\|N(v_m, v_m) - N(v, v)\|_{X^{r,q}} \\ &\le \|N(v_m - v, v_m)\|_{X^{r,q}} + \|N(v, v_m - v)\|_{X^{r,q}} \\ &\le C_2\|v_m - v\|_{X^{r,q}}\|v_m\|_{X^{r,q}} + C_2\|v\|_{X^{r,q}}\|v_m - v\|_{X^{r,q}} \\ &\le 2C_2K\|v_m - v\|_{X^{r,q}} \to 0,\ m \to \infty, \end{aligned} \tag{5.8}$$

由(5.7)式和(5.8)式可证得极限 v 是满足方程(1.1)式的周期 mild 解，且 $\|v\|_{X^{r,q}} \le K$ 。

下证解的唯一性。

设 $\bar{v}$ 属于 Banach 空间 $X^{r,q}$， $\bar{v}$ 是满足方程(1.1)式的另一个周期 mild 解，且 $\|\bar{v}\|_{X^{r,q}} \le K$ 。

由引理 3.3 和(5.5)式可得

$$\|v - \bar{v}\|_{X^{r,q}} \le \|N(v - \bar{v}, v)\|_{X^{r,q}} + \|N(\bar{v}, v - \bar{v})\|_{X^{r,q}} \le 2C_2K\|v - \bar{v}\|_{X^{r,q}},$$

则 $(1-2C_2K)\|v - \bar{v}\|_{X^{r,q}} \le 0$， $0 < 2C_2K < 1$，故 $v = \bar{v}$ 。即定理 1.1 证毕。

参考文献

[1] Hieber, M. and Shibata, Y. (2010) The Fujita-Kato Approach to the Navier-Stokes Equations in the Rotational Framework. *Mathematische Zeitschrift*, **265**, 481-491. https://doi.org/10.1007/s00209-009-0525-8

[2] Zhao, H.Y. and Wang, Y.X. (2017) A Remark on the Navier-Stokes Equations with the Coriolis Force. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **40**, 7323-7332. https://doi.org/10.1002/mma.4532

[3] Wang, W.H. and Wu, G. (2018) Global Mild Solution of the Generalized Navier-Stokes Equations with Coriolis Force.

Applied Mathematics Letters, **76**, 181-186. https://doi.org/10.1016/j.aml.2017.09.001

[4] Iwabuchi, T. and Takada, R. (2018) Time Periodic Solutions to the Navier-Stokes Equations in the Rotational Framework. *Journal of Evolution Equations*, **12**, 985-1000. https://doi.org/10.1007/s00028-012-0165-z

[5] Sun, X.C. and Ding, Y. (2020) Dispersive Effect of the Coriolis Force and the Local Well Posedness for the Navier-Stokes-Coriolis System. *Journal of Evolution Equations*, **20**, 335-354. https://doi.org/10.1007/s00028-019-00531-7

[6] Kishimoto, N. and Yoneda, T. (2018) Global Solvability of the Rotating Navier-Stokes Equations with Fractional Laplacian in a Periodic Domain. *Mathematische Annalen*, **372**, 743-779. https://doi.org/10.1007/s00208-017-1605-4

[7] Wang, W.H. and Wu, G. (2018) Global Mild Solution of Stochastic Generalized Navier-Stokes Equations with Coriolis Force. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **34**, 1635-1647. https://doi.org/10.1007/s10114-018-7482-2

[8] Kozono, H. and Nakao, M. (1996) Periodic Solutions of Navier-Stokes Equations in Unbounded Domains. *Tohoku Mathematical*, **48**, 33-50. https://doi.org/10.2748/tmj/1178225411

[9] Sun, X.C. and Liu, J. (2021) Global Well-Posedness for the Fractional Navier-Stokes-Coriolis Equations in Function Spaces Characterized by Semigroups. Preprint. https://doi.org/10.20944/preprints202111.0408.v1

[10] Miao, C.X., Yuan, B.Q. and Zhang, B. (2008) Well-Posedness of the Cauchy Problem for the Fractional Power Dissipative Equations. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **68**, 461-484. https://doi.org/10.1016/j.na.2006.11.011

[11] Kozono, H., Ogawa, T. and Taniuchi, Y. (2003) Navier-Stokes Equations in the Besov Space near L^∞ and BMO. *Kyushu Journal of Mathematics*, **57**, 303-324. https://doi.org/10.2206/kyushujm.57.303

[12] Sun, X.C. and Ding, Y. (2015) Strichartz Estimates for Parabolic Equations with Higher Order Differential Operator. *Science China Mathematics*, **58**, 1047-1062. https://doi.org/10.1007/s11425-014-4869-0

[13] Bahouri, H., Chemin, J.Y. and Danchin, R. (2011) Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations. *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-3-642-16830-7