Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2022, 11(4), 1764-1780**
Published Online April 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.114193

Hans汉斯

次临界情形下海森堡群上的有界区域上带权的非线性积分方程的正解的存在性

陈佳妮*

浙江师范大学数学与计算机科学学院，浙江 金华

收稿日期：2022年3月18日；录用日期：2022年4月12日；发布日期：2022年4月20日

摘 要

本文主要研究一类海森堡群$\mathbb{H}^n$上的有界区域上与精确的**Hardy-Littlewood-Sobolev**（下面简称**HLS**)不等式有关的带权的非线性积分方程：

$$f^{q-1}(\xi) = \int_{\Omega} \frac{G(\xi)f(\eta)G(\eta)}{|\eta^{-1}\xi|^{Q-\alpha}} d\eta + \lambda \int_{\Omega} \frac{f(\eta)}{|\eta^{-1}\xi|^{Q-\alpha-\beta}} d\eta, \quad \xi \in \bar{\Omega},$$

其中$q > 1$，$0 < \alpha < Q$，$0 < \beta < Q - \alpha$，$Q = 2n + 2$是$\mathbb{H}^n$的齐次维数，$\lambda \in \mathbb{R}$，$\Omega \subset \mathbb{H}^n$是一个光滑的有界域且$G(\xi)$是$\bar{\Omega}$中的非负连续函数。这里，我们将讨论次临界$\frac{2Q}{Q+\alpha} < q < 2$情形下该方程正解的存在性结果。

关键词

海森堡群，**Hardy－Littlewood－Sobolev**不等式，**Brezis-Nirenberg**型问题，积分方程，次临界情形，存在性

Existence of Positive Solutions to Nonlinear Integral Equations with Weights on the Bounded Domains of the Heisenberg Group in Subcritical Case

* Email: jnchen@zjnu.edu.cn

文章引用: 陈佳妮. 次临界情形下海森堡群上的有界区域上带权的非线性积分方程的正解的存在性[J]. 应用数学进展, 2022, 11(4): 1764-1780. DOI: 10.12677/aam.2022.114193

Jiani Chen*

College of Mathematics and Computer Sciences of Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Mar. 18^{th}, 2022; accepted: Apr. 12^{th}, 2022; published: Apr. 20^{th}, 2022

Abstract

This paper is devoted to a kind of nonlinear integral equations with weights related to the sharp Hardy-Littlewood-Sobolev (hereinafter referred to as HLS) inequality on the bounded domains of the Heisenberg group $\mathbb{H}^n$:

$$f^{q-1}(\xi) = \int_\Omega \frac{G(\xi)f(\eta)G(\eta)}{|\eta^{-1}\xi|^{Q-\alpha}}d\eta + \lambda \int_\Omega \frac{f(\eta)}{|\eta^{-1}\xi|^{Q-\alpha-\beta}}d\eta, \quad \xi \in \bar{\Omega},$$

where $q > 1$, $0 < \alpha < Q$, $0 < \beta < Q - \alpha$, $Q = 2n + 2$ is the homogeneous dimension of $\mathbb{H}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ is a smooth bounded domain and $G(\xi)$ is nonnegative continuous in $\bar{\Omega}$. In this paper, we will study the existence results of the positive solutions for the equation in subcritical case $\frac{2Q}{Q+\alpha} < q < 2$.

Keywords

Heisenberg Group, Hardy-Littlewood-Sobolev Inequality, Brezis-Nirenberg-Type Problem, Integral Equation, Subcritical Case, Existence

1. 引言

积分方程是近代数学的一个重要分支, 它始终与数学物理问题的研究紧密相关. 由于自然界中出现的大量问题是非线性的, 所以研究非线性积分方程的解成为众多学者越来越感兴趣的课题. 众所周知, 海森堡群$\mathbb{H}^n$在表示论、调和分析、多复变量、偏微分方程和量子力学等几个数学分支中发挥着重要的作用. 近十几年来, 海森堡群$\mathbb{H}^n$上非线性积分方程(组)的解的分析和研究一直受到不同

群体的重视, 比如 [1] [2]. 因此研究海森堡群$\mathbb{H}^n$上的有界域上非线性积分方程解的存在性是非常有意义的.

在本篇论文中, 我们主要考虑一类与精确的HLS不等式有关的非线性积分方程:

$$f^{q-1}(\xi)=\int_{\Omega}\frac{G(\xi)f(\eta)G(\eta)}{|\eta^{-1}\xi|^{Q-\alpha}}d\eta+\lambda\int_{\Omega}\frac{f(\eta)}{|\eta^{-1}\xi|^{Q-\alpha-\beta}}d\eta,\ \ \xi\in\bar{\Omega},\tag{1.1}$$

这里$q>1$, $0<\alpha<Q$, $0<\beta<Q-\alpha$, $Q=2n+2$是$\mathbb{H}^n$的齐次维数, $\lambda\in\mathbb{R}$, $\Omega\subset\mathbb{H}^n$是一个光滑的有界域且$G(\xi)$是$\bar{\Omega}$中的非负连续函数. 显然, 方程(1.1)与CR流形上的CR Yamabe问题有关. 其中, CR流形是一种非交换几何, 它是在复流形的实超曲面的研究基础上衍生出来的(可见文献 [3] [4]和其中的参考文献).

1.1. 研究背景

1958年, Stein和Weiss在 [5]中证明了加权的HLS (下面简称WHLS)不等式:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(\xi)g(\eta)}{|\xi|^a|\xi-\eta|^{\mu}|\eta|^b}d\xi d\eta\right|\le C_{a,b,s,\mu,n}\|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^s(\mathbb{R}^n)},\tag{1.2}$$

其中$1<r,s<\infty, 0<\mu<n, a+b\ge 0, a+b+\mu\le n, 1-\frac{1}{r}-\frac{\mu}{n}<\frac{a}{n}<1-\frac{1}{r}$ 且$\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{\mu+a+b}{n}=2$. 为了得到WHLS不等式(1.2)中的最佳常数, 1983年Lieb在 [6]中得到了在$\|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}=\|g\|_{L^s(\mathbb{R}^n)}$的限制下的最大化泛函

$$J(f,g)=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(\xi)g(\eta)}{|\xi|^a|\xi-\eta|^{\mu}|\eta|^b}d\xi d\eta$$

此外, Lieb还在 [6]中在$r=s=\frac{2n}{n+\alpha}$的共形情况下, 确定了N_α的值, 分类了所有的极值函数以及得到了精确的HLS不等式: 对于$\alpha\in(0,n)$以及所有的$f,g\in L^{\frac{2n}{n+\alpha}}(\mathbb{R}^n)$, 都有

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(\xi)g(\eta)}{|\xi-\eta|^{n-\alpha}}d\xi d\eta\right|\le N_\alpha\|f\|_{L^{\frac{2n}{n+\alpha}}(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^{\frac{2n}{n+\alpha}}(\mathbb{R}^n)}\tag{1.3}$$

成立, 其中$N_\alpha:=N(\frac{2n}{n+\alpha},\alpha,n)=\pi^{\frac{n-\alpha}{2}}\frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{\alpha}{2})}(\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(n)})^{-\frac{\alpha}{n}}$. 基于上述研究工作, 1974年Folland和Stein在 [3]中把$\mathbb{R}^n$上的HLS不等式推广到了$\mathbb{H}^n$上. 他们研究了奇异积分算子并得到了下面不等式

$$\left|\int_{\mathbb{H}^n}\int_{\mathbb{H}^n}\frac{\overline{f(\xi)}g(\eta)}{|\eta^{-1}\xi|^{Q-\alpha}}d\eta d\xi\right|\le D_{\alpha,s,n}\|f\|_{L^r(\mathbb{H}^n)}\|g\|_{L^s(\mathbb{H}^n)},\tag{1.4}$$

其中$f\in L^r(\mathbb{H}^n)$, $g\in L^s(\mathbb{H}^n)$, $0<\alpha<Q$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{Q-\alpha}{Q}=2$且$Q=2n+2$是$\mathbb{H}^n$的齐次维数. 结合CR流形上的CR Yamabe问题, Jerison和Lee在 [7]中利用Obata的证明思想对所有极值函数进行分类, 并且证明了$\mathbb{H}^n$上HLS不等式精确常数的存在性. 此外, 在$\alpha=2$ 和$r=s=\frac{2Q}{Q+\alpha}$的共形条件下, 他们还得到了精确常数$D_{\alpha,s,n}$的显式以及对应的极大化对$f=g$. 不久以后, Frank 和Lieb在 [8]中对上述的分类结果给出了一个新的证明方法, 这将Jerison和Lee [7]中的结果推广到了对所有的$0<\alpha<Q$. 后来, Han, Lu和Zhu在 [2]中将不等式(1.4)扩展到两种情形, 即$\mathbb{H}^n$上的Stein-Weiss不等式和双加权HLS不等式.

基于上述研究, $\mathbb{H}^n$上的偏微分方程受到了越来越多的学者的关注, 特别是偏微分方程的Brezis-Nirenberg型问题. 1992年, Garofalo和Lanconelli在 [9] 中研究了一类半线性方程

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbb{H}^n} u = f(u) & in\ \ \Omega, \\ u = 0 & on\ \ \partial\Omega, \end{cases}$$

这里Ω是$\mathbb{H}^n$上的一个开子集(有界或者无界)且$\Delta_{\mathbb{H}^n}$ 是$\mathbb{H}^n$ 上的次椭圆拉普拉斯算子. 最后, 他们运用变分的理论建立了其解的正则性、存在性以及不存在性结果. 然后, Niu在 [10]中思考了问题

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbb{H}^n} u = f(z,t,u) & in\ \ \Omega, \\ u = 0 & on\ \ \partial\Omega, \end{cases}$$

其中Ω是$\mathbb{H}^n$上的一个有界或者无界的区域, 对此他证实了这个方程没有非负解. 随后, Wang在 [11]中探究了一类$\mathbb{H}^n$上的具有临界Sobolev指数的非线性次椭圆方程的正解的存在性问题:

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbb{H}^n} u = u^{\frac{Q+2}{Q-2}} + \lambda u & in\ \ \Omega, \\ u > 0 & in\ \ \Omega, \\ u = 0 & on\ \ \partial\Omega, \end{cases}$$

这扩展了Brezis和Nirenberg在 [12]中的欧氏空间情况下的结果. 读者可以查阅相关的参考文献 [9–11, 13–16] 以获得上述研究结果的进一步发展以及更多细节.

1.2. 主要结果

近几年来, 积分方程的Brezis-Nirenberg型问题的研究也取得了一些可观的进展. 2018年, Dou和Zhu 在 [13]中研究了一类$\mathbb{R}^n$上的有界域上与精确的HLS不等式有关的非线性积分方程:

$$f^{q-1}(\xi) = \int_\Omega \frac{f(\eta)}{|\xi-\eta|^{n-\alpha}} d\eta + \lambda \int_\Omega \frac{f(\eta)}{|\xi-\eta|^{n-\alpha-1}} d\eta, \ \ f \geq 0, \ \ \xi \in \bar{\Omega}, \tag{1.5}$$

其中$1 < \alpha < n$且$\Omega \subset \mathbb{R}^n$是一个有光滑边界的有界域, 从而得到了方程(1.5)的正解的存在性与不存在性结果. 在这个探索的过程中, 他们发现了一些不同于偏微分方程的有趣现象, 证明了积分方程是独立的. 后来, Han在 [16]中把Dou和Zhu [13]中的$\mathbb{R}^n$上的结果推广到了$\mathbb{H}^n$ 上, 他们研究了在$G(\xi) \equiv 1$和$\beta \equiv 1$的情形下$\mathbb{H}^n$上的有界区域上的积分方程(1.1), 给出了紧性和正则性的另一种证明方法, 进而把α由之前的$1 < \alpha < n$推广到了$0 < \alpha < n$, 从而也得到了方程(1.1)的正解的存在性和不存在性结果.

受上述工作的启发, 本文研究了方程(1.1)中$G(\xi)$和β不恒等于常数的情形, 我们将研究在次临界$\frac{2Q}{Q+\alpha} < q < 2$情形下方程(1.1)在$\mathbb{H}^n$上的有界域上正解的存在性. 这里, 我们将指出权函数$G(\xi)$会给证明存在的正解$f \in \Gamma^\alpha(\bar{\Omega})$带来一定的困难.

令$q_\alpha = \frac{2Q}{Q+\alpha}$, $p_\alpha = \frac{2Q}{Q-\alpha}$. 本文的主要结果如下:

定理 1 假设$0<\alpha<Q$, $0<\beta<Q-\alpha$, $\Omega\subset\mathbb{H}^n$是一个光滑的有界域且正函数$G(\xi)\in C(\bar{\Omega})$. 对于$q_\alpha<q<2$(次临界情形), 对任意给定的$\lambda\in\mathbb{R}$, 方程(1.1)都有一个正解$f\in L^\infty(\bar{\Omega})\cup C(\bar{\Omega})$. 特别地, 当$0<\alpha\le 1$时, 正解$f\in\Gamma^\alpha(\bar{\Omega})\subset C^{\frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega})$.

本文组织结构如下: 在第二节, 我们回顾与海森堡群$\mathbb{H}^n$相关的定义以及基本结论. 在第三节, 我们运用紧性引理和正则性引理证明定理1的存在性结果.

在正式论证定理1之前, 我们将对一些符号作出如下说明. 对任意定义在有界域Ω上的函数$f(\xi)$, 我们常用$\widetilde{f}(\xi)$来表示它在$\mathbb{H}^n$上的平凡延拓, 即

$$\widetilde{f}(\xi):=\begin{cases} f(\xi) & \xi\in\Omega,\\ 0 & \xi\in\mathbb{H}^n\backslash\Omega;\end{cases}$$

同时, 我们也定义

$$I_\alpha f(\xi):=\int_{\mathbb{H}^n}\frac{f(\eta)}{|\eta^{-1}\xi|^{Q-\alpha}}d\eta,\qquad I_{G,\alpha,\Omega}f(\xi):=\int_\Omega\frac{G(\xi)f(\eta)G(\eta)}{|\eta^{-1}\xi|^{Q-\alpha}}d\eta.$$

此外, 我们将用c和C表示各个正常数, 且它们的值在整篇论文中的每行都可能互不相同.

2. 预备知识

在本节, 我们将快速回顾海森堡群$\mathbb{H}^n$的相关定义以及一些基本事实. 更多的细节读者可以在文献 [1–3, 8–10, 16–19]和其中的参考文献中找到.

海森堡群$\mathbb{H}^n$是最简单的非交换的幂零Lie群, 它的底流形是坐标为$(z_1,z_2,\cdots,z_n,t)=(z,t)$的$\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}$, 且它在集$\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}$上赋予群运算法则

$$(z,t)(z',t')=(z+z',t+t'+2Im(z\cdot\overline{z'})),$$

其中$z,z'\in\mathbb{C}^n$, $t,t'\in\mathbb{R}$ 以及$z\cdot\overline{z'}=\sum\limits_{j=1}^n z_j\overline{z'_j}$. 令$z_j=x_j+iy_j$, 则$(x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2,\ldots,y_n,t)$形成了$\mathbb{H}^n$的一个实坐标系. 在这个坐标系中, 我们定义以下向量场:

$$X_j=\frac{\partial}{\partial x_j}+2y_j\frac{\partial}{\partial t},\ \ Y_j=\frac{\partial}{\partial y_j}-2x_j\frac{\partial}{\partial t},\ \ T=\frac{\partial}{\partial t},\ \ j=1,2,\cdots,n.$$

不难验证$\{X_1,X_2,\cdots,X_n,Y_1,Y_2,\cdots,Y_n,T\}$是$\mathbb{H}^n$上的左不变向量场的一个基. 此外, $\mathbb{H}^n$上的水平梯度和次椭圆拉普拉斯算子分别被定义为

$$\nabla_H=(X_1,X_2,\cdots,X_n,Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$$

和

$$\Delta_H=\sum_{j=1}^n(X_j^2+Y_j^2).$$

对任意的点$\xi = (z,t) = (x+iy,t)$和$\eta = (w,s) = (u+iv,s)$, 我们用

$$|\xi| = (|z|^4 + t^2)^{\frac{1}{4}}$$

来表示$\mathbb{H}^n$上的齐次范数. 相应地, ξ和η之间的距离可被定义为$d(\xi,\eta) = |\eta^{-1}\xi|$. 另外, $\mathbb{H}^n$ 上有一族自然的伸缩群

$$\delta_r(z,t) = (rz, r^2t), \ \ \forall r > 0,$$

且$\mathbb{H}^n$关于伸缩群的齐次维数是$Q = 2n+2$.

接下来, 我们回忆$\mathbb{H}^n$上的精确的HLS不等式以及一些已知的结果.

定理 2 **($\mathbb{H}^n$上的精确的HLS不等式 [8, 16])** 对于$0 < \alpha < Q$, 则对任意的函数$f, g \in L^{q_\alpha}(\mathbb{H}^n)$都有

$$\left| \int_{\mathbb{H}^n} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\overline{f(\xi)} g(\eta)}{|\eta^{-1}\xi|^{Q-\alpha}} d\eta d\xi \right| \leq D_{n,\alpha} \|f\|_{L^{q_\alpha}(\mathbb{H}^n)} \|g\|_{L^{q_\alpha}(\mathbb{H}^n)} \tag{2.1}$$

成立, 其中

$$D_{n,\alpha} := (\frac{\pi^{n+1}}{2^{n-1}n!})^{\frac{Q-\alpha}{Q}} \frac{n!\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma^2(\frac{Q+\alpha}{4})};$$

且等式成立当且仅当

$$f(\xi) = c_1 g(\xi) = c_2 H(\delta_r(\zeta^{-1}\xi)),$$

其中$c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $\zeta \in \mathbb{H}^n$ (除非$f \equiv 0$或$g \equiv 0$) 且H被定义为

$$H(\xi) = H(z,t) = [(1+|z|^2)^2 + t^2]^{-\frac{Q+\alpha}{4}}.$$

命题 1 **(引理8.8 [3]和引理1.3 [17])** 对任意的$\xi \in \mathbb{H}^n$. 如果$|\xi| \leq 1$, 那么

$$\|\xi\| \leq |\xi| \ \ \leq \|\xi\|^{\frac{1}{2}},$$

这里$\|\cdot\|$是欧几里得范数.

命题 2 **(三角不等式(引理8.9 [3]和命题1.4 [17]))** 存在一个常数$C \geq 1$, 使得对任意的$\xi, \eta \in \mathbb{H}^n$都有

$$|\xi + \eta| \leq C(|\xi| + |\eta|), \ \ |\xi\eta| \leq C(|\xi| + |\eta|) \tag{2.2}$$

成立, 这里$\xi + \eta$表示普通向量相加.

命题 3 **(引理8.10 [3]和命题1.15 [17])** 如果f是一个λ次的齐次函数, $f \in C^2$且远离0, 其中$\lambda \in \mathbb{R}$, 那么存在一个常数$C > 0$, 使得

$$|f(\xi\eta) - f(\xi)| \leq C|\eta||\xi|^{\lambda-1}, \ \ \text{这里}|\eta| \leq \frac{1}{2}|\xi|, \tag{2.3}$$

$$|f(\xi\eta) + f(\xi\eta^{-1}) - 2f(\xi)| \leq C|\eta|^2|\xi|^{\lambda-2}, \ \ \text{这里}|\eta| \leq \frac{1}{2}|\xi|. \tag{2.4}$$

成立.

随后, 我们介绍$\mathbb{H}^n$上的卷积及其性质.

定义 1 (卷积 [3]) $\mathbb{H}^n$上的两个函数f, g的卷积被定义为

$$f * g(\xi) = \int f(\eta)g(\eta^{-1}\xi)d\eta = \int f(\xi\eta^{-1})g(\eta)d\eta.$$

这里, 我们通常用符号$\mathfrak{D}'$表示分布的空间. 如果$f \in C_0^\infty$且$G \in \mathfrak{D}'$, 那么我们将把C^∞函数$G * f$和$f * G$定义为

$$G * f(\xi) = G(f(\eta^{-1}\xi)), \ \ f * G(\xi) = G(f(\xi\eta^{-1})).$$

定义 2 (正则分布 [3]) 我们称一个分布F是正则的, 如果存在一个在$\mathbb{H}^n \backslash \{0\}$上是$C^\infty$的函数$f$使得对所有的$g \in C_0^\infty(\mathbb{H}^n \backslash \{0\})$都有$F(g) = \int fgd\xi$成立.

命题 4 (引理8.7 [3]) 如果F是一个λ次的正则齐次分布, 其中$-Q < \lambda < 0$, 那么对任意的$\epsilon > 0$, 映射$g \to g * F$都可以扩展到从L^p到L^q和从L^1到$L^{-\frac{Q}{\lambda}-\epsilon}(loc)$的一个有界映射, 这里$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\lambda}{Q} - 1$且$1 < p < q < \infty$.

定理 3 ($\mathbb{H}^n$上的HLS不等式的对偶形式 [3]) 如果分布F取$|\xi|^{\alpha-Q}$, 其中$0 < \alpha < Q$, 那么对于$1 < p < q < +\infty$和$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{Q}$, 上面的结果就变成了

$$\|g * |\xi|^{\alpha-Q}\|_{L^q} \leq C\|g\|_{L^p}. \tag{2.5}$$

最后, 我们给出$\mathbb{H}^n$上的Lipschitz空间族Γ^α的定义及其运用.

定义 3 (Lipschitz空间 [3, 17]) *(i)* 对于$0 < \alpha < 1$,

$$\Gamma^\alpha = \{f \in L^\infty \cup C : \sup_{\xi,\eta} \frac{|f(\xi\eta) - f(\xi)|}{|\eta|^\alpha} < \infty\}.$$

(ii) 对于$\alpha = 1$,

$$\Gamma^1 = \{f \in L^\infty \cup C : \sup_{\xi,\eta} \frac{|f(\xi\eta) + f(\xi\eta^{-1}) - 2f(\xi)|}{|\eta|} < \infty\}.$$

(iii) 对于$\alpha = k + \alpha'$, 这里k是一个正整数且$0 < \alpha' \leq 1$,

$$\Gamma^\alpha = \{f \in L^\infty \cup C : f \in \Gamma^{\alpha'}\text{且对所有的}D \in \mathfrak{B}_k,\ \text{都有}Df \in \Gamma^{\alpha'}\},$$

其中

$$\mathfrak{B}_k = \{L_{a_1}L_{a_2}\cdots L_{a_j} : 1 \leq a_i \leq 2n,\ \ i = 1, 2, \cdots, j,\ \ j \leq k\},$$

$L_j = X_j$以及$L_{j+n} = Y_j$, $j = 1, 2, \cdots, n$.

命题 5 (定理20.1 [3]) 对于$0 < \alpha < \infty$, $\Gamma^\alpha \subset C^{\frac{\alpha}{2}}(loc)$.

DOI: 10.12677/aam.2022.114193

3. 次临界情形下非线性积分方程的正解的存在性

这一章, 我们将研究次临界$q_\alpha < q < 2$情况下方程(1.1)的正解的存在性. 首先, 我们证明下面的紧性引理, 由此我们可以推断次临界情况下方程(1.1)正解的存在性.

引理 1 *对任意紧的区域Ω和$t < \frac{2Q}{Q-\alpha}$, 算子$I_{G,\alpha,\Omega} : L^{\frac{2Q}{Q+\alpha}}(\Omega) \to L^t(\Omega)$ 是紧的, 其中$G(\xi) \in C(\bar{\Omega})$. 也就是说, 对任意有界序列$\{f_j\}_{j=1}^{+\infty} \subset L^{\frac{2Q}{Q+\alpha}}(\Omega)$, 存在一个函数$f \in L^{\frac{2Q}{Q+\alpha}}(\Omega)$和$\{I_{G,\alpha,\Omega}f_j(\xi)\}_{j=1}^{+\infty}$的一个子序列(仍然用$\{I_{G,\alpha,\Omega}f_j(\xi)\}_{j=1}^{+\infty}$来表示), 使得在$L^t(\Omega)$中有$I_{G,\alpha,\Omega}f_j(\xi)$收敛到$I_{G,\alpha,\Omega}f$.*

证明 因为$\{f_j\}_{j=1}^{+\infty}$是$L^{\frac{2Q}{Q+\alpha}}(\Omega)$中的有界序列, $L^{\frac{2Q}{Q+\alpha}}(\Omega)$ 是一个自反的Banach空间且正函数$G(\xi) \in C(\bar{\Omega})$, 所以我们有

$$\|G(\xi)f_j(\eta)G(\eta)\|_{L^{\frac{2Q}{Q+\alpha}}(\Omega)} \leq C,$$

且由弱紧性可得: 存在$\{f_j\}$的一个子序列(仍然用$\{f_j\}$表示)和一个函数$f \in L^{\frac{2Q}{Q+\alpha}}(\Omega)$, 使得当$j \to +\infty$ 时, 在$L^{\frac{2Q}{Q+\alpha}}(\Omega)$中有$f_j \rightharpoonup f$, 这意味着当$j \to +\infty$时, 在$L^{\frac{2Q}{Q+\alpha}}(\Omega)$中有

$$G(\xi)f_j(\eta)G(\eta) \rightharpoonup G(\xi)f(\eta)G(\eta). \tag{3.1}$$

分解$|\xi|^{\alpha-Q} = |\xi|^{\alpha-Q}\chi_{\{|\xi|>\rho\}} + |\xi|^{\alpha-Q}\chi_{\{|\xi|<\rho\}}$, 其中$\rho > 0$将在后续的证明中被选取. 这里我们定义函数

$$\begin{aligned} I_{G,\alpha,\Omega}f_j(\xi) &= I^1_{G,\alpha,\Omega}f_j(\xi) + I^2_{G,\alpha,\Omega}f_j(\xi) \\ &:= G(\xi)f_j(\eta)G(\eta) * |\xi|^{\alpha-Q}\chi_{\{|\xi|>\rho\}} + G(\xi)f_j(\eta)G(\eta) * |\xi|^{\alpha-Q}\chi_{\{|\xi|<\rho\}}. \end{aligned}$$

下面, 我们将分两步来讨论$\{I_{G,\alpha,\Omega}f_j(\xi)\}$在$L^t(\Omega)$中的收敛性.

第一步. 首先, 我们来分析$\{I^1_{G,\alpha,\Omega}f_j(\xi)\}$的收敛性.

一方面, 注意到$|\xi|^{\alpha-Q}\chi_{\{|\xi|>\rho\}} \in L^{\frac{2Q}{Q-\alpha}}(\Omega)$ 和(3.1), 由弱收敛的定义可得$I^1_{G,\alpha,\Omega}f_j(\xi)$逐点收敛到$I^1_{G,\alpha,\Omega}f(\xi)$, 由此推得$|I^1_{G,\alpha,\Omega}f_j(\xi)|^t$逐点收敛到$|I^1_{G,\alpha,\Omega}f(\xi)|^t$. 另一方面, 因为

$$|I^1_{G,\alpha,\Omega}f_j(\xi)| \leq \|G(\xi)f_j(\eta)G(\eta)\|_{L^{\frac{2Q}{Q+\alpha}}(\Omega)} \||\xi|^{\alpha-Q}\chi_{\{|\xi|>\rho\}}\|_{L^{\frac{2Q}{Q-\alpha}}(\Omega)} \leq C(\rho),$$

这说明$|I^1_{G,\alpha,\Omega}f_j(\xi)|^t \leq C^t(\rho)$, 这里$C(\rho)$与$f_j$无关, 所以由Lebesgue控制收敛定理, 可得

$$\int_\Omega |I^1_{G,\alpha,\Omega}f_j(\xi)|^t \to \int_\Omega |I^1_{G,\alpha,\Omega}f(\xi)|^t,$$

由此得到

$$\|I^1_{G,\alpha,\Omega}f_j(\xi)\|_{L^t(\Omega)} \to \|I^1_{G,\alpha,\Omega}f(\xi)\|_{L^t(\Omega)}.$$

因此, 我们可以得出在$L^t(\Omega)$中有

$$I^1_{G,\alpha,\Omega}f_j(\xi) \to I^1_{G,\alpha,\Omega}f(\xi). \tag{3.2}$$

第二步. 接下来, 我们来分析$\{I^2_{G,\alpha,\Omega}f_j(\xi)\}$的收敛性.

为了证明在$L^t(\Omega)$中有$I^2_{G,\alpha,\Omega}f_j(\xi) \to I^2_{G,\alpha,\Omega}f(\xi)$, 我们需要证明当$j \to +\infty$时有

$$\|I^2_{G,\alpha,\Omega}f_j(\xi) - I^2_{G,\alpha,\Omega}f(\xi)\|_{L^t(\Omega)} = \|I^2_{G,\alpha,\Omega}(f_j(\xi) - f(\xi))\|_{L^t(\Omega)} \to 0.$$

根据Young不等式, 我们可以推出

$$\begin{aligned}\|I^2_{G,\alpha,\Omega}(f_j(\xi) - f(\xi))\|_{L^t(\Omega)} &\le C\|G(\xi)G(\eta)(f_j(\eta) - f(\eta))\|_{L^{\frac{2Q}{Q+\alpha}}(\Omega)}\||\xi|^{\alpha-Q}\chi_{\{|\xi|<\rho\}}\|_{L^s(\Omega)} \\ &\le C\|f_j(\eta) - f(\eta)\|_{L^{\frac{2Q}{Q+\alpha}}(\Omega)}\||\xi|^{\alpha-Q}\chi_{\{|\xi|<\rho\}}\|_{L^s(\Omega)},\end{aligned} \tag{3.3}$$

这里$\frac{1}{t}+1 = \frac{1}{\frac{2Q}{Q+\alpha}} + \frac{1}{s}$, $s = (\frac{1}{t} + \frac{Q-\alpha}{2Q})^{-1} < \frac{Q}{Q-\alpha}$且$\||\xi|^{\alpha-Q}\chi_{\{|\xi|<\rho\}}\|_{L^s(\Omega)} \le C\rho^{\beta}$, 其中$\beta = Q(\frac{1}{s} - \frac{Q-\alpha}{Q})$. 则(3.3) 被转化成了

$$\|I^2_{G,\alpha,\Omega}(f_j(\xi) - f(\xi))\|_{L^t(\Omega)} \le C\rho^{\beta}.$$

此时, 选取ρ为足够小的数, 那么当$j \to +\infty$有

$$\|I^2_{G,\alpha,\Omega}(f_j(\xi) - f(\xi))\|_{L^t(\Omega)} \to 0,$$

即当$j \to +\infty$时, 在$L^t(\Omega)$中有

$$I^2_{G,\alpha,\Omega}f_j(\xi) \to I^2_{G,\alpha,\Omega}f(\xi). \tag{3.4}$$

因此, 由(3.2)和(3.4)可得当$j \to +\infty$时, 在$L^t(\Omega)$中有

$$I_{G,\alpha,\Omega}f_j(\xi) \to I_{G,\alpha,\Omega}f(\xi).$$

引理得证. □

在上述引理1的基础上, 我们将证明下面的引理, 由此可以推导出定理1 的存在性结果. 为了简单起见, 我们只证明$\lambda = 0$时的情形. 该证明方法与 [16]中引理4.2的证明方法相同.

引理 2 对于$q > q_\alpha$, 上确界

$$D_{G,\alpha,q}(\Omega) := \sup_{f\in L^q(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega\int_\Omega G(\xi)f(\xi)|\eta^{-1}\xi|^{\alpha-Q}f(\eta)G(\eta)d\eta d\xi}{\|f\|^2_{L^q(\Omega)}}$$

能够被$L^q(\Omega)$中的某一非负函数达到, 其中$0 < \alpha < Q$且正函数$G(\xi) \in C(\bar{\Omega})$.

证明 一开始, 我们将来证明$D_{G,\alpha,q}(\Omega) \le C < +\infty$.

因为$G(\xi) \in C(\bar{\Omega})$, $q > q_\alpha$, $f \in L^q(\Omega)$且

$$\widetilde{f}(\xi) := \begin{cases} f(\xi) & \xi \in \Omega, \\ 0 & \xi \in \mathbb{H}^n \backslash \Omega, \end{cases}$$

所以$|G(\xi)| \leq C$, $f \in L^{q_\alpha}(\Omega)$且$\widetilde{f}(\xi) \in L^{q_\alpha}(H^n)$, 这里$\|\widetilde{f}(\xi)\|_{L^{q_\alpha}(H^n)} = \|f(\xi)\|_{L^{q_\alpha}(\Omega)}$. 对任意的$f \in L^q(\Omega)$, 根据精确的HLS不等式(2.1), 我们有

$$\begin{aligned} \langle I_{G,\alpha,\Omega} f, f \rangle &= \int_\Omega f(\xi) (\int_\Omega \frac{G(\xi) f(\eta) G(\eta)}{|\eta^{-1}\xi|^{Q-\alpha}} d\eta) d\xi \leq C \int_\Omega \int_\Omega \frac{f(\xi) f(\eta)}{|\eta^{-1}\xi|^{Q-\alpha}} d\eta d\xi \\ &= C \int_{\mathbb{H}^n} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\widetilde{f}(\xi)\widetilde{f}(\eta)}{|\eta^{-1}\xi|^{Q-\alpha}} d\eta d\xi \leq C \cdot D_{n,\alpha} \|\widetilde{f}\|^2_{L^{q_\alpha}(\mathbb{H}^n)} = C \cdot D_{n,\alpha} \|f\|^2_{L^{q_\alpha}(\Omega)} \\ &\leq C \|f\|^2_{L^q(\Omega)}, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} D_{G,\alpha,q}(\Omega) := & \sup_{f \in L^q(\Omega)\backslash\{0\}} \frac{\int_\Omega \int_\Omega G(\xi) f(\xi) |\eta^{-1}\xi|^{\alpha-Q} f(\eta) G(\eta) d\eta d\xi}{\|f\|^2_{L^q(\Omega)}} \\ &= \sup_{f \in L^q(\Omega)\backslash\{0\}} \frac{\int_\Omega f(\xi) (\int_\Omega G(\xi) f(\eta) G(\eta) |\eta^{-1}\xi|^{\alpha-Q} d\eta) d\xi}{\|f\|^2_{L^q(\Omega)}} \\ &= \sup_{f \in L^q(\Omega)\backslash\{0\}} \frac{\langle I_{G,\alpha,\Omega} f, f \rangle}{\|f\|^2_{L^q(\Omega)}} \leq \sup_{f \in L^q(\Omega)\backslash\{0\}} \frac{C\|f\|^2_{L^q(\Omega)}}{\|f\|^2_{L^q(\Omega)}} \\ &= C < +\infty, \end{aligned}$$

即$D_{G,\alpha,q}(\Omega) \leq C < +\infty$.

接下来, 我们要证明上确界$D_{G,\alpha,q}(\Omega)$ 能够被$L^q(\Omega)$中的某一非负函数达到.

在$L^q(\Omega)$中选取一个非负极大化序列$\{f_j\}_{j=1}^{+\infty}$, 且进一步使其标准化使得$\|f_j\|_{L^q(\Omega)} = 1$, 这时我们可以得到

$$\begin{aligned} & \lim_{j \to +\infty} \int_\Omega \int_\Omega G(\xi) f_j(\xi) |\eta^{-1}\xi|^{\alpha-Q} f_j(\eta) G(\eta) d\eta d\xi \\ &= \sup_{f \in L^q(\Omega)\backslash\{0\}} \int_\Omega \int_\Omega G(\xi) f(\xi) |\eta^{-1}\xi|^{\alpha-Q} f(\eta) G(\eta) d\eta d\xi \\ &= D_{G,\alpha,q}(\Omega) \end{aligned}$$

且$\{f_j\}$在$L^q(\Omega)$中有界. 又因为自反的Banach空间$L^q(\Omega)$中的有界序列是弱准紧的, 且由引理1可知: 算子$I_{G,\alpha,\Omega}$ 具有紧性, 所以我们可以推断出存在$\{f_j\}$的一个子序列(这里仍然用$\{f_j\}$表示)和$f_* \in L^q(\Omega)$, 使得在$L^q(\Omega)$中有$f_j \rightharpoonup f_*$以及在$L^{q'}(\Omega)$中有$I_{G,\alpha,\Omega} f_j \to I_{G,\alpha,\Omega} f_*$, 其中$1 < q' < \frac{2Q}{Q-\alpha}$. 因而由$L^q$范数的弱下半连续性, 可得

$$\|f_*\|_{L^q(\Omega)} \leq \liminf_{j \to +\infty} \|f_j\|_{L^q(\Omega)} \tag{3.5}$$

和

$$\lim_{j\to+\infty}\langle I_{G,\alpha,\Omega}f_j, f_j\rangle = \langle I_{G,\alpha,\Omega}f_*, f_*\rangle. \tag{3.6}$$

那么, 根据(3.5)和(3.6), 我们有

$$\begin{aligned} D_{G,\alpha,q}(\Omega) := \lim_{j\to+\infty}\frac{\int_\Omega\int_\Omega G(\xi)f_j(\xi)|\eta^{-1}\xi|^{\alpha-Q}f_j(\eta)G(\eta)d\eta d\xi}{\|f\|^2_{L^q(\Omega)}} \\ = \frac{\lim\limits_{j\to+\infty}\int_\Omega\int_\Omega G(\xi)f_j(\xi)|\eta^{-1}\xi|^{\alpha-Q}f_j(\eta)G(\eta)d\eta d\xi}{\lim\limits_{j\to+\infty}\|f\|^2_{L^q(\Omega)}} \\ = \frac{\lim\limits_{j\to+\infty}\langle I_{G,\alpha,\Omega}f_j, f_j\rangle}{\liminf\limits_{j\to+\infty}\|f_j\|^2_{L^q(\Omega)}} \\ \le \frac{\langle I_{G,\alpha,\Omega}f_*, f_*\rangle}{\|f_*\|^2_{L^q(\Omega)}}, \end{aligned}$$

这也就是说, f_* 是一个极大元. 引理得证. □

容易验证能量$D_{G,\alpha,q}(\Omega)$的极大元$f(\xi)$, 在相差一个常数乘子的情形下, 满足下列方程:

$$f^{q-1}(\xi) = \int_\Omega\frac{G(\xi)f(\eta)G(\eta)}{|\eta^{-1}\xi|^{Q-\alpha}}d\eta,\ \ \xi\in\bar{\Omega}. \tag{3.7}$$

令$g(\xi) = f^{q-1}(\xi)$且$q' = \frac{q}{q-1}$, 则$f(\xi) = g^{\frac{1}{q-1}}(\xi) = g^{q'-1}(\xi)$, 这里$f\in L^q(\Omega)$. 因此, (3.7)被转化成了

$$g(\xi) = \int_\Omega\frac{G(\xi)g^{q'-1}(\eta)G(\eta)}{|\eta^{-1}\xi|^{Q-\alpha}}d\eta,\ \ \xi\in\bar{\Omega}, \tag{3.8}$$

其中$2 < q' < p_\alpha$且$g\in L^{q'}(\Omega)$.

为了完成定理1剩下结论的证明, 我们还需要证明下面的正则性引理.

引理 3 假设$g\in L^{q'}(\Omega)$是方程(3.8)的一个正解以及正函数$G(\xi)\in C(\bar{\Omega})$. 如果$q' < p_\alpha$, 那么对于$0<\alpha\le 1$, $g\in\Gamma^\alpha(\bar{\Omega})\subset C^{\frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega})$.

证明 下面, 我们将分两个步骤来证明$g\in\Gamma^\alpha(\bar{\Omega})\subset C^{\frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega})$.

第一步. 首先, 我们来证明$g\in L^\infty(\bar{\Omega})\cup C(\bar{\Omega})$.

由Hölder不等式, 可得

$$\begin{aligned} g(\xi) = \int_\Omega\frac{G(\xi)g^{q'-1}(\eta)G(\eta)}{|\eta^{-1}\xi|^{Q-\alpha}}d\eta \le C\int_\Omega\frac{g^{q'-1}(\eta)}{|\eta^{-1}\xi|^{Q-\alpha}}d\eta \\ \le C\|g^{q'-1}\|_{L^m(\Omega)}\cdot\||\eta^{-1}\xi|^{\alpha-Q}\|_{L^{m'}(\Omega)} \\ = C\|g^{q'-1}\|_{L^{\frac{s^*}{q'-1}}(\Omega)}\cdot\||\eta^{-1}\xi|^{\alpha-Q}\|_{L^{(\frac{s^*}{q'-1})'}(\Omega)} \\ = C\|g\|^{q'-1}_{L^{s^*}(\Omega)}\cdot\left(\int_\Omega|\eta^{-1}\xi|^{(\alpha-Q)\cdot(\frac{s^*}{q'-1})'}d\eta\right)^{\frac{1}{(\frac{s^*}{q'-1})'}} \\ \le C\|g\|^{q'-1}_{L^{s^*}(\Omega)}, \end{aligned}$$

其中$m = \frac{s^*}{q'-1}$与$m' = (\frac{s^*}{q'-1})'$互为共轭数且$\frac{s^*}{q'-1} > \frac{Q}{\alpha} > 1$. 那么, 如果我们想要验证$g \in L^\infty(\bar{\Omega})$, 我们只需要论证存在某一常数$s^* > 0$使得$g \in L^{s^*}(\Omega)$且$\frac{s^*}{q'-1} > \frac{Q}{\alpha}$即可. 一旦$g \in L^\infty(\bar{\Omega})$被证明了, 我们就可以根据控制收敛定理马上推导出$g \in C(\bar{\Omega})$. 接下来, 我们将分三种情形来确定$s^*$的值.

情形I. 若$q' < \frac{Q}{Q-\alpha}$, 我们可取$s^* = q'$, 则s^*显然满足$g \in L^{s^*}(\Omega) = L^{q'}(\Omega)$ 且$\frac{s^*}{q'-1} = \frac{q'}{q'-1} > \frac{Q}{\alpha}$.

情形II. 若$q' = \frac{Q}{Q-\alpha}$, 令$k = [\frac{Q}{Q-\alpha}] + 1$且$q_1 = (1 - \frac{1}{k})\frac{Q}{Q-\alpha} < \frac{Q}{Q-\alpha} = q'$, 则有$g \in L^{q_1}(\Omega)$. 根据(3.8)和HLS不等式的对偶形式(2.5), 我们得到了

$$\begin{aligned}\|g(\xi)\|_{L^{s^*}(\Omega)} &= \|\int_\Omega \frac{G(\xi)g^{q'-1}(\eta)G(\eta)}{|\eta^{-1}\xi|^{Q-\alpha}}d\eta\|_{L^{s^*}(\Omega)} \leq \|C\int_\Omega \frac{g^{q'-1}(\eta)}{|\eta^{-1}\xi|^{Q-\alpha}}d\eta\|_{L^{s^*}(\Omega)} \\ &= C\|g^{q'-1} * |\xi|^{\alpha-Q}\|_{L^{s^*}(\Omega)} \leq C\|g^{q'-1}\|_{L^\nu(\Omega)},\end{aligned}$$

这里$\frac{1}{s^*} = \frac{1}{\nu} - \frac{\alpha}{Q}$, 其中$1 < \nu < s^* < +\infty$. 不妨令$\nu = \frac{q_1}{q'-1} > 1$, 则$\frac{1}{s^*} = \frac{q'-1}{q_1} - \frac{\alpha}{Q} = \frac{\alpha}{(k-1)Q}$. 因此, 我们可取$s^* = \frac{(k-1)Q}{\alpha}$, 则$s^*$显然满足$g \in L^{s^*}(\Omega)$且$\frac{s^*}{q'-1} > \frac{Q}{\alpha}$.

情形III. 若$\frac{Q}{Q-\alpha} < q' < \frac{2Q}{Q-\alpha}$, 此处我们将利用迭代的方法找到常数$s^*$. 根据(3.8)和HLS 不等式的对偶形式(2.5), 我们可以推出

$$\begin{aligned}\|g(\xi)\|_{L^s(\Omega)} &= \|\int_\Omega \frac{G(\xi)g^{q'-1}(\eta)G(\eta)}{|\eta^{-1}\xi|^{Q-\alpha}}d\eta\|_{L^s(\Omega)} \leq \|C\int_\Omega \frac{g^{q'-1}(\eta)}{|\eta^{-1}\xi|^{Q-\alpha}}d\eta\|_{L^s(\Omega)} \\ &= C\|g^{q'-1} * |\xi|^{\alpha-Q}\|_{L^s(\Omega)} \leq C\|g^{q'-1}\|_{L^\mu(\Omega)},\end{aligned} \tag{3.9}$$

这里$\frac{1}{s} = \frac{1}{\mu} - \frac{\alpha}{Q}$, 其中$1 < \mu < s < +\infty$. 紧接着, 我们将运用上述不等式(3.9)来作迭代. 一开始, 令$\mu = \frac{q'}{q'-1} := \frac{\mu_1}{q'-1}$以及$\mu_2 = s$. 因为$\mu_2 = s = (\frac{1}{\mu} - \frac{\alpha}{Q})^{-1}$且$\frac{2Q}{Q+\alpha} < \mu = \frac{1}{1-\frac{1}{q'}} < \frac{Q}{\alpha}$, 所以$\mu_2 = s > \frac{2Q}{Q-\alpha} > q' = \mu_1$.

将上述过程进行迭代: 令$\mu = \frac{\mu_i}{q'-1}$, 则$\mu_{i+1} = s$, 其中$i = 1, 2, \cdots$. 注意到$q' - 2 < \frac{2\alpha}{Q-\alpha}$且$\frac{1}{t_{i+1}} < \frac{Q-\alpha}{2Q}$. 因此, 经过一番分析, 不难得出当$t_{i+1} > 0$时, 有$t_{i+1} > t_i$. 所以, 在迭代了数多次之后, 也就是说$k_0$次时, 我们会得到两种情况: $\frac{t_{k_0}}{q'-1} < \frac{Q}{\alpha}$和$\frac{t_{k_0+1}}{q'-1} \geq \frac{Q}{\alpha}$.

如果$\frac{t_{k_0+1}}{q'-1} > \frac{Q}{\alpha}$, 我们可取$s^* = t_{k_0+1}$, 那么$s^*$显然满足$g \in L^{s^*}(\Omega)$ 且$\frac{s^*}{q'-1} > \frac{Q}{\alpha}$.

如果$\frac{t_{k_0+1}}{q'-1} = \frac{Q}{\alpha}$, 那么$g \in L^{t_{k_0+1}}(\Omega) = L^{\frac{Q}{\alpha}(q'-1)}(\Omega)$. 令$k = [\frac{2Q}{Q-\alpha}] + 1$以及$q_2 = (1 - \frac{1}{k})(q'-1)\frac{Q}{\alpha} < t_{k_0+1} = \frac{Q}{\alpha}(q'-1)$, 由此我们可以推断$g \in L^{q_2}(\Omega)$. 根据(3.8)和HLS不等式的对偶形式(2.5), 我们得到了一个类似(3.9)的不等式:

$$\|g(\xi)\|_{L^{s^*}(\Omega)} \leq C\|g^{q'-1}\|_{L^\omega(\Omega)},$$

这里$\frac{1}{s^*} = \frac{1}{\omega} - \frac{\alpha}{Q}$, 其中$1 < \omega < s^* < +\infty$. 不妨令$\omega = \frac{q_2}{q'-1} > 1$, 则有$\frac{1}{s^*} = \frac{q'-1}{q_2} - \frac{\alpha}{Q} = \frac{\alpha}{(k-1)Q}$. 所以, 我们可取$s^* = \frac{(k-1)Q}{\alpha}$, 显然$s^*$满足$g \in L^{s^*}(\Omega)$且$\frac{s^*}{q'-1} > \frac{Q}{\alpha}$.

因此, $g \in L^\infty(\bar{\Omega}) \cup C(\bar{\Omega})$.

第二步. 其次, 我们要证明$g \in \Gamma^\alpha(\bar{\Omega})$, 其中$0 < \alpha \leq 1$. 这里, 我们将利用Lipschitz空间$\Gamma^\alpha$的定义分以下两种情形来讨论.

情形i. 对于$0 < \alpha < 1$, 我们需要论证$\sup\limits_{\xi,\gamma} \frac{|g(\xi\gamma) - g(\xi)|}{|\gamma|^\alpha} < \infty$.

由$g \in L^{\infty}(\Omega)$和(3.8), 可得

$$\begin{aligned}
|g(\xi\gamma) - g(\xi)| &= |\int_{\Omega} \frac{G(\xi\gamma)g^{q'-1}(\eta)G(\eta)}{|\eta^{-1}\xi\gamma|^{Q-\alpha}} d\eta - \int_{\Omega} \frac{G(\xi)g^{q'-1}(\eta)G(\eta)}{|\eta^{-1}\xi|^{Q-\alpha}} d\eta| \\
&\leq C\|g\|_{L^{\infty}(\Omega)}^{q'-1} |\int_{\Omega} (G(\xi\gamma)|\eta\gamma|^{\alpha-Q} - G(\xi)|\eta|^{\alpha-Q}) d\eta| \\
&\leq C\|g\|_{L^{\infty}(\Omega)}^{q'-1} \int_{\Omega} |G(\xi\gamma)|\eta\gamma|^{\alpha-Q} - G(\xi)|\eta|^{\alpha-Q}| d\eta \\
&\leq C\|g\|_{L^{\infty}(\Omega)}^{q'-1} (\int_{\Omega} G(\xi\gamma)|\eta\gamma|^{\alpha-Q} d\eta + \int_{\Omega} G(\xi)|\eta|^{\alpha-Q} d\eta) \\
&\leq C\|g\|_{L^{\infty}(\Omega)}^{q'-1} (\int_{\Omega} |\eta\gamma|^{\alpha-Q} d\eta + \int_{\Omega} |\eta|^{\alpha-Q} d\eta) \\
&= C\|g\|_{L^{\infty}(\Omega)}^{q'-1} [\int_{\Omega} (|\eta\gamma|^{\alpha-Q} - |\eta|^{\alpha-Q}) d\eta + 2\int_{\Omega} |\eta|^{\alpha-Q} d\eta] \\
&\leq C\|g\|_{L^{\infty}(\Omega)}^{q'-1} [\int_{\Omega} ||\eta\gamma|^{\alpha-Q} - |\eta|^{\alpha-Q}| d\eta + 2\int_{\Omega} |\eta|^{\alpha-Q} d\eta].
\end{aligned} \tag{3.10}$$

分解

$$\int_{\Omega} ||\eta\gamma|^{\alpha-Q} - |\eta|^{\alpha-Q}| d\eta = \int_{\Omega\cap\{|\eta|\geq 2|\gamma|\}} ||\eta\gamma|^{\alpha-Q} - |\eta|^{\alpha-Q}| d\eta + \int_{\Omega\cap\{|\eta|\leq 2|\gamma|\}} ||\eta\gamma|^{\alpha-Q} - |\eta|^{\alpha-Q}| d\eta$$

和

$$\int_{\Omega} |\eta|^{\alpha-Q} d\eta = \int_{\Omega\cap\{|\eta|\geq 2|\gamma|\}} |\eta|^{\alpha-Q} d\eta + \int_{\Omega\cap\{|\eta|\leq 2|\gamma|\}} |\eta|^{\alpha-Q} d\eta.$$

下面, 我们将对它们进行逐一估计. 一方面, 根据命题3中的式(2.3), 我们能估计

$$\int_{\Omega\cap\{|\eta|\geq 2|\gamma|\}} ||\eta\gamma|^{\alpha-Q} - |\eta|^{\alpha-Q}| d\eta \leq C \int_{\Omega\cap\{|\eta|\geq 2|\gamma|\}} |\gamma||\eta|^{\alpha-Q-1} d\eta \leq C|\gamma|^{\alpha}. \tag{3.11}$$

因为$|\eta| \leq 2|\gamma|$, 所以由命题2中的式(2.2)可得: 存在一个常数$C \geq 1$, 使得$|\eta\gamma| \leq C(|\eta| + |\gamma|) \leq C(2|\gamma| + |\gamma|) = 3C|\gamma|$. 因而, 我们可以估计

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\cap\{|\eta|\leq 2|\gamma|\}} ||\eta\gamma|^{\alpha-Q} - |\eta|^{\alpha-Q}| d\eta &\leq \int_{\Omega\cap\{|\eta|\leq 2|\gamma|\}} |\eta\gamma|^{\alpha-Q} d\eta + \int_{\Omega\cap\{|\eta|\leq 2|\gamma|\}} |\eta|^{\alpha-Q} d\eta \\
&\leq \int_{\Omega\cap\{|\eta\gamma|\leq 3C|\gamma|\}} |\eta\gamma|^{\alpha-Q} d(\eta\gamma) + \int_{\Omega\cap\{|\eta|\leq 2|\gamma|\}} |\eta|^{\alpha-Q} d\eta \\
&\leq C|\gamma|^{\alpha}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

因此, 由(3.11)和(3.12)可推出

$$\int_{\Omega} ||\eta\gamma|^{\alpha-Q} - |\eta|^{\alpha-Q}| d\eta \leq C|\gamma|^{\alpha}. \tag{3.13}$$

另一方面, 我们可以估计

$$\int_{\Omega\cap\{|\eta|\geq 2|\gamma|\}} |\eta|^{\alpha-Q} d\eta \leq C|\gamma|^{\alpha} \tag{3.14}$$

和

$$\int_{\Omega\cap\{|\eta|\le 2|\gamma|\}} |\eta|^{\alpha-Q} d\eta \le C|\gamma|^{\alpha}. \tag{3.15}$$

所以, 根据(3.14)和(3.15), 我们有

$$\int_{\Omega} |\eta|^{\alpha-Q} d\eta \le C|\gamma|^{\alpha}. \tag{3.16}$$

将(3.13)和(3.16)代入(3.10)中, 得

$$|g(\xi\gamma)-g(\xi)| \le C\|g\|_{L^\infty(\Omega)}^{q'-1}|\gamma|^{\alpha},$$

换句话说, $\sup\limits_{\xi,\gamma}\frac{|g(\xi\gamma)-g(\xi)|}{|\gamma|^{\alpha}}<\infty$, 这表明当$0<\alpha<1$时, $g\in\Gamma^{\alpha}(\Omega)$.

情形ii. 对于$\alpha=1$, 我们需要验证$\sup\limits_{\xi,\gamma}\frac{|g(\xi\gamma)+g(\xi\gamma^{-1})-2g(\xi)|}{|\gamma|}<\infty$.

由$g\in L^\infty(\Omega)$和(3.8), 可得

$$\begin{aligned}
&|g(\xi\gamma)+g(\xi\gamma^{-1})-2g(\xi)| \\
&=|\int_{\Omega}\frac{G(\xi\gamma)g^{q'-1}(\eta)G(\eta)}{|\eta^{-1}\xi\gamma|^{Q-\alpha}}d\eta+\int_{\Omega}\frac{G(\xi\gamma^{-1})g^{q'-1}(\eta)G(\eta)}{|\eta^{-1}\xi\gamma^{-1}|^{Q-\alpha}}d\eta-2\int_{\Omega}\frac{G(\xi)g^{q'-1}(\eta)G(\eta)}{|\eta^{-1}\xi|^{Q-\alpha}}d\eta| \\
&\le C\|g\|_{L^\infty(\Omega)}^{q'-1}|\int_{\Omega}(G(\xi\gamma)|\eta^{-1}\xi\gamma|^{\alpha-Q}+G(\xi\gamma^{-1})|\eta^{-1}\xi\gamma^{-1}|^{\alpha-Q}-2G(\xi)|\eta^{-1}\xi|^{\alpha-Q})d\eta| \\
&\le C\|g\|_{L^\infty(\Omega)}^{q'-1}|\int_{\Omega}(G(\xi\gamma)|\eta\gamma|^{\alpha-Q}+G(\xi\gamma^{-1})|\eta\gamma^{-1}|^{\alpha-Q}-2G(\xi)|\eta|^{\alpha-Q})d\eta| \\
&\le C\|g\|_{L^\infty(\Omega)}^{q'-1}\int_{\Omega}|G(\xi\gamma)|\eta\gamma|^{\alpha-Q}+G(\xi\gamma^{-1})|\eta\gamma^{-1}|^{\alpha-Q}-2G(\xi)|\eta|^{\alpha-Q}|d\eta \\
&\le C\|g\|_{L^\infty(\Omega)}^{q'-1}(\int_{\Omega}G(\xi\gamma)|\eta\gamma|^{\alpha-Q}d\eta+\int_{\Omega}G(\xi\gamma^{-1})|\eta\gamma^{-1}|^{\alpha-Q}d\eta+2\int_{\Omega}G(\xi)|\eta|^{\alpha-Q}d\eta) \\
&\le C\|g\|_{L^\infty(\Omega)}^{q'-1}\int_{\Omega}(|\eta\gamma|^{\alpha-Q}+|\eta\gamma^{-1}|^{\alpha-Q}+|\eta|^{\alpha-Q})d\eta \\
&= C\|g\|_{L^\infty(\Omega)}^{q'-1}[\int_{\Omega}(|\eta\gamma|^{\alpha-Q}+|\eta\gamma^{-1}|^{\alpha-Q}-2|\eta|^{\alpha-Q})d\eta+3\int_{\Omega}|\eta|^{\alpha-Q}d\eta] \\
&\le C\|g\|_{L^\infty(\Omega)}^{q'-1}(\int_{\Omega}||\eta\gamma|^{\alpha-Q}+|\eta\gamma^{-1}|^{\alpha-Q}-2|\eta|^{\alpha-Q}|d\eta+3\int_{\Omega}|\eta|^{\alpha-Q}d\eta).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

分解

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega}||\eta\gamma|^{\alpha-Q}+|\eta\gamma^{-1}|^{\alpha-Q}-2|\eta|^{\alpha-Q}|d\eta &= \int_{\Omega\cap\{|\eta|\ge 2|\gamma|\}}||\eta\gamma|^{\alpha-Q}+|\eta\gamma^{-1}|^{\alpha-Q}-2|\eta|^{\alpha-Q}|d\eta \\
&\quad+\int_{\Omega\cap\{|\eta|\le 2|\gamma|\}}||\eta\gamma|^{\alpha-Q}+|\eta\gamma^{-1}|^{\alpha-Q}-2|\eta|^{\alpha-Q}|d\eta.
\end{aligned}$$

现在, 我们将对它们进行逐一估计. 一方面, 根据命题3中的式(2.4), 我们能估计

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega\cap\{|\eta|\geq 2|\gamma|\}} ||\eta\gamma|^{\alpha-Q}+|\eta\gamma^{-1}|^{\alpha-Q}-2|\eta|^{\alpha-Q}|d\eta \\
&\leq C\int_{\Omega\cap\{|\eta|\geq 2|\gamma|\}} |\gamma|^2|\eta|^{\alpha-Q-2}d\eta \\
&= C|\gamma|^2\int_{\Omega\cap\{|\eta|\geq 2|\gamma|\}} |\eta|^{\alpha-Q-2}d\eta \\
&\leq C|\gamma|^{\alpha}.
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

另一方面, 因为$|\eta|\leq 2|\gamma|$, 这意味着$|\eta|\leq 2|\gamma^{-1}|$, 所以由命题2中的式(2.2), 可推断出: 存在一个常数$C\geq 1$, 使得

$$|\eta\gamma|\leq C(|\eta|+|\gamma|)\leq C(2|\gamma|+|\gamma|)=3C|\gamma|$$

以及

$$|\eta\gamma^{-1}|\leq C(|\eta|+|\gamma^{-1}|)\leq C(2|\gamma^{-1}|+|\gamma^{-1}|)=3C|\gamma^{-1}|.$$

因而, 我们可以估计

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega\cap\{|\eta|\leq 2|\gamma|\}} ||\eta\gamma|^{\alpha-Q}+|\eta\gamma^{-1}|^{\alpha-Q}-2|\eta|^{\alpha-Q}|d\eta \\
&\leq \int_{\Omega\cap\{|\eta|\leq 2|\gamma|\}} |\eta\gamma|^{\alpha-Q}d\eta+\int_{\Omega\cap\{|\eta|\leq 2|\gamma|\}} |\eta\gamma^{-1}|^{\alpha-Q}d\eta+2\int_{\Omega\cap\{|\eta|\leq 2|\gamma|\}} |\eta|^{\alpha-Q}d\eta \\
&\leq \int_{\Omega\cap\{|\eta\gamma|\leq 3C|\gamma|\}} |\eta\gamma|^{\alpha-Q}d(\eta\gamma)+\int_{\Omega\cap\{|\eta\gamma^{-1}|\leq 3C|\gamma^{-1}|\}} |\eta\gamma^{-1}|^{\alpha-Q}d(\eta\gamma^{-1})+2\int_{\Omega\cap\{|\eta|\leq 2|\gamma|\}} |\eta|^{\alpha-Q}d\eta \\
&\leq C|\gamma|^{\alpha}.
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

因此, 联合(3.18)和(3.19), 我们能得到

$$\int_{\Omega} ||\eta\gamma|^{\alpha-Q}+|\eta\gamma^{-1}|^{\alpha-Q}-2|\eta|^{\alpha-Q}|d\eta\leq C|\gamma|^{\alpha}. \tag{3.20}$$

随后, 将(3.16)和(3.20)代入(3.17)中, 可得

$$|g(\xi\gamma)+g(\xi\gamma^{-1})-2g(\xi)|\leq C\|g\|^{q'-1}_{L^{\infty}(\Omega)}|\gamma|^{\alpha},$$

也就是说, 当$\alpha=1$时, $\sup\limits_{\xi,\gamma}\frac{|g(\xi\gamma)+g(\xi\gamma^{-1})-2g(\xi)|}{|\gamma|^{\alpha}}<\infty$. 由此可推导出$g\in\Gamma^1(\Omega)$.

因此, 结合情形i和情形ii, 我们可以得到$g\in\Gamma^{\alpha}(\Omega)$, 其中$0<\alpha\leq 1$. 然后, 我们由命题5可得, 当$0<\alpha\leq 1$时, 有$g\in\Gamma^{\alpha}(\bar{\Omega})\subset C^{\frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega})$. 引理得证. □

定理1的证明 根据引理2和引理3, 我们可以得出: 对任意给定的$\lambda\in\mathbb{R}$, 方程(1.1)都有一个正解$f\in L^{\infty}(\bar{\Omega})\cup C(\bar{\Omega})$. 特别地, 当$0<\alpha\leq 1$时, 正解$f\in\Gamma^{\alpha}(\bar{\Omega})\subset C^{\frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega})$. 定理得证. □

4. 总结

在本文中，我们已经得到了在次临界$q_\alpha < q < 2$情形下，对任意给定的$\lambda \in \mathbb{R}$，方程(1.1)都有一个正解$f \in L^\infty(\bar{\Omega}) \cup C(\bar{\Omega})$. 特别地，当$0 < \alpha \leq 1$时，正解$f \in \Gamma^\alpha(\bar{\Omega}) \subset C^{\frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega})$. 除此之外，还有一些关于该非线性积分方程的问题有待解决，比如: $\mathbb{H}^n$有界区域上的与精确的反向HLS不等式有关的带权的负幂非线性积分方程(1.1)的正解的存在性，这里$0 < q < 1$, $\alpha > Q$, $0 < \beta < \alpha - Q$, $Q = 2n + 2$是$\mathbb{H}^n$的齐次维数，$\lambda \in \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{H}^n$是一个光滑的有界域且$G(\xi)$是$\bar{\Omega}$ 中的非负连续函数.

参考文献

[1] Chen, W. and Chen, X. (2014) Regularity of Positive Solutions for an Integral System on Heisenberg Group. *Journal of Mathematical Study*, **47**, 208-220. https://doi.org/10.4208/jms.v47n2.14.05

[2] Han, X., Lu, G. and Zhu, J. (2012) Hardy-Littlewood-Sobolev and Stein-Weiss Inequalities and Integral Systems on the Heisenberg Group. *Nonlinear Analysis*, **75**, 4296-4314. https://doi.org/10.1016/j.na.2012.03.017

[3] Folland, G.B. and Stein, E.M. (1974) Estimates for the $\bar{\partial}_b$ Complex and Analysis on the Heisenberg Group. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **27**, 429-522. https://doi.org/10.1002/cpa.3160270403

[4] Dragomir, S. and Tomassini, G. (2006) Differential Geometry and Analysis on CR Manifolds. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA.

[5] Stein, E.M. and Weiss, G. (1958) Fractional Integrals in n-Dimensional Euclidean Space. *Indiana University Mathematics Journal*, **7**, 503-514. https://doi.org/10.1512/iumj.1958.7.57030

[6] Lieb, E.H. (1983) Sharp Constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and Related Inequalities. *Annals of Mathematics*, **118**, 349-374. https://doi.org/10.2307/2007032

[7] Jerison, D. and Lee, J. (1988) Extremals for the Sobolev Inequality on the Heisenberg Group and the CR Yamabe Problem. *Journal of the American Mathematical Society*, **1**, 1-13. https://doi.org/10.1090/S0894-0347-1988-0924699-9

[8] Frank, R.L. and Lieb, E.H. (2012) Sharp Constants in Several Inequalities on the Heisenberg Group. *Annals of Mathematics*, **176**, 349-381. https://doi.org/10.4007/annals.2012.176.1.6

[9] Garofalo, N. and Lanconelli, E. (1992) Existence and Nonexistence Results for Semilinear Equations on the Heisenberg Group. *Indiana University Mathematics Journal*, **41**, 71-98. https://doi.org/10.1512/iumj.1992.41.41005

[10] Niu, P. (1999) Nonexistence for Semilinear Equations and Systems in the Heisenberg Group. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **240**, 47-59. https://doi.org/10.1006/jmaa.1999.6574

[11] Wang, W. (2001) Positive Solution of a Subelliptic Nonlinear Equation on the Heisenberg Group. *Canadian Mathematical Bulletin*, **44**, 346-354. https://doi.org/10.4153/CMB-2001-035-0

[12] Brezis, H. and Nirenberg, L. (1983) Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **36**, 437-477. https://doi.org/10.1002/cpa.3160360405

[13] Dou, J. and Zhu, M. (2019) Nonlinear Integral Equations on Bounded Domains. *Journal of Functional Analysis*, **277**, 111-134. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2018.05.020

[14] Bal, K. (2016) Uniqueness of a Positive Solution for a Quasilinear Elliptic Equation in Heisenberg Group. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2016**, 1-7.

[15] Huang, L., Chen, J. and Rocha, E.M. (2015) Multiple Non-Negative Solutions to a Semilinear Equation on Heisenberg Group with Indefinite Nonlinearity. *Boundary Value Problems*, **2015**, Article No. 165. https://doi.org/10.1186/s13661-015-0428-z

[16] Han, Y. (2020) An Integral Type Brezis-Nirenberg Problem on the Heisenberg Group. *Journal of Differential Equations*, **269**, 4544-4565. https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.03.032

[17] Folland, G.B. (1975) Subelliptic Estimates and Function Spaces on Nilpotent Lie Groups. *Arkiv för Matematik*, **13**, 161-207. https://doi.org/10.1007/BF02386204

[18] Thangavelu, S. (1998) Harmonic Analysis on the Heisenberg Group. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA.

[19] Han, Y. and Zhu, M. (2016) Hardy-Littlewood-Sobolev Inequalities on Compact Riemannian Manifolds and Applications. *Journal of Differential Equations*, **260**, 1-25. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.06.032