

黄金和比特币投资组合的最佳规划

陈心雨¹, 王 泓^{2*}

¹曲阜师范大学统计与数据科学学院, 山东 曲阜

²曲阜师范大学数学科学学院, 山东 曲阜

收稿日期: 2022年3月26日; 录用日期: 2022年4月21日; 发布日期: 2022年4月28日

摘要

近年来, 黄金和比特币充斥于市场交易, 期望实现资产增值。因此, 我们计划设计一种交易策略, 保证投资风险尽可能小, 并评估五年后1000美元的价值。首先对数据进行预处理, 由于黄金波动较小而比特币波动较大, 所以黄金利用前三十天的价格, 比特币利用前二十天的价格, 代入GM(1,1)模型, 分别预测出黄金和比特币后一天的价格。其次, 定义涨跌幅来显示未来一天内涨或跌的幅度与可能性。利用涨跌幅的绝对值与其中位数的绝对值作比较, 来决定售出和买入操作。并建立动态规划模型来避免风险, 利用蒙特卡洛模拟算法, 确定交易时间和交易金额。为证明上述策略为最佳。通过查阅文献固定投资占比, 重新计算, 得到五年后总价值。通过比较两者的大小, 确定策略是最优。改变佣金组合进行灵敏度分析, 再次计算, 得出每个阶段资金的变化规律以及最后总价值, 比较相对增长率来判断敏感性的强弱。

关键词

灰色预测模型, 风险评估模型, 蒙特卡洛算法

Best Plans for Gold and Bitcoin Portfolios

Xinyu Chen¹, Hong Wang^{2*}

¹School of Statistics and Data Science, Qufu Normal University, Qufu Shandong

²School of Mathematical Sciences, Qufu Normal University, Qufu Shandong

Received: Mar. 26th, 2022; accepted: Apr. 21st, 2022; published: Apr. 28th, 2022

Abstract

In recent years, gold and bitcoin have flooded the market in hopes of increasing their value. So we

*通讯作者。

plan to design a trading strategy that keeps investment risk as low as possible and estimates the value of \$1000 five years from now. Firstly, the data are preprocessed. Since gold fluctuates less while bitcoin fluctuates more, gold takes advantage of the price of the first 30 days, while bitcoin takes advantage of the price of the first 20 days and replaces it with GM(1,1) model to predict the price of gold and bitcoin the next day respectively. Second, a rise or fall is defined to show how much or how likely it is to rise or fall in the next day. The absolute value of the rise or fall is compared to the absolute value of the median to determine the sell and buy operations. A dynamic programming model is established to avoid risks, and Monte Carlo Method is used to determine the transaction time and transaction amount. To prove that the above strategy is the best. By referring to the literature and recalculating the proportion of fixed investment, the total value after five years was obtained. By comparing the sizes of the two, the optimal strategy is determined to change the commission mix for sensitivity analysis, calculate again, get the change rule of funds at each stage and the final total value, compare the relative growth rate to judge the strength of sensitivity.

Keywords

Gray Forecast Model, Venture Capital Model, Monte Carlo Method

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

1.1. 背景

如今传统投资与替代资产组合成为一大热点, 黄金具有较稳定的投资价值, 其贵金属属性及稀缺性自古以来就被公认为是属于避险资产。2008年11月, 数字货币——比特币展现在大众面前, 并在2021年达到单枚6.9万美元。与黄金相比, 比特币收益率高、波动率大和免监管等性质。Katsiampa [1]和Chu等[2]通过使用GARCH模型探讨比特币的金融资产能力, 表明比特币是投资组合管理, 风险分析和市场情绪分析的有用工具。黄金市场和比特币市场风险的变化趋势大致相反, 为黄金和比特币组合使用进行套期保值提供了依据[3]。因此, 研究黄金和比特币的投资组合规划问题有利于实现总回报最大化。

1.2. 研究目的

本文在已知2016年9月11日~2021年9月10日期间每个交易日价格的条件下, 开发一个模型, 假设现在有1000美元, 只使用过去五年的每日价格流, 每天决定是否买入卖出及其规格, 计算五年后的总资产。并证明模型给出了现金、黄金和比特币的最优组合策略。最后确定策略对交易成本的敏感度, 以及交易成本如何影响战略和结果。其中在每个交易日, 投资组合包括现金、黄金和比特币[C, G, B]分别以美元、金衡盎司和比特币计价。

1.3. 工作概述

根据美国大学生数学建模组委会提供的资料, 我们充分了解过去五年黄金和比特币的真实价格。针对提出的问题, 我们主要做了以下工作:

- 1) 进行数据挖掘;
 - 2) 提出灰色预测、动态规划、风险投资等模型;
 - 3) 模型建立中采用蒙特卡罗法进行计算, 参数求解主要基于 Matlab 和 Excel;
 - 4) 验证最佳性和灵敏度;
- 最后进行总结, 实现黄金和比特币这一投资组合的利益最大化。
- 总体思路如图 1。

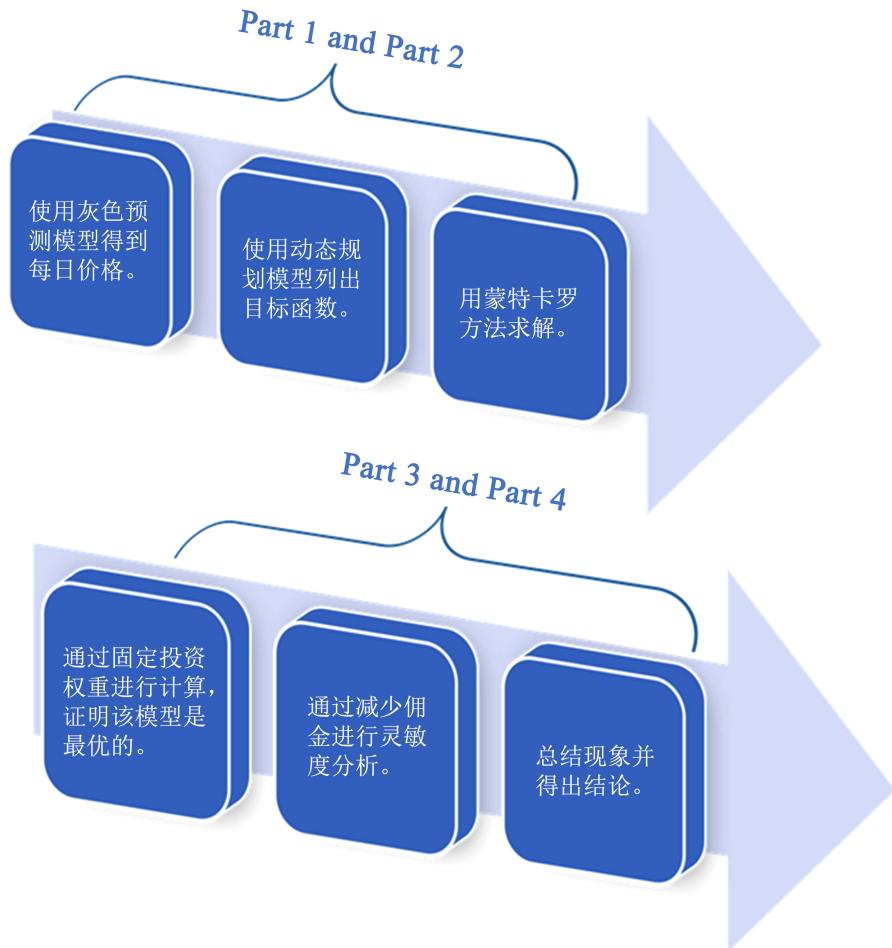


Figure 1. The flow chart of the total
图 1. 总流程图

2. 一般假设和变量描述

2.1 数据预处理

首先用 txt 文件打开题目中的数据, 了解 2016 年 9 月 11 日至 2021 年 9 月 10 号的比特币价格, 2016 年 9 月 12 号至 2021 年 9 月 10 号的黄金价格, 并发现比特币每天都在交易, 而黄金每交易五天休息两天, 且在部分交易日有价格缺失, 在后期设计交易策略时忽略价格缺失的情况。

在用灰色预测模型得出预测价格后, 我们使用 excel 分别计算了黄金和比特币的真实涨跌幅和预测涨跌幅以及其上涨和下跌的中位数。如表 1。

Table 1. Comparison chart of the median of the rise and fall
表 1. 涨跌幅中位数对比

黄金		比特币	
	真实涨跌幅中位数	预测涨跌幅中位数	真实涨跌幅中位数
上涨	0.4208%	0.4830%	1.5514%
下跌	-0.4369%	-0.8513%	-1.5231%

2.2. 假设

- 1) 黄金和比特币的价格在当天已知, 当天之后的价格是未知的;
- 2) 在观望期间不进行交易, 在没有具体价格的交易日也不进行交易;
- 3) 黄金和比特币在交易日期间同时买卖, 目前不考虑单独进行黄金或比特币交易;
- 4) 现金不会产生利润;
- 5) 数据均保留三位有效数字。

2.3. 符号

为方便求解问题, 给出以下符号假设, 如表 2。

Table 2. Variable description

表 2. 变量描述

符号	定义
C	现金
G	黄金
B	比特币
Q	投资价格
Q_1	当日黄金实际价格
Q_2	当日比特币实际价格
x_1	黄金投资比例
x_2	比特币投资比例
α_g	黄金的佣金是每笔交易价值的 $\alpha_g\%$
α_b	比特币的佣金是每笔交易价值的 $\alpha_b\%$
$Q_t^i (i=1,2)$	当日真实价格($i=1$ 为黄金, $i=2$ 为比特币)
$\hat{Q}_t^i (i=1,2)$	当日预测价格($i=1$ 为黄金, $i=2$ 为比特币)
$U_i (i=1,2)$	真实涨跌幅($i=1$ 为黄金, $i=2$ 为比特币)
$\hat{U}_i (i=1,2)$	预测涨跌幅($i=1$ 为黄金, $i=2$ 为比特币)

3. 灰色预测模型

3.1. 模型建立求解

灰色预测模型(GM)是一种基于不确定因素对系统的预测方法。通过识别系统因素发展趋势之间的差异程度, 对原始数据进行生成和处理, 找到系统变化规律, 生成具有强规律性的数据序列, 然后建立相应的微分方程模型, 从而预测发展趋势[4]。预测步骤如下:

- 1) 已知历史数据列: $X^{(0)} = (X^{(0)}(1), X^{(0)}(2), \dots, X^{(0)}(n))$, 通过累加生成新序列 $X^{(1)} = (X^{(1)}(1), X^{(1)}(2), \dots, X^{(1)}(n))$, 其中 $X^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k X^{(0)}(i)$, ($k = 1, 2, \dots, n$)。
- 2) 对 $X^{(1)}(k)$ 建立一阶线性微分方程, 即 GM(1,1)模型: $\frac{dx^{(1)}}{dt} + \alpha X^{(1)} = \mu$, 其中 α 称为发展灰数, μ 称为内生控制灰数。
- 3) 求解微分方程, 即可得到预测模型:

$$X^{(1)}(k+1) = \left(X^{(0)}(1) - \frac{\mu}{\alpha} \right) e^{-\alpha k} + \frac{\mu}{\alpha}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

- 4) 将 GM(1,1)模型所得数据 $\hat{X}^{(1)}(k+1)$ 经过累减还原为 $\hat{X}^{(0)}(k+1)$, 即 $X^{(0)}$ 的灰色预测模型为:

$$\hat{X}^{(1)}(k+1) = (e^{-\hat{\alpha}} - 1) \left(X^{(0)}(n) - \frac{\hat{\mu}}{\hat{\alpha}} \right) e^{-\hat{\alpha}k}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

灰色相关分析只需要少量数据即可建模, 且不需要服从某种分布。基于市场基本规律, 黄金波动较小, 所以采用中长线交易, 使用 MATLAB 不断调试代码及结果, 我们选择以 30 天为一周期进行预测, 即利用前 30 个交易日的已知价格去预测第 31 个交易日的价格, 并采用循环语句进行修正预测。比特币具有高收益率、高波动性等特点, 但是与黄金相比缺乏流动性, 比特币涨跌幅较大, 所以采用短线交易, 选择以 20 天为一周期进行预测, 原理同上。另考虑到有佣金存在, 所以不做超短线投资, 尽可能减少由频繁交易带来的佣金支付。

将零值数据删除后, 黄金和比特币的交易时间分别为 1265 天和 1826 天, 黄金和比特币的当前价格按日期排序。黄金交易日价格自上而下写为 $X_1, X_2, \dots, X_{1265}$, 比特币交易日价格自上而下写为 $Y_1, Y_2, \dots, Y_{1826}$ 。以下是预测黄金价格的步骤:

- 1) 在已知旧信息 $X_{30}, X_{29}, \dots, X_2, X_1$ 的基础上, 预测出 X_{31} ;
- 2) 利用 $X_{31}, X_{30}, X_{29}, \dots, X_3, X_2$ 预测出 X_{32} ;
- 3)
- 4) 利用 $X_{n-1+30}, X_{n-2+30}, \dots, X_{n-1}, X_n$ 预测出 X_{n+30} 。

由此我们预测出黄金从第 31 天到第 1265 天的交易价格。同样地, 我们也可以预测比特币从第 21 天到第 1826 天的交易价格。根据预测价格和真实价格可以计算真实涨跌幅 U_t 和预测涨跌幅 \hat{U}_t , 计算公式为:

$$U_t = \frac{Q_t - Q_{t-1}}{Q_{t-1}} \times 100\%,$$

$$\hat{U}_t = \frac{\hat{Q}_t - Q_{t-1}}{Q_{t-1}} \times 100\%.$$

计算结果见下表 3、表 4。

Table 3. Gold price related data
表 3. 黄金价格相关数据

交易日期	今日黄金 真实价格	明日黄金 预测价格	明日黄金 真实价格	黄金真实 涨跌幅	黄金预测 涨跌幅
2016/10/24	1265.55	1245.9128	1269.4	-0.0395%	-1.4842%
2016/10/25	1269.4	1245.0838	1270.5	0.3033%	-1.5761%
2016/10/26	1270.5	1243.95	1266.25	0.0866%	-1.9530%
2016/10/27	1266.25	1242.3539	1273	-0.3356%	-2.1343%
2016/10/28	1273	1242.473	1272	0.5302%	-1.9235%
.....
2021/9/6	1821.6	1798.5014	1802.15	-0.1153%	-1.6715%
2021/9/7	1802.15	1800.4312	1786	-1.0793%	-1.2843%
2021/9/8	1786	1799.8058	1788.25	-0.9043%	-0.0955%
2021/9/9	1788.25	1802.0913	1794.6	0.1258%	0.7671%
2021/9/10	1794.6	NaN	NaN	0.3538%	0.7681%

Table 4. Bitcoin price related data
表 4. 比特币价格相关数据

交易日期	今日比特币 真实价格	明日比特币 预测价格	明日比特币 真实价格	比特币真实 涨跌幅	比特币预测 涨跌幅
2016/10/24	651.39	652.0079	655.31	-0.2855%	-0.4909%
2016/10/25	655.31	654.6204	651.45	0.5982%	0.0948%
2016/10/26	651.45	656.2505	682.22	-0.5925%	-0.1053%
2016/10/27	682.22	663.6598	687.68	4.5103%	0.7315%
2016/10/28	687.68	671.1739	685.91	0.7940%	-2.7966%
.....
2021/9/6	51769.06	50079.2928	52677.4	3.5189%	-0.3825%
2021/9/7	52677.4	50486.5462	46809.17	1.7243%	-3.3742%
2021/9/8	46809.17	49720.1003	46078.38	-12.5365%	-4.3395%
2021/9/9	46078.38	49132.2262	46368.69	-1.5860%	5.8546%
2021/9/10	46368.69	NaN	NaN	0.6261%	6.2156%

3.2. 结果分析

利用 GM(1,1)模型, 基于 MATLAB 软件, 我们得到了除第一期外的每个交易日黄金和比特币的预测价格, 并与实际价格进行比较, 如图 2、图 3。

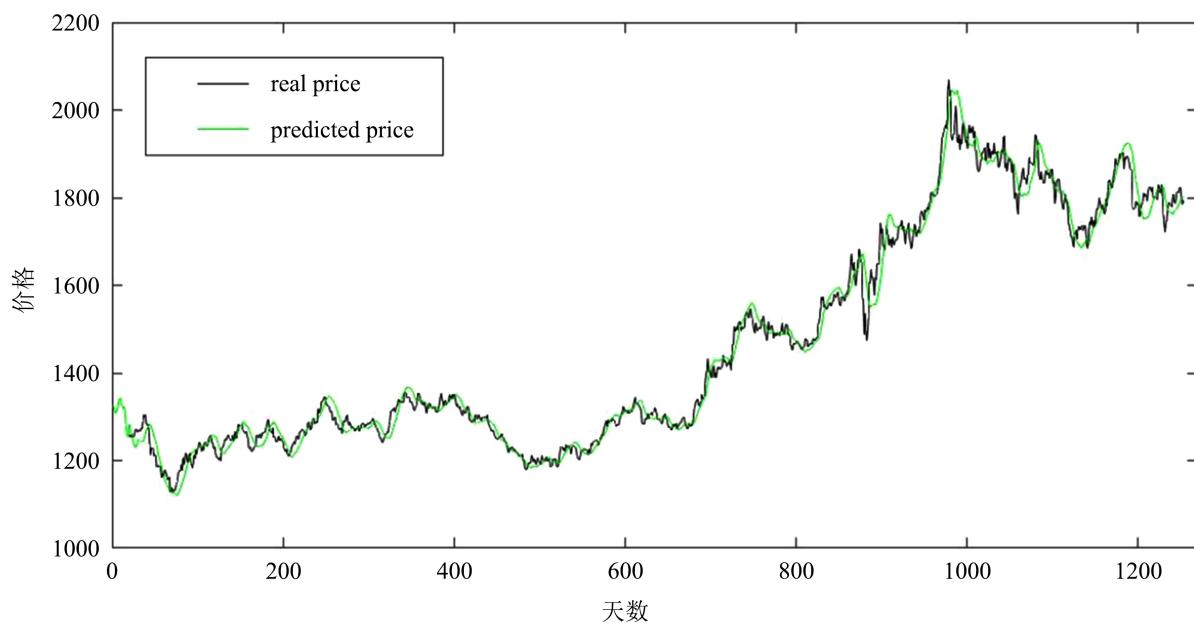


Figure 2. Comparison between predicted price and real price of gold
图 2. 黄金预测价格与实际价格的比较

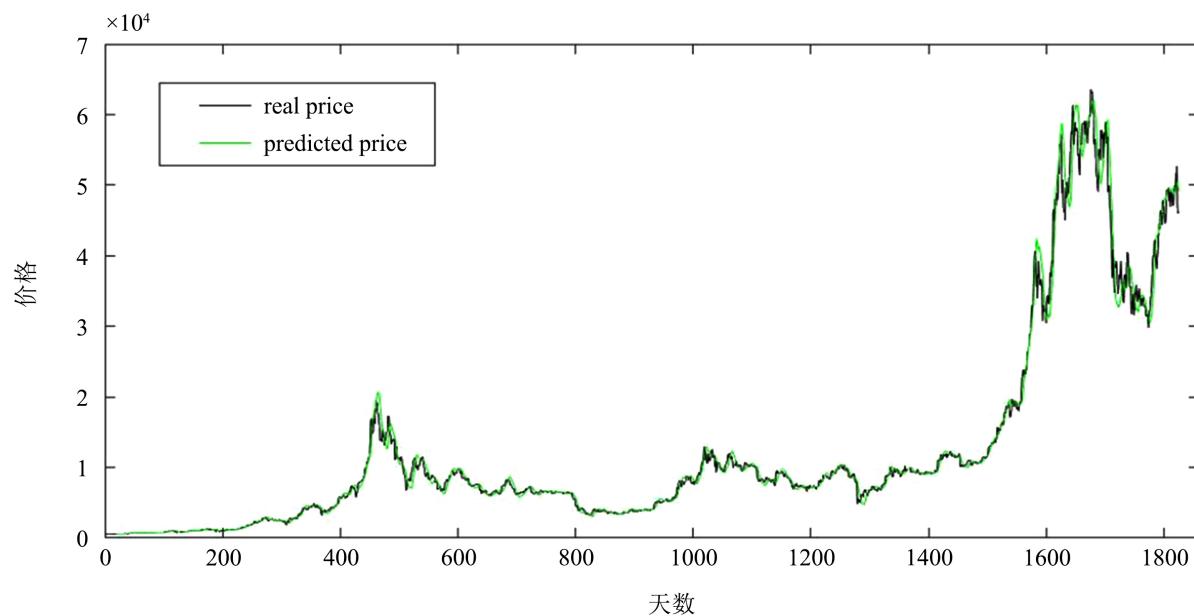


Figure 3. Comparison between predicted price and real price of bitcoin
图 3. 比特币预测价格与实际价格的比较

从图中可以看出, 2016 年 9 月 11 日至 2021 年 9 月 10 日的预测曲线与实际曲线拟合较好, 说明预测效果较好。记录每个交易日的预测价格, 为以下交易策略的制定奠定了数据基础。

4. 风险评估模型

本章的流程图如图 4 所示:

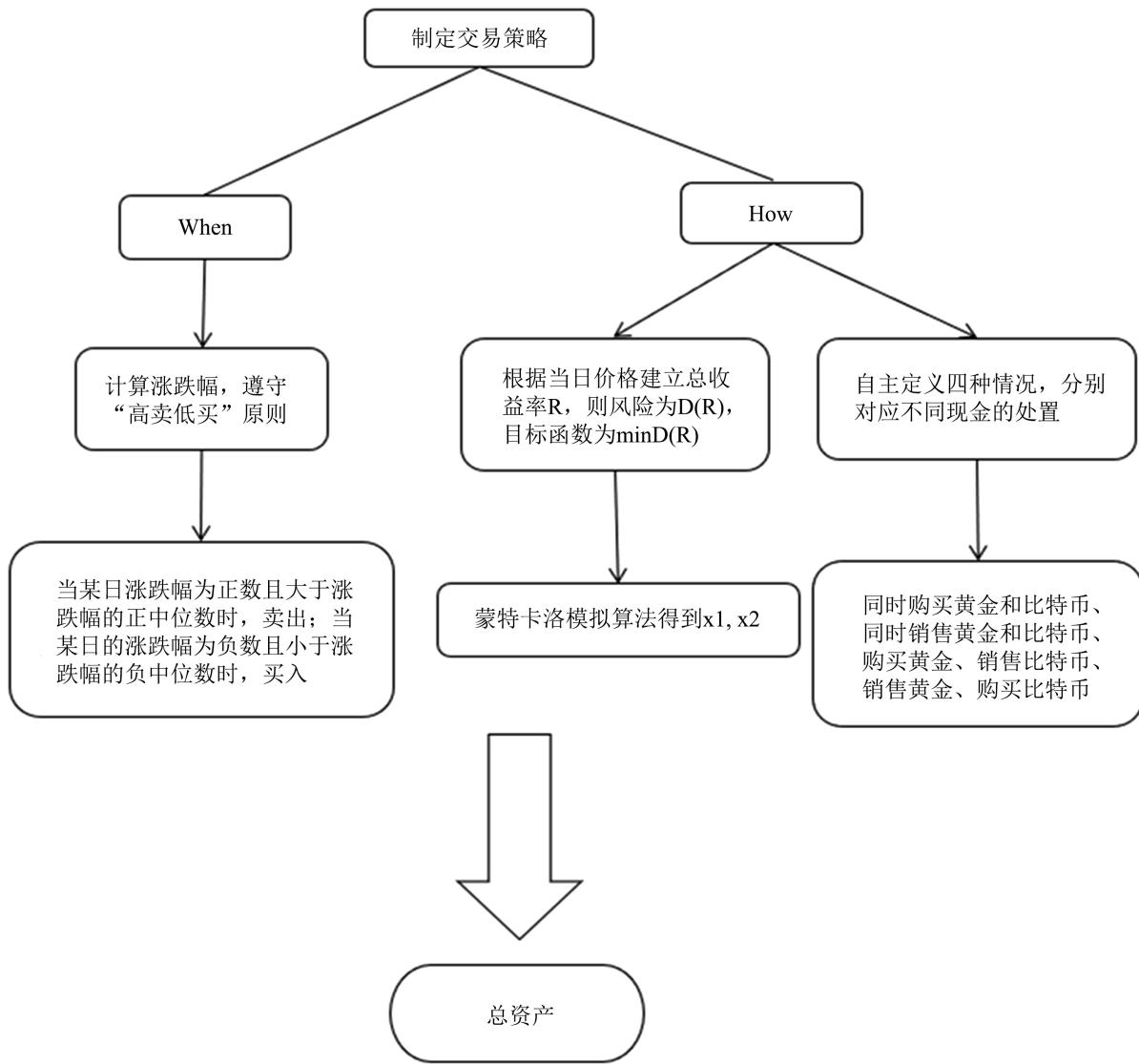


Figure 4. Flow chart of venture capital
图 4. 风险投资流程图

4.1. 风险投资模型

含有不确定预期结果的投资为风险投资, 其不确定性又带来了高风险性, 而丰厚的回报吸引着广大的投资者[5]。1952 年 Markowitz 给出了风险投资的一个基本模型。

下面用黄金和比特币的当日价格求出当日的收益率, 其收益率是随机变量, 设收益率分别为 R_1, R_2 , 均值分别为 ER_1, ER_2 。

设黄金昨日真实价格为 Q_{11} 和今日真实价格为 Q_{12} , 比特币昨日真实价格为 Q_{21} 和今日真实价格为 Q_{22} , 定义收益率 R_1, R_2 为:

$$\begin{cases} R_1 = \frac{Q_{11}}{Q_{12}} - 1, \\ R_2 = \frac{Q_{21}}{Q_{22}} - 1. \end{cases}$$

买卖黄金和比特币的风险可以用方差表示, 记为 DR_1, DR_2 。考虑二者之间的相关性, 得到总体投资风险 $COV(R_1, R_2)$ 当

- 1) $COV(R_1, R_2) = 0$, 则 R_1 与 R_2 不相关;
- 2) $COV(R_1, R_2) > 0$, 则 R_1 与 R_2 正相关, 一赚皆赚, 一赔俱赔;
- 3) $COV(R_1, R_2) < 0$, 则 R_1 与 R_2 负相关, 一赚一赔。

分别从数据中连续取 10 个黄金和比特币的今日价格作为观测值, 分别记为 $x_i, x_j (i, j = 1, 2, \dots, 10)$, 设样本容量为 n , 设 \bar{x}, \bar{y} 为平均值, 则:

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \\ \bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^n y_j}{n}. \end{cases}$$

故黄金和比特币的均值、方差、协方差为:

$$\begin{cases} ER_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \\ ER_2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j, \\ DR_1 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \\ DR_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2, \end{cases}$$

$$COV(R_1, R_2) = E[(R_1 - ER_1)(R_2 - ER_2)].$$

设 x_1, x_2 分别表示投资黄金和比特币的占比, 满足 $x_1, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1$, 则总投资收益率为:
 $R = x_1 R_1 + x_2 R_2$ 。

总期望收益率为:

$$ER = x_1 ER_1 + x_2 ER_2.$$

投资收益率的风险为:

$$\begin{aligned} D &= D(x_1 R_1 + x_2 R_2) \\ &= x_1^2 DR_1 + x_2^2 DR_2 + 2x_1 x_2 \operatorname{cov}(R_1, R_2). \end{aligned}$$

根据以上我们建立出风险评估模型, 目标函数为使投资收益率的风险最小, 约束条件为总期望收益率为大于 0。模型如下:

$$\begin{aligned} \min D &= x_1^2 DR_1 + x_2^2 DR_2 + 2x_1 x_2 \operatorname{cov}(R_1, R_2) \\ \text{s.t.} & \begin{cases} ER = x_1 ER_1 + x_2 ER_2 > 0, \\ x_1, x_2 \geq 0, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.1}$$

为了确定明日投资黄金和比特币的占比, 我们每次取当日及当日之前的前 10 个真实价格作为观测值, 通过上述步骤使投资收益率的风险最小来求出 x_1, x_2 , 为下文计算价值做准备。

4.2. 蒙特卡罗模拟算法

用蒙特卡罗模拟算法计算 x_1, x_2 , 根据式(4.1), 为了使目标函数最小, 我们选取足够多满足条件的 x_1, x_2 , 依次计算目标函数, 经过 MATLAB 的上万次计算可以得到使目标函数最小的 x_1, x_2 , 根据大概率事件可得这里的 x_1, x_2 即为所求的最优解。

4.3. 动态规划模型

将黄金和比特币的按日期合并在一个 excel 文档里, 只保留黄金和比特币可以同时交易的情形, 其余情形数据剔除掉。根据黄金和比特币的涨跌幅可以看出上涨趋势和下跌趋势, 为了确定什么时间购买或销售多少黄金和比特币, 我们分别计算黄金和比特币的所有涨跌幅大于 0 的数的中位数和所有小于 0 的数的中位数, 如表 5, 不考虑观望期的涨跌幅为空值的数据。

Table 5. Median
表 5. 中位数

	黄金	比特币
上涨	1.12%	3.85%
下跌	-1.00%	-3.68%

根据“高卖低买”的投资原理, 即当预测上涨趋势很大时通过销售来获取利润; 当预测下跌趋势很大时通过相对少的钱来购买。当黄金的明日预测涨跌幅 $\hat{U}_1 > 1.12\%$ 时, 说明预测的数据上涨的趋势明显, 需要进行销售黄金来减仓; 当黄金的明日预测涨跌幅 $\hat{U}_1 < -1.00\%$ 时, 说明预测的数据下跌的趋势明显, 需要进行购买黄金来加仓。同理, 当比特币的明日预测涨跌幅 $\hat{U}_2 > 3.85\%$ 时, 说明预测的数据上涨的趋势明显, 需要进行销售比特币来减仓; 当比特币的明日预测涨跌幅 $\hat{U}_2 < -3.68\%$ 时, 说明预测的数据下跌的趋势明显, 需要进行购买比特币来加仓。同时满足 $\hat{U}_1 > 1.12\%$ 或 $\hat{U}_1 < -1.00\%$ 和 $\hat{U}_2 > 3.85\%$ 或 $\hat{U}_2 < -3.68\%$ 的交易日记作有效交易日。即按照下述策略进行交易:

- 1) 当 $\hat{U}_1 > 1.12\%$ 时, 销售黄金;
- 2) 当 $\hat{U}_1 < -1.00\%$ 时, 购买黄金;
- 3) 当 $\hat{U}_2 > 3.85\%$ 时, 销售比特币;
- 4) 当 $\hat{U}_2 < -3.68\%$ 时, 购买比特币;
- 5) 若出现 $x_1 = 1, x_2 = 0$ 或 $x_1 = 0, x_2 = 1$ 时, 则只卖黄金或只卖比特币。

考虑到投资风险, 我们不进行频繁交易, 以月为周期在黄金和比特币都能交易的一天同时进行购买或销售[6], 为了降低风险, 不考虑只买卖黄金或比特币的情形。

以月为周期, 从 2016.11.9 到 2021.10.9 期间一共有 60 个月, 通过预测的涨跌幅来确定在每月的哪个交易日来买卖黄金和比特币, 为此需要考虑 60 个月在每个交易日的涨跌情况。

已知交易员的投资组合包括现金、黄金和比特币 $[C, G, B]$, 分别以美元、金、盎司和比特币计价, 最初的状态为 $[1000, 0, 0]$, 记为 $[C_0, G_0, B_0]$, 第 i 个月交易完成后状态变为 $[C_i, G_i, B_i]$ ($i = 1, 2, \dots, 60$)。每笔交易的佣金是交易金额的 $\alpha\%$ 假设 $\alpha_g = 1\%$, $\alpha_b = 2\%$ 。持有资产没有成本。

下面建立动态规划模型, 得到交易最优策略。

首先, 考虑到比特币适合中短期投资, 黄金适合中长期投资, 黄金比较稳定, 比特币风险高。故比特币按照买 - 卖 - 买 - 卖的方式来交易。观察一个月内黄金和比特币每个交易日的涨跌幅, 找到有效交

易日, 按照上述交易策略在这一天进行交易。若无有效交易日则不予考虑, 则这个月不进行交易, 继续进行下一个月的计算。

故会出现以下四种情况:

- 1) 同时购买黄金和比特币。此时从现金中拿出号 $\frac{1}{2} \times x_1 \times C$ 美元购买黄金, $\frac{1}{2} \times x_2 \times C$ 美元购买比特币;
- 2) 同时销售黄金和比特币。此时销售 $x_1 \times G$ 金衡盎司黄金, 销售 $x_2 \times B$ 比特币;
- 3) 购买黄金, 销售比特币。此时从现金中拿出 $x_1 \times C$ 美元购买金衡盎司黄金, 销售 $x_2 \times B$ 比特币;
- 4) 销售黄金, 购买比特币。此时销售 $x_2 \times B$ 金衡盎司黄金, 从现金中拿出 $x_2 \times C$ 美元购买比特币。

动态规划的目标函数是使 2021.10.9 的黄金、现金、比特币的总价值最大, 决策变量为 x_1, x_2 , 这里我们分部进行。根据式(4.1)不断的求出 x_1, x_2 , 然后按一定策略进行黄金和比特币的投资, 最后使总价值最大。

由于黄金和比特币的观望期分别为 20 天和 30 天, 因此采用灰色预测模型进行预测, 在此期间不进行交易。因此, 第一个月考虑从 2016 年 11 月开始。

第 1 个月, 考虑到投资的安全性, 把现金的一半进行交易, 即拿出 500 美元买黄金和比特币, 通过蒙特卡罗模拟计算出投资黄金和比特币的占比, 即按 $x_{11} = 1, x_{21} = 0$, 找到第一个有效交易日 2016.11.2, 可以得到明日黄金真实价格 Q_{11} 和比特币真实价格 Q_{12} , 此时需要购买黄金和比特币, 即:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} C_0 = 500, \\ G_1 = \frac{\frac{1}{2} x_{11} C_0 (1 - \alpha_g)}{Q_{11}} = 0.38, \\ B_1 = \frac{\frac{1}{2} x_{21} C_0 (1 - \alpha_b)}{Q_{12}} = 0. \end{cases}$$

此时现金、黄金和比特币状态为 $[500, 0.38, 0]$ 。

第 2 个月, 没有满足符合条件的交易日, 即不进行交易。此时现金、黄金和比特币状态为 $[500, 0.38, 0]$ 。

第 3 个月, 通过蒙特卡罗模拟计算出 $x_{13} = 0.9745, x_{23} = 0.025$, 找到第一个有效交易日 2017.1.4, 可以得到明日黄金真实价格 Q_{13} 和比特币真实价格 Q_{23} , 此时需要购买黄金和比特币, 即:

$$\begin{cases} C_3 = \frac{1}{2} C_2 = 250, \\ G_3 = G_2 + \frac{\frac{1}{2} x_{13} C_2 (1 - \alpha_g)}{Q_{13}} = 0.585, \\ B_3 = B_2 + \frac{\frac{1}{2} x_{23} C_2 (1 - \alpha_b)}{Q_{23}} = 0.006. \end{cases}$$

此时现金、黄金和比特币状态为 $[250, 0.585, 0.006]$ 。

第 4 个月, 没有效交易日, 即不进行交易。此时现金、黄金和比特币状态为 $[250, 0.585, 0.006]$ 。

第 5 个月, 通过蒙特卡罗模拟计算出 $x_{15} = 1, x_{25} = 0$, 找到有效交易日 2017.3.8, 可以得到明日黄金真实价格 Q_{15} 和比特币真实价格 Q_{25} , 此时需要卖出黄金, 即:

$$\begin{cases} C_5 = C_4 + x_{15}G_2(1 - \alpha_g)Q_{15} = 948.773, \\ G_5 = (1 - x_{15})G_4 = 0, \\ B_5 = B_4 = 0.006. \end{cases}$$

此时现金、黄金和比特币状态为[948.773, 0, 0.006]。

第6个月, 通过蒙特卡罗模拟计算出 $x_{16} = 0.993$, $x_{26} = 0.007$, 找到第一个符合条件的交易日 2017.4.4, 可以得到明日黄金真实价格 Q_{16} 和比特币真实价格 Q_{26} , 此时需要购买黄金和比特币, 即:

$$\begin{cases} C_6 = \frac{1}{2}C_5 = 474.387, \\ G_6 = G_5 + \frac{\frac{1}{2}x_{16}C_5(1 - \alpha_g)}{Q_{16}} = 0.374, \\ B_6 = B_5 + \frac{\frac{1}{2}x_{26}C_5(1 - \alpha_b)}{Q_{26}} = 0.009. \end{cases}$$

此时现金、黄金和比特币状态为[474.387, 0.374, 0.009]。

第7个月, 通过蒙特卡罗模拟计算出 $x_{17} = 0.885$, $x_{27} = 0.115$, 找到第一个符合条件的交易日 2017.5.17, 可以得到明日黄金真实价格 Q_{17} 和比特币真实价格 Q_{27} , 进行第五次交易, 此时需要购买黄金和卖出比特币, 即:

$$\begin{cases} C_7 = (1 - x_{17})C_6 + x_{27}B_6(1 - \alpha_b)Q_{27} = 57.063, \\ G_7 = G_6 + \frac{x_{17}C_6(1 - \alpha_g)}{Q_{17}} = 0.72, \\ B_7 = (1 - x_{27})B_6 = 0.008. \end{cases}$$

此时现金、黄金和比特币状态为[57.063, 0.72, 0.008]。

按此策略可以求出最后一个月在 2021.9.1 进行交易, 最后的状态为[113.308, 0.542, 0.055]。

具体每个交易日的交易黄金和比特币的占比 x_1, x_2 , 每个交易日的现金、黄金和比特币状态见表 6。

Table 6. Weight and cash, gold and Bitcoin status

表 6. 现金、黄金、比特币的具体交易情况

交易日	C	G	B	x_1	x_2
2016/11/2	500.000	0.380	0.000	1.000	0.000
2017/1/4	250.000	0.585	0.006	0.975	0.025
2017/3/8	948.773	0.000	0.006	1.000	0.000
2017/4/4	474.387	0.374	0.009	0.993	0.007
2017/5/17	57.063	0.720	0.008	0.885	0.115
2017/6/6	28.532	0.742	0.008	1.000	0.000
2017/8/2	1.420	0.764	0.008	0.952	0.048
2017/9/19	993.235	0.000	0.008	1.000	0.000

Continued

2017/10/4	994.460	0.000	0.039	0.964	0.036
2017/12/1	994.460	0.000	0.039	1.000	0.000
2018/1/9	994.460	0.000	0.039	1.000	0.000
2018/2/8	973.576	0.000	0.042	0.979	0.021
2018/3/27	10.749	0.718	0.041	0.989	0.011
2018/4/11	5.376	0.722	0.042	0.936	0.064
2018/5/1	904.432	0.043	0.039	0.940	0.060
2018/6/19	902.121	0.024	0.107	0.944	0.556
2018/9/6	87.229	0.752	0.107	0.910	0.090
2018/12/3	43.615	0.786	0.108	0.959	0.041
2019/2/27	1053.338	0.021	0.105	0.973	0.027
2019/5/9	526.669	0.369	0.117	0.860	0.140
2019/6/4	16.014	0.767	0.114	0.971	0.029
2019/7/9	65.084	0.049	0.119	0.936	0.064
2019/8/12	11.827	0.148	0.110	0.927	0.073
2019/9/5	187.364	0.132	0.112	0.890	0.110
2019/10/25	15.888	0.142	0.105	0.936	0.064
2019/12/3	7.944	0.147	0.106	0.960	0.040
2020/1/3	36.888	0.232	0.083	0.785	0.215
2020/3/6	18.444	0.241	0.084	0.845	0.155
2020/4/14	29.335	0.306	0.066	0.788	0.212
2020/5/1	528.090	0.005	0.067	0.982	0.018
2020/8/3	264.045	0.137	0.067	1.000	0.000
2020/9/15	132.203	0.190	0.069	0.801	0.199
2020/11/27	463.739	0.000	0.069	1.000	0.000
2020/12/17	231.870	0.122	0.069	1.000	0.000
2021/1/12	456.382	0.000	0.069	1.000	0.000
2021/2/4	409.375	0.000	0.070	0.897	0.103
2021/3/1	770.180	0.000	0.063	0.894	0.106
2021/4/1	385.090	0.199	0.064	0.910	0.090
2021/5/17	7.337	0.423	0.063	0.983	0.017
2021/6/3	694.551	0.028	0.064	0.932	0.067
2021/7/9	69.139	0.467	0.059	0.920	0.080
2021/8/10	509.909	0.080	0.062	0.828	0.172
2021/9/1	113.308	0.542	0.055	0.882	0.118

最后通过 $[113.308, 0.542, 0.055]$ 计算出总资产价值 Q , 即:

$$Q = C_{60} + G_{60} \times Q_{601} + B_{60} \times Q_{602} = 3636.259$$

其中 C_{60}, G_{60}, B_{60} 表示第 60 个月即最后一个月现金、黄金、比特币的持有量, Q_{601}, Q_{602} 表示交易当天的黄金、比特币的价格。所以在 2021 年 9 月 10 日最初的 1000 美元投资价值变为 3636.259 美元。

经计算, 共有 43 个月进行交易, 按黄金和比特币的投资占比及现金、黄金、比特币的持有量, 计算出当日交易的总资产价值, 如图 5 所示。

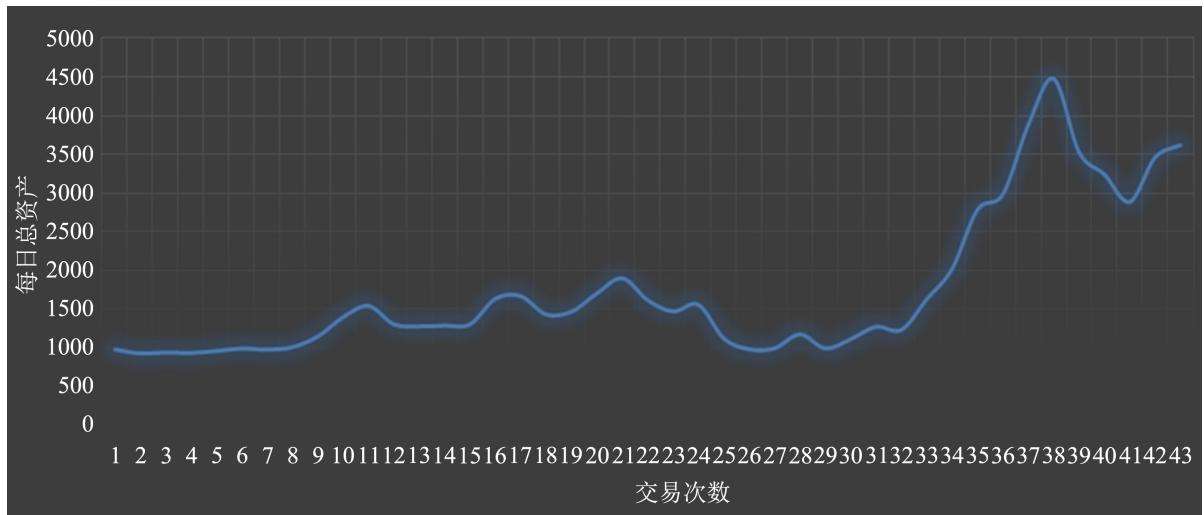


Figure 5. Changes in total assets

图 5. 总资产变化图

通过上图可以发现投资总资产有上下波动, 总体呈上升趋势, 与黄金、比特币的当日价格趋势吻合。根据投资策略, 可算出在 43 个有效交易日内黄金和比特币的购买量和销售量, 如图 6、图 7 所示。

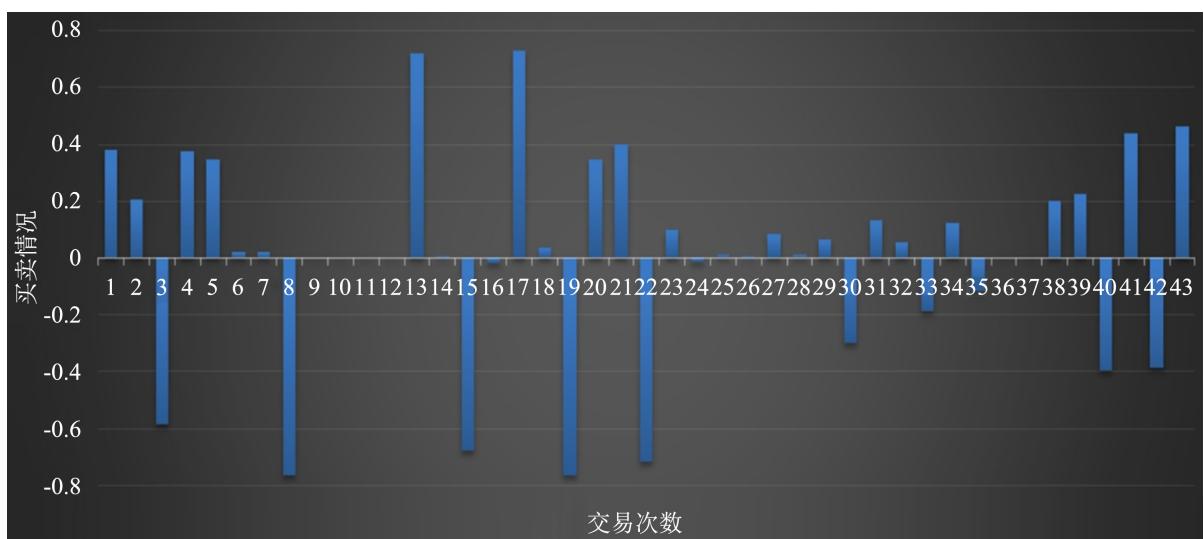
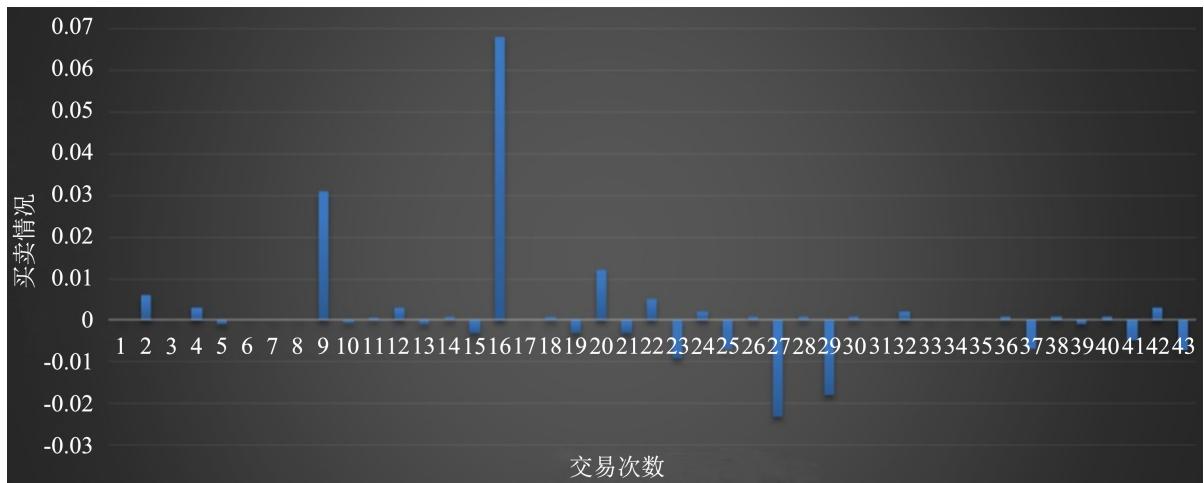


Figure 6. Gold trading day buy and sell chart

图 6. 黄金交易日买卖图

**Figure 7.** Bitcoin trading day buy and sell chart**图 7.** 比特币交易日买卖图

5. 证明最佳策略

在上述中算出五年后的总资产将为 3636.259 美元。使用趋势来分配购买权重至关重要。娄佳佳等[7]提出了比特币投资组合多样化的最优交易方法，并认为黄金和比特币的最优权重为 0.0458。作者计算的数据如图 8 所示。

	GOLD	CURR	EQUITY	BONDS	PROPERTY	ALTER	COMM
ω	0.0458	0.0029	0.0311	0.0022	0.0291	0.0036	0.0843
β	0.1468	0.0097	-0.0279	0.5664	-0.0473	-0.6626	-0.0265

数据来源：文献[7]，其中 w 为最优权重， b 为最佳对冲比率。

Figure 8. Optimal weights and best hedge ratios for Bitcoin in a portfolio**图 8.** 投资组合中比特币的最优权重和最佳对冲比率

因此，我们将黄金和比特币的投资比率固定为 0.0458，并重复第二部分的过程，如表 7 所示，计算得五年后总资产为 1431.161，低于 3636.259，因此相对来说我们的模型是最佳的。

Table 7. CGB status**表 7.** 固定交易权重后具体交易情况

交易日	C	G	B	x_1	x_2
2016/11/2	44.000	0.727	0.000	0.956	0.044
2017/1/4	22.000	0.745	0.001	0.956	0.044
.....
2018/1/9	924.117	0.000	0.015	0.956	0.044
2018/2/8	883.456	0.000	0.020	0.956	0.044
.....

Continued

2019/2/27	879.197	0.030	0.022	0.956	0.044
2019/5/9	439.599	0.353	0.025	0.956	0.044
.....
2021/8/10	211.747	0.006	0.026	0.956	0.044
2021/9/1	11.727	0.145	0.025	0.956	0.044

理论上, 在上述计算中, 我们运用了动态规划的思想, 遵循投资市场的规律, 以最小风险为主要目标, 因此结果应该是最优的。这也与本节中的证明相一致。

6. 灵敏度分析

按照题目, 目前黄金的佣金为 1%, 比特币的佣金为 2%。而由一般规律知, 佣金对每笔交易的获利产生影响, 从而影响五年后的总收益。佣金会随着市场、政策的变化相应变化[8], 并最终导致模型的最优解发生变化。因此, 有必要探索佣金变化对最终利益影响的大小, 这就需要对佣金进行灵敏度分析。如果改变了佣金大小后, 总收益的变化程度不大, 则说明我们的模型稳定性较强, 即灵敏性较差, 反之则说明灵敏性较好。

基于题目中的佣金组合(1%, 2%), 我们将其 0.5 倍作为新佣金组合, 即(0.5%, 1%)。重新运行程序, 得到总金额的对比图如图 9 所示。最终得到五年后总资产为 3659.594, 高于原佣金组合产生的收益, 这符合市场规律。总体来说, 总收益增长了 0.642%, 变化程度不大, 说明该模型相对来说是稳定的。

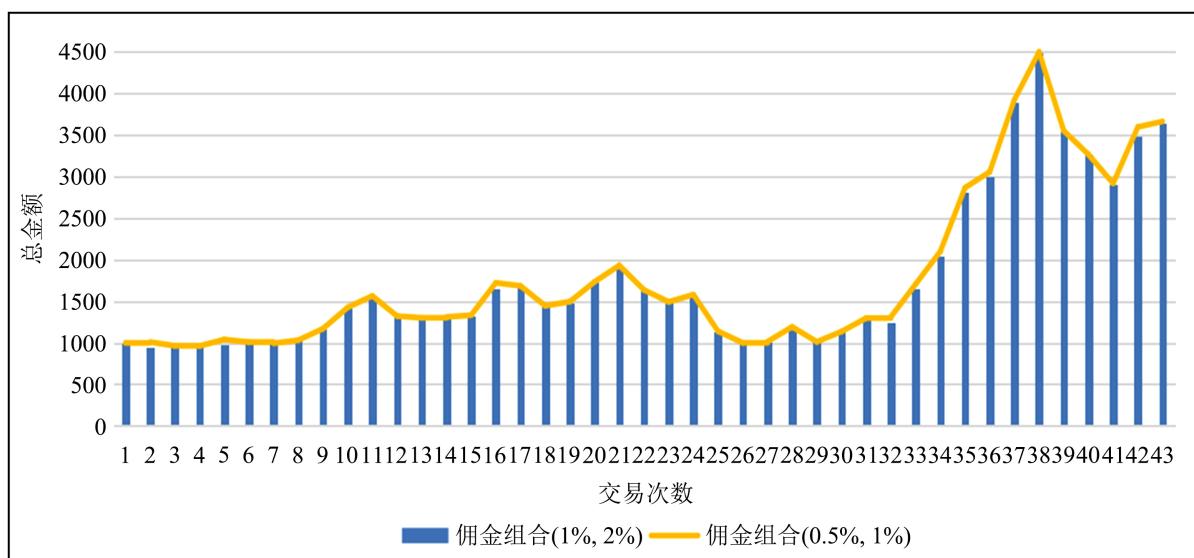
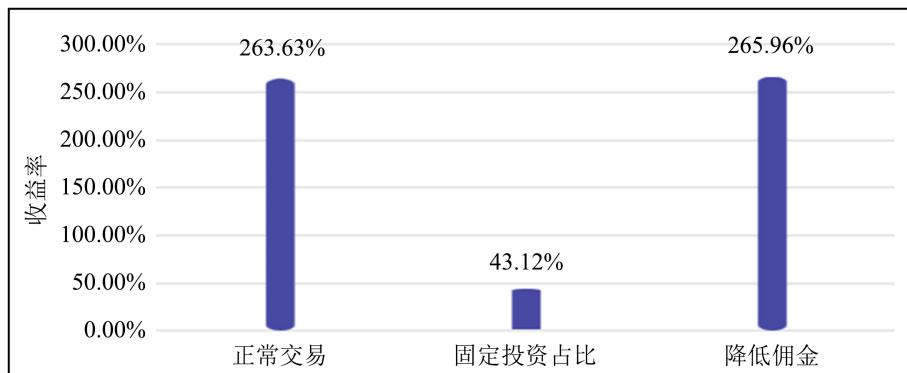


Figure 9. Comparison chart of change trend of total assets

图 9. 总资产变化趋势对比图

最后对比不同投资策略之间的投资收益率可以发现, 如图 10 所示, 降低佣金的投资策略产生的收益率最高, 而盲目固定投资占比的收益率最低。投资是实战大于理论的风险活动, 在进行市场交易时, 应结合实际, 而不是将研究理论生搬硬套。

**Figure 10.** A comparison of the returns of the three investment strategies**图 10. 三种投资策略的收益率对比图**

7. 结论

根据模型的实证结果, 可得结论: 其一, 使用灰色预测模型预测价格, 效果良好; 其二, 依据风险最小、收益最大的原则, 计算得每日的[C, G, B]以及投资占比, 得到五年后总资产为 3636.259 元。

在证明最佳策略时, 文献研究表明, 在某些情况下, 黄金和比特币的最佳权重为 0.0458, 因此选择固定投资占比, 即黄金的投资占比为 0.956, 比特币的投资占比为 0.044, 再次应用蒙特卡洛算法, 得总资产为 1431.161 元, 远远低于 3636.259 元, 则认为我们的模型相对来说达到了最优。

最后通过调整佣金的大小进行灵敏度分析, 选择佣金组合(0.5%, 1%)带入计算, 得总资产为 3659.594, 高于原佣金组合产生的收益, 符合佣金降低则收益上升的规律。但总收益的变化程度不大, 说明该模型相对来说是稳定的。

综上说明将传统资产与新生资产组合可以增加收益, 但其自身不确定性也带来了更大的风险。在实际投资过程中应保持谨慎客观的态度, 合理选择比特币在投资组合中的比重。

参考文献

- [1] Katsiampa, P. (2017) Volatility Estimation for Bitcoin: A Comparison of GARCH Models. *Economics Letters*, **158**, 3-6. <https://doi.org/10.1016/j.econlet.2017.06.023>
- [2] Chu, J., Chan, S., Nadarajah, S., et al. (2017) GARCH Modelling of Cryptocurrencies. *Journal of Risk and Financial Management*, **10**, 17-31. <https://doi.org/10.3390/jrfm10040017>
- [3] 叶五一, 孙丽萍, 缪柏其. 黄金和比特币的动态协整研究——基于半参数 MIDAS 分位点回归模型[J]. 系统科学与数学, 2020, 40(7): 1270-1285.
- [4] 马娟, 王露, 左黎明. 基于灰色系统和神经网络的创业板股票价格预测研究[J]. 当代金融研究, 2019(2): 87-97.
- [5] 刘凯. 风险投资决策分析模型[C]//中国数量经济学会. 中国数量经济学会第九届年会论文集: 2004 年卷. 2004: 319-326.
- [6] 敬沛. 基于经济周期的基金投资问题研究[D]: [硕士学位论文]. 长沙: 湖南大学, 2017.
- [7] 娄佳佳, 张玲. 比特币投资组合多样化的最优交易方式研究[J]. 经济视角, 2021, 40(4): 65-71.
- [8] 刘其佳, 肖羽. 线性规划问题中改变约束条件的灵敏度分析[J]. 产业与科技论坛, 2021, 20(19): 39-40.