Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(1), 42-47
Published Online January 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.111007

Hans汉斯

一类复偏微分方程边值问题的积分解

王大江[1]**，龙　仑**[2]**，屈非非**[1]**，刘　华**[1]

[1]天津职业技术师范大学理学院，天津
[2]许市中心学校，湖南　岳阳

收稿日期：2021年12月11日；录用日期：2022年1月1日；发布日期：2022年1月11日

摘　要

本文研究了周期平面上一类复偏微分方程边值问题，我们首先给出了周期平面上的Cauchy-Pompeiu公式。然后用这个公式给出原问题解的积分表示。

关键词

周期平面，边值问题，Cauchy-Pompeiu公式，Riemann问题

Product Decomposition of Boundary Value Problems for a Class of Complex Partial Differential Equations

Dajiang Wang[1]**, Lun Long**[2]**, Feifei Qu**[1]**, Hua Liu**[1]

[1]School of Science, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin
[2]XuShi Middle School, Yueyang Hunan

Received: Dec. 11th, 2021; accepted: Jan. 1st, 2022; published: Jan. 11th, 2022

Abstract

In this paper, a class of boundary value problems for complex partial differential equations on periodic planes is studied. We first give the Cauchy-Pompeiu formula on the periodic plane. This formula is then used to give the integral representation of the original solution.

Keywords

Periodic Plane, Boundary Value Problem, Cauchy-Pompeiu Formula, Riemann Problems

文章引用: 王大江, 龙仑, 屈非非, 刘华. 一类复偏微分方程边值问题的积分解[J]. 应用数学进展, 2022, 11(1): 42-47.
DOI: 10.12677/aam.2022.111007

1. 引言

平面上的复微分方程是一个有丰富内容的领域[1]。复微分方程的积分表示理论最早起源于 Poincare 和 Pompeiu 的工作，N. I. Muskhelishvili 和 I. N. Vekua 建立了系统研究理论并用于研究平面弹性力学[2]。尤其是 I. N. Vekua，在其著作[3]中，创造性地用古典函数论的工具处理了现代偏微分方程理论中的一些研究内容。H. Begehr、闻国椿和李明忠等针对具体的平面区域构造了大量相关复微分方程各类边值问题解的积分表示[4] [5] [6]。

近年来，平面弹塑性材料精细构造的研究涉及周期平面上的复微分方程的边值问题。其中一类相关的对象是周期基本域 $P=\{z:z\in\mathbb{C},0<\operatorname{Re}z\le 2\pi\}$。本文讨论 P 上的 Cauchy 问题。

2. 几个定理

先定义一类函数。如果对周期平面 P 中的任意两个点 z_1,z_2，若函数 w 满足条件

$$\left|w(z_1)-w(z_2)\right|<A\left|\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_2}\right|^{\alpha},$$

其中 $0<\alpha\le 1$，A,α 为任意常数，则称 $w(z)\in\hat{H}^{\alpha}(P)$。显然 $\hat{H}^{\alpha}(P)=\hat{H}^{\alpha}(\bar{P})$。

本文中，如果 $w(z)\in\hat{H}^{\alpha}(P)$，我们记 $w(t)$ 为 w 在 ∂P 上的限制。

定理 1 (Gauss 定理)设 Ω 为 P 中有界域(不一定单连通)且 $\bar{\Omega}\subset P$，则有下面的公式成立：

$$\frac{1}{2i}\int_{\partial\Omega}w(\zeta)\cot\mathrm{d}\zeta=\int_{\Omega}\bar{\partial}w_{\bar{\zeta}}(\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,\quad z\in\mathbb{C}\setminus\partial P \tag{1}$$

$$-\frac{1}{2i}\int_{\partial\Omega}w(\zeta)\mathrm{d}\bar{\zeta}=\int_{\Omega}w_{\zeta}(\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,\quad z\in\mathbb{C}\setminus\partial P \tag{2}$$

其中 $w_{\bar{\zeta}}=\dfrac{\partial w}{\partial\bar{\zeta}}$，$w_{\zeta}=\dfrac{\partial w}{\partial\zeta}$。

我们还需要 P 上的 Pompeiu 公式。

定理 2 (Cauchy-Pompeiu 公式)设 $w(z)\in\hat{H}^{\alpha}(P)$，$\partial_{\bar{z}}w(z)\in L(P)$。则有下面的公式成立：

$$w(z)=\frac{1}{4\pi i}\int_{\partial P}w(\zeta)\cot\frac{\zeta-z}{2}\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{2\pi}\int_{P}w_{\bar{\zeta}}(\zeta)\cot\frac{\zeta-z}{2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta+w(\infty),\quad z\in\mathbb{C}\setminus\partial P \tag{3}$$

$$w(z)=-\frac{1}{4\pi i}\int_{\partial P}w(\zeta)\cot\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{2}\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{2\pi}\int_{P}w_{\zeta}(\zeta)\cot\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta+w(\infty),\quad z\in\mathbb{C}\setminus\partial P \tag{4}$$

其中

$$\int_{\partial P}w(\zeta)\cot\frac{\zeta-z}{2}\mathrm{d}\zeta=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}w(\zeta)\cot\frac{\zeta-z}{2}\mathrm{d}\zeta,$$

$$\int_{\partial P}w(\zeta)\cot\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{2}\mathrm{d}\zeta=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}w(\zeta)\cot\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{2}\mathrm{d}\zeta.$$

我们只需考虑(3)式，(4)式的证明类似，略。

证明：设 $z\in P$，取 $r>0$ 为足够小，$R>0$ 足够大，使得

$$\overline{D(r,z)}=\{\zeta\in P,|\zeta-z|<r\}\subset P_R=\{\zeta\in P,|\mathrm{Im}\,\zeta|<R\}$$

记 $P_{R,r}=P_R\setminus\overline{D(r,z)}$，由 Gauss-Green 公式，得

$$\frac{1}{2i}\int_{\partial P_{R,r}}w(\zeta)\cot\frac{\zeta-z}{2}\mathrm{d}\zeta=\iint_{P_{R,r}}\partial_{\bar{\zeta}}\left(w(\zeta)\cot\frac{\zeta-z}{2}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\iint_{P_{R,r}}\partial_{\bar{\zeta}}\left(w(\zeta)\right)\cot\frac{\zeta-z}{2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

注意到 $w(z)$ 为周期函数，上式可重写为

$$\begin{aligned}&I_R+\int_0^{2\pi}w(x-Ri)\cot\frac{x-Ri-z}{2}\mathrm{d}x-\int_0^{2\pi}w(x+Ri)\cot\frac{x+Ri-z}{2}\mathrm{d}x\\&-\int_{\partial D(r,z)}w(\zeta)\cot\frac{\zeta-z}{2}\mathrm{d}\zeta=2i\int_{P_{R,r}}\partial_{\bar{\zeta}}w(\zeta)\cot\frac{\zeta-z}{2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.\end{aligned}$$

其中

$$I_R=i\int_R^{-R}w(i\sigma)\cot\frac{i\sigma-z}{2}\mathrm{d}\sigma+i\int_{-R}^{R}w(i\sigma+2\pi)\cot\frac{2\pi+i\sigma-z}{2}\mathrm{d}\sigma.$$

由 $w(z)\in\hat{H}(P)$ 知

$$\lim_{z\to+i\infty}w(z)=\lim_{z\to-i\infty}w(z)=w(\infty). \tag{I}$$

故

$$\begin{aligned}&\lim_{R\to\infty}\left(\int_0^{2\pi}w(x-Ri)\cot\frac{x-Ri-z}{2}\mathrm{d}x-\int_0^{2\pi}w(x+Ri)\cot\frac{x+Ri-z}{2}\mathrm{d}x\right)\\&=i\int_0^{2\pi}w(-\infty)\mathrm{d}x+i\int_0^{2\pi}w(+\infty)\mathrm{d}x=4\pi iw(\infty).\end{aligned} \tag{II}$$

设 $\zeta=re^{i\theta}+z$，则

$$\int_{\partial D(r,z)}w(\zeta)\cot\frac{\zeta-z}{2}\mathrm{d}\zeta=i\int_0^{2\pi}w\left(z+re^{i\theta}\right)\cot\frac{re^{i\theta}}{2}re^{i\theta}\mathrm{d}\theta.$$

由 $\cot\frac{re^{i\theta}}{2}\cdot re^{i\theta}=re^{i\theta}\frac{\cos\left(\frac{r}{2}e^{i\theta}\right)}{\sin\left(\frac{r}{2}e^{i\theta}\right)}$，关于 θ 一致收敛于 2 得

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\partial D(r,z)}w(\zeta)\cot\frac{\zeta-z}{2}\mathrm{d}\zeta=4\pi iw(z) \tag{III}$$

又显然

$$\lim_{R\to\infty}I_R=\int_{\partial P}w(t)\cot\frac{t-z}{2}\mathrm{d}t \tag{IV}$$

现在(I)两端对 $R\to\infty$，$r\to\infty$ 取极限，由(II) (III) (IV)得

$$4\pi iw(\infty)+\int_{\partial P}w(t)\cot\frac{t-z}{2}\mathrm{d}t-4\pi iw(z)=2\pi\iint_P\partial_{\bar{\zeta}}(\zeta)\cot\frac{\zeta-z}{2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

得证。

如果 $w(z)$ 还为 $\mathbb{C}$ 上的周期函数，显然 $\int_{\partial P}w(t)\cot\frac{t-z}{2}\mathrm{d}t=0$。即我们有如下推论：

推论 1：设 $w(z)$ 为满足定理 2 中条件且以 2π 为周期的函数，则

$$w(z)=-\frac{1}{2\pi}\int_P w_{\bar{\zeta}}(\zeta)\cot\frac{\zeta-z}{2}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta. \tag{5}$$

推论 2：设 $w(z)$ 为 P 上满足定理条件且为周期函数，则 $w(z)$ 为常值函数。

证明：由定理 2，结论显然。

3. *P* 上的 Riemann 边值问题

考虑 P 上如下的 Cauchy 问题：

$$\begin{cases}\bar{\partial}u(z)=w(z),\ \ z\in P;\\ u(2\pi+iy)-u(iy)=h(y),\ \ y\in\mathbb{R}.\end{cases} \tag{6}$$

其中 $h\in\tilde{H}(\mathbb{R})$，$w\in L^1_{P_v}(P)$。这里，$P_v$ 表示极限 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{P_R} w\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta$ 存在，我们要求 $u\in\hat{H}(P)$[1]。

通过以下三个步骤来求解(6)

1) 首先找到 P 内解析，且 $\bar{P}$ 内 Hölder 连续的函数 v，使得 $v(2\pi+iy)-v(iy)=h(y)$。

2) 设 $f=u-v$，则(8)式等价于

$$\begin{cases}\bar{\partial}u(z)=w(z),\ \ z\in P;\\ f(2\pi+iy)=f(iy),\ \ y\in\mathbb{R}.\end{cases} \tag{7}$$

由定理 2 的推论 1，有

$$\bar{\partial}\left(-\frac{1}{2\pi}\int_P w(\zeta)\cot\frac{\zeta-z}{2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right)=w. \tag{8}$$

即 $f_0=-\frac{1}{2\pi}\int_P w(\zeta)\cot\frac{\zeta-z}{2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$ 是(7)的一个特解。

则(6)通解为

$$f_0+v \tag{9}$$

3) 求(7)式的解。

作变换 $w=\mathrm{e}^{iz}$，即 $z=-i\log w$，该变化将 P 内部区域，即 $\{z:z\in C,0<\operatorname{Re}z<2\pi\}$ 转化为 $C\setminus[0,\infty)$ 上的区域。

设 $g(w)=v(-i\log w)$，求 $g(w)$ 满足在 $C\setminus[0,\infty)$ 上解析，且为方程 $g^+(x)-g^-(x)=h(-i\log x)$ 的解，其中 $g^+(x)$，$g^-(x)$ 分别为 $g(x)$ 在上半平面和下半平面上的点趋于 x 轴的极限.为了更好的求解，将 $h(-i\log x)$ 延拓到整个实轴，设

$$\tilde{h}(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ h(-i\log x), & x>0.\end{cases} \tag{10}$$

则第(3)步转化为满足 $g^+(x)-g^-(x)=\tilde{h}(x)$，即问题转化为实轴上的 Riemann 问题，下面简称为 R 问题。记整个 x 轴为 X，则上面的问题转化为求解下面的 R 问题。

[1]注：设(6)有两个解分别为 u_1,u_2，则 u_1-u_2 满足：

$$\begin{cases}\bar{\partial}(u_1(z)-u_2(z))=0,z\in P\\ u_1(2\pi+iy)-u_2(2\pi+iy)=u_1(iy)-u_2(iy),y\in\mathbb{R}\end{cases}$$

即 u_1-u_2 为周期解析函数。故由推论 u_1-u_2 为常值函数。

由上面分析可知，求满足 X 上的任意分区全纯函数 $g(x)$，满足下面的边值条件：

$$\begin{cases} g^+(x)-g^-(x)=\tilde{h}(x), & x\in(0,+\infty), \\ G.P\left[z^{-(m+1)}g,\infty\right]=0. \end{cases} \tag{11}$$

其中 $\tilde{h}(x)\in H^*(0)\cap H_c(0,+\infty)\cap\hat{H}_{m_0,0}(+\infty)$ [7]。

关于 X 的 R 问题，设是在 R_m 中求解此问题，其中 R_m 中的 m 表示 $g(x)$ 在 ∞ 处至多为 m 阶的，$m=0$ 时指 $g(\infty)$ 有限。

由 Plemelj 公式，有

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\tilde{h}(t)}{t-z}\mathrm{d}t,\ \ z\Subset X \tag{12}$$

条件满足(11)的：

$$\Psi^+(x)-\Psi^-(x)=\tilde{h}(x),\quad x\in X \tag{13}$$

由 $g^+(x)-g^-(x)=\tilde{h}(x)$ 和 $\Psi^+(x)-\Psi^-(x)=\tilde{h}(x)$ 有：

$$\Psi^+(x)-g^+(x)=\Psi^-(x)-g^-(x).$$

即 $F(z)=g(z)-\Psi(z)$ 在 S^+， S^- 内全纯，且在 X 的两侧有相同的边值。根据解析延拓的定理， $F(z)$ 必在全平面内全纯。

当 $m\geq 0$。由于 $\Psi(\infty)=0$，则 $F(z)$ 在 $z=\infty$ 处应与 $g(z)$ 一样至多有 m 阶极点。根据推广的 Liouville 定理，知 $F(z)$ 必为一至多 m 次的多项式。所以问题 $g^+(x)-g^-(x)=\tilde{h}(x)$ 的 R_m 中的一般解是：

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty}\frac{\tilde{h}(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau+P_m(z),\quad z\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty) \tag{14}$$

其中 $P_m(z)$ 是次数不超过 m 的任意多项式。

当 $m=-1$ 时。即要求 $g(\infty)=0$，则问题在 R_{-1} 中求解，此时问题有唯一解：

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty}\frac{\tilde{h}(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau,\quad z\in\mathbb{C}\setminus[0,+\infty) \tag{16}$$

当 $m<-1$ 时。当且仅当如下可解条件：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty}g(\tau)\tau^k\mathrm{d}\tau=0,\quad k=0,1,\cdots,-m-2 \tag{17}$$

成立， R_m 问题有由(16)给出的唯一解 $g(z)$。

4. 边值问题的解

设 P 上的分区全纯函数 $v(z)$ 满足： $v(z)=g\left(\mathrm{e}^{-\frac{z}{i}}\right)$，则 $v(z)$ 满足边值问题

$$\begin{cases} \partial_{\bar{z}}v(z)=0 \\ v(2\pi+iy)-v(iy)=h(y),\quad y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

现在由(9)得

$$u(z)=f_0+v=-\frac{1}{2\pi}\int_P w(\zeta)\cot\frac{\zeta-z}{2}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta+\frac{1}{2\pi}\int_{\partial P}\mathrm{e}^{i\tau}\frac{h(\tau)}{\mathrm{e}^{i\tau}-z}\mathrm{d}\tau+P_m(z),\quad \tau\notin P \tag{17}$$

是(8)的一个解。

由前面注，我们得到最后的定理：

定理3：设 $h(y)\in\hat{H}(\mathbb{R})$， $w\in L_{pv}^{1}(P)$，则边值问题

$$\begin{cases}\partial_{\bar{z}}u(z)=w(z),\ z\in P;\\ u(2\pi+iy)-u(iy)=h(y),\ y\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

在 $\hat{H}(P)\cap L_{pv}^{1}(P)$ 中有通解

$$u(z)=f_0+v+c=-\frac{1}{2\pi}\int_P w(\zeta)\cot\frac{\zeta-z}{2}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta+\frac{1}{2\pi}\int_{\partial P}\mathrm{e}^{i\tau}\frac{h(\tau)}{\mathrm{e}^{i\tau}-z}\mathrm{d}\tau+P_m(z)+c,\quad \tau\notin P.$$

致　谢

感谢在论文撰写期间对我提供指导和帮助的老师，感谢各位审稿专家的辛勤工作和指导。

基金项目

国家自然科学基金(12101453)。

参考文献

[1] 王亚光. 偏微分方程——经典数学与现代数学的相互交融[J]. 世界科学, 2001(7): 24-25.

[2] Muskhelishuili, N.I. (1958) Singular Iniegral Equations. Wolters-Noordhoff, Groningen.

[3] 维库阿, И.Н. 广义解析函数[M]. 中国科学院教学研究所偏微分方程组, 北京大学数学力学系函数论教研组, 译, 北京: 人民教育出版社, 1960.

[4] Begehr, H. (1994) Complex Analytic Methods for Partial Differential Equations. World Scientific, Singapore. https://doi.org/10.1142/2162

[5] Begehr, H. (2005) Boundary Value Problems in Complex Analysis. *Boletín De La Asociación Matemática Venezolana*, **12**, 65-86.

[6] Begehr, H. (2007) Basic Boundary Value Problems in Complex Analysis. *Journal of Applied Functional Analysis*, **2**, 57-71.

[7] 王莹, 段萍, 杜金元. 正实轴上的 Riemann 边值问题[J]. 中国科学: 数学, 2017, 47(8): 887-918.