Advances in Applied Mathematics **应用数学进展, 2022, 11(5), 2436-2440**
Published Online May 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.115256

Hans汉斯

Beukers型多重积分的概率表示及应用

常桂松，徐　晨

东北大学数学系，辽宁 沈阳

收稿日期：2022年4月9日；录用日期：2022年5月3日；发布日期：2022年5月10日

摘　要

本文提出一种简单的变换公式将Beukers型多重积分转化为定积分。利用(0, 1)区间上均匀分布的乘积的函数的数学期望，提出了Beukers型多重积分的概率表示。基于这种概率表示，给出一些Beukers型多重积分的结论。

关键词

Beukers型多重积分，均匀分布，期望

Probabilistic Representations and Applications of Multiple Integrals of Beukers's Type

Guisong Chang, Chen Xu

Department of Mathematics, Northeastern University, Shenyang Liaoning

Received: Apr. 9th, 2022; accepted: May 3rd, 2022; published: May 10th, 2022

Abstract

In this paper, a simple transformation formula is derived, allowing multiple integrals of Beukers's type to be reduced. The probabilistic representation of multiple integrals of Beukers's type is introduced by the expectation of product of uniform random variables on (0, 1). Based on the probabilistic representation, some conclusions are given for multiple integrals of Beukers's type.

Keywords

Multiple Integrals of Beukers's Type, Uniform Distribution, Expectation

文章引用：常桂松，徐晨. Beukers 型多重积分的概率表示及应用[J]. 应用数学进展, 2022, 11(5): 2436-2440.
DOI: 10.12677/aam.2022.115256

1. 引言

F. Beukers [1]在 1979 年研究 Apery 常数 $\zeta(3)$ 的无理性时提出了二重积分

$$\zeta(2)=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{1}$$

其中 $\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$。由于 Riemann-Zeta 函数 $\zeta(s)$ 与特殊的组合数 Stirling 数，Bernoulli 数，Euler 数等有密切联系，(1)式中的积分引起了许多学者的研究兴趣。Sondow 利用级数展开与积分变换研究了类似 Beukers 型积分的欧拉常数的二重积分表示，并讨论了如何从 $\zeta(2)$ 的积分表示推广到 $\zeta(3)$ 的积分表示[2]。Glasser 利用积分区域的对称性结合积分变换的方法，把(1)式中的二重积分化为定积分，并讨论了 Hadjicostas's 猜想的证明[3]。Abel 和 Kushnirevych 推广了 Glasser 的结果，利用积分变换的方法把 Beukers 型多重积分转化为定积分，并给出了 Euler 数的积分表示[4]。孙平利用组合概率的方法研究了 Riemann-Zeta 函数与第一类无符号 Stirling 数之间的一种关系，给出了 Riemann-Zeta 函数的五阶和与六阶和计算[5] [6]。这些关于 Beukers 型积分的研究都是利用分析的方法，借助于复杂的积分换元公式，把多重积分转化为二重积分或定积分。复杂的积分换元公式难于寻找，且不同的积分将要构造不同的换元公式，结论具有局限性，不易推广。

本文提出一种不借助复杂的换元公式且具有一般性的方法，把 Beukers 型多重积分转化为定积分。本文主要利用概率论中随机变量的函数的数学期望，把 Beukers 型多重积分看作是多维随机变量的函数的数学期望，再利用随机变量的期望的定义中对应的积分，即可把 Beukers 型多重积分转化为定积分。文章先给出了 Abel 和 Kushnirevych 提出的推广的多重 Beukers 型积分转化定积分的简单变换，同时结合组合数学的方法，又给出了涉及多重 Beukers 型积分的一些组合表示。本文所提出的方法具有一般性，不需要对具体的 Beukers 型多重积分寻找具体的换元公式，并且比其他方法简单易于理解，将为研究 Beukers 型多重积分提供新的途径与思路。

2. 预备知识

记 $u_1,u_2,\cdots,u_k$ 是一组相互独立、并且同分布于区间 $(0,1)$ 上均匀分布的随机变量，它们有相同的概率密度函数

$$f(x)=1, 0<x<1.$$

及 n 阶原点矩

$$E\left(u_1^n\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^n f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}, n\ge 0.$$

区间 $(0,1)$ 上均匀分布的随机变量的乘积 V_k 定义为

$$V_k=u_1u_2\cdots u_k, k\ge 1,$$

易见 $0<V_k<1$，且随机变量 V_k 的概率密度函数在 Feller 的专著[7]中给出

$$f_k(x)=\frac{(-\ln x)^{k-1}}{(k-1)!},0<x<1.$$

设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x),g(x)$ 是一元博雷尔函数，定义随机变量 $Y=g(X)$，则

$$E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

上述随机变量函数的期望公式可以推广到多维随机变量的情形[8]，设随机向量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的联合概率密度函数为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，而 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 n 元博雷尔函数，则

$$E(g(X_1,X_2,\cdots,X_n))=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}g(x_1,x_2,\cdots,x_n)f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

3. 主要结果

定理 1 设 $h(x)$ 是区间 $(0,1)$ 上的一元博雷尔函数，则

$$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 h(x_1x_2\cdots x_k)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_k=\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\int_0^1 h(x)(\ln x)^{k-1}\mathrm{d}x,\tag{2}$$

这里 k 为大于等于 1 的自然数。

证明 设 $u_1,u_2,\cdots,u_k$ 是一组相互独立、并且同分布于区间 $(0,1)$ 上均匀分布的随机变量，则

$$E[h(u_1u_2\cdots u_k)]=\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 h(x_1x_2\cdots x_k)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_k$$

又因随机变量 $V_k=u_1u_2\cdots u_k$ 的密度函数为

$$p(x)=\frac{(-\ln x)^{k-1}}{(k-1)!},0<x<1.$$

所以

$$E[h(u_1u_2\cdots u_k)]=E[h(V_k)]=\int_0^1 h(x)\frac{(-\ln x)^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{d}x.$$

定理 1 得证。

注：定理 1 给出多重 Beukers 型积分化为定积分的证明相比于积分换元法更简洁，更容易理解。

推论 2 在定理 1 中，令 $h(x_1x_2\cdots x_k)=\dfrac{1}{1-x_1x_2\cdots x_k}$，即得

$$\zeta(k)=\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{1}{1-x_1x_2\cdots x_k}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_k=\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\int_0^1\frac{1}{1-x}(\ln x)^{k-1}\mathrm{d}x,\tag{3}$$

证明 因为

$$\begin{aligned}&\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{1}{1-x_1x_2\cdots x_k}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_k\\&=E\left(\frac{1}{1-V_k}\right)=E\left(\sum_{m=0}^{\infty}(V_k)^m\right)=\sum_{m=0}^{\infty}E\left[(V_k)^m\right]=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)^k}=\zeta(k)\end{aligned}$$

另外，$E\left(\dfrac{1}{1-V_k}\right)=\dfrac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\int_0^1\dfrac{1}{1-x}(\ln x)^{k-1}\mathrm{d}x$。

推论 3 在定理 1 中，令 $h(x_1x_2\cdots x_k)=\dfrac{e^{x_1x_2\cdots x_k z}}{\ln^{k-1}(x_1x_2\cdots x_k)}$，这里 $z\neq 0$，则有

$$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{e^{x_1x_2\cdots x_k z}}{\ln^{k-1}(x_1x_2\cdots x_k)}dx_1dx_2\cdots dx_k=(-1)^k\frac{e^z-1}{z\cdot(k-1)!}. \tag{4}$$

证明 因为

$$\begin{aligned}&\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{e^{x_1x_2\cdots x_k z}}{\ln^{k-1}(x_1x_2\cdots x_k)}dx_1dx_2\cdots dx_k\\&=E\left[\frac{e^{V_k z}}{\ln^{k-1}(V_k)}\right]=\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\int_0^1\frac{e^{xz}}{(\ln x)^{k-1}}(\ln x)^{k-1}dx=(-1)^k\frac{e^z-1}{z\cdot(k-1)!}.\end{aligned}$$

推论 4 在定理 1 中，令 $h(x_1x_2\cdots x_k)=\dfrac{(x_1x_2\cdots x_k)^m}{1-x_1x_2\cdots x_k}$，则有

$$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{(x_1x_2\cdots x_k)^m}{1-x_1x_2\cdots x_k}dx_1dx_2\cdots dx_k=\zeta(k)-\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l^k}. \tag{5}$$

证明 因为

$$\begin{aligned}&\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{(x_1x_2\cdots x_k)^m}{1-x_1x_2\cdots x_k}dx_1dx_2\cdots dx_k\\&=E\left[\frac{V_k^m}{1-V_k}\right]=E\sum_{l=0}^{\infty}V_k^{m+l}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(m+l+1)^k}=\zeta(k)-\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l^k}.\end{aligned}$$

特别地

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{(xyz)^2}{1-xyz}dxdydz=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1-x}(-\ln x)^2dx=\zeta(3)-\sum_{l=1}^{2}\frac{1}{l^3}=\zeta(3)-\frac{9}{8}.$$

4. 结论

由以上的结论可以看到，利用 Beukers 型积分的概率表示，可以给出一类多重 Beukers 型积分转化定积分的简单证明。另外，借助于概率论的技巧，得到一些多重积分化为定积分的计算公式。这些结论说明，利用概率工具可以研究一些多重积分的计算。对于一些多重积分的计算，可以通过其对应的被积函数，先转化为随机变量特殊函数的期望，再利用随机变量的数学期望的结论与性质，得到多重积分的定积分表示，这种方法为多重积分的研究与计算提供了一个新的研究视角和途径。

参考文献

[1] Beukers, F. (1979) A Note on the Irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **11**, 268-272. https://doi.org/10.1112/blms/11.3.268

[2] Sondow, J. (2005) Double Integrals for Euler's Constant and ln(4/π) and an Analog of Hadjicostas's Formula. *The American Mathematical Monthly*, **112**, 61-65. https://doi.org/10.1080/00029890.2005.11920168

[3] Glasser, M.L. (2019) A Note on Beukers's and Related Double Integrals. *The American Mathematical Monthly*, **126**, 361-363. https://doi.org/10.1080/00029890.2019.1565856

[4] Abel, U. and Kushnirevych, V. (2020) Reducing Multiple Integrals of Beukers's Type. *The American Mathematical Monthly*, **127**, 918-926. https://doi.org/10.1080/00029890.2020.1815477

[5] 孙平. $\zeta(k)$的部分和五阶和式的计算[J]. 数学学报, 2003, 46(2): 297-302.

[6] 孙平. Riemann zeta 函数的六阶和[J]. 数学学报, 2007, 50(2): 373-384.
[7] Feller, W. (1971) An Introduction to Probability Theory and Its Applications Vol. II. John Wiley & Wiley, New York.
[8] 李贤平. 概率论基础(第三版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.