

大豆和玉米单、间作的氮养分吸收的微分方程建模

段国梅, 化存才*

云南师范大学, 数学学院, 云南 昆明

收稿日期: 2022年6月13日; 录用日期: 2022年7月8日; 发布日期: 2022年7月15日

摘要

大豆和玉米的氮素吸收量对于提高它们的产量有着重要的意义。在本文中, 首先建立了大豆和玉米单作时的氮素吸收量的Logistic微分方程模型(称为单作模型), 单作模型的数值模拟分析得出大豆和玉米单作生长的几点结论。进一步, 建立了大豆和玉米间作时氮素吸收量的二维微分方程模型(称为间作模型), 利用线性稳定性理论证明了唯一的正平衡点是稳定的结点。同时也在参数的一定条件下证明了间作玉米的氮吸收量, 以及玉米和大豆的氮吸收总量都大于单作, 因而使得间作最终呈现作物增产优势。间作模型的数值结果表明: 1) 大豆的氮素吸收量的高峰时间出现在84天左右, 玉米的氮素吸收量的高峰时间出现在71天左右。玉米与大豆对氮素吸收高峰时间是错开的, 适合间作; 2) 在选取合适的参数下, 得到的唯一稳定正平衡点是(1.24, 4.29)。因此, 在间作条件下, 大豆的氮素吸收量为1.24 g, 比单作大豆减少了26.19%; 但是, 间作玉米的氮素吸收量为4.29 g, 比单作玉米增加了20.17%, 特别地, 间作大豆和玉米两者的氮吸收总量增加了5.33%, 这就表明, 间作产生了氮素吸收量的优势。

关键词

大豆, 玉米, 氮素吸收量, 间作, 微分方程模型

Differential Equation Modeling of Nitrogen Nutrient Uptake of Soybean and Maize in Their Mono- and Intercroppings

Guomei Duan, Cuncai Hua*

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan

Received: Jun. 13th, 2022; accepted: Jul. 8th, 2022; published: Jul. 15th, 2022

*通讯作者。

Abstract

The amount of Nitrogen uptake of soybeans and maize is important for increasing their yields. In this paper, Logistic differential equation models (namely monocropping models) are established firstly for nitrogen uptake of soybean and maize as monocropping respectively. Several conclusions about the growth of soybean and maize monocroppers are given by numerical simulation analysis of the monocropping models. Furthermore, a two-dimensional differential equation model (namely intercropping model) is established for the nitrogen uptake of the soybean and maize as intercropping. By using the linear stability theory, the unique positive equilibrium point is proved as stable node. At the same time, it is proved that the amount of Nitrogen uptake of intercropping maize, as well as the total amount of Nitrogen uptake of intercropping maize and soybean is larger than that of monocropping under certain condition of parameters, so the intercropping takes advantage in increasing productions finally. Numerical results of the intercropping model show that: 1) the peak nitrogen uptake of soybeans occurs around the 84th day, and the peak time for nitrogen uptake of maize occurs around 71st day. The peak time of nitrogen uptake of maize and soybean is staggered, so they are suitable for intercropping; 2) the unique stable positive equilibrium point is obtained (1.24, 4.29) under the selection of suitable parameters. Therefore, under intercropping conditions, the nitrogen uptake of soybeans is 1.24 g, which is less than that of monocropping soybeans by 26.19%; however, the nitrogen uptake of intercropping maize is 4.29 g, which is higher than that of monocropping maize by 20.17%, and the total nitrogen uptake of intercropping soybeans and corn increases by 5.33%. This shows that intercropping results in the advantages of nitrogen uptake.

Keywords

Soybean, Maize, Nitrogen Uptake, Intercropping, Differential Equation Model

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

大豆是我国的主要粮食和油料作物之一,也是世界上产量最大的油料作物。大豆有极高的营养价值,含有 40%左右的蛋白质,以及人类所不能合成的 8 种氨基酸,素有“完美蛋白”之美称,是人类食用蛋白和动物蛋白质饲料的主要来源。大豆的脂肪含量有 20%左右,在豆油中富含不饱和脂肪酸,可以降低人的血清胆固醇,是优质的保健食用油[1]。玉米是我国的主要粮食和饲料作物,作为五谷之一,含有多种维生素和多种矿物质元素。玉米产量对我国经济社会稳定有着巨大的影响。

氮素是植物体内蛋白质、核酸、磷脂和某些生长激素的重要组成部分之一,对作物生长及最终结出果实产量的贡献为 40%~50% [2]。然而,氮素的过量施用却带了严重的负面影响,比如地下水硝酸盐污染和江河湖泊的富营养化的。将禾本科与豆科的作物间作具有提高禾本科作物氮素含量的作用。与单作相比,间作系统的优势显现,如玉米和大豆的间作优势不仅表现为提高产量和间作作物的氮、磷、钾养分吸收量,而且还可提高土壤肥力和肥料利用率,以实现自然资源的可持续利用。

在农学领域,对大豆和玉米单、间作的氮素吸收量已经有相关农业生产实践基础,在氮素吸收方面,取得了以下一些研究结果:董钻等[3]研究得出,大豆对钾的最大吸收速率出现的时间早于对氮、磷的吸

收, 氮约在出苗后的第 70 天左右。何萍等[4]研究得出, 玉米养分吸收总量的增长过程呈不对称的“S”型曲线, 符合 Logistic 方程, 肥料用量可明显地影响到玉米养分吸收最大速率及其出现日期。宋海星等[5]结果表明养分吸收量随生育期延长而持续增加, 变化动态可用“S”型曲线方程拟合, 并发现水分和氮素供应虽然增加了养分吸收速率和干物质累积速率, 但是未改变其变化趋势。王立刚等[6]的研究表明, 大豆氮素最高吸收速率出现在结荚期至鼓粒期, 吸收量可达 15.17 mg/株左右。人们经过大量的生产实践和科学研究发现, 间作成为一种重要的种植方式的原因是间作作物在空间和时间上能更好地利用土壤的水、肥、气、热等自然资源[7] [8]。间作可以显著地改善农作物的氮素营养, 进而提高系统的氮素吸收量, 吕越[9]的研究表明, 在玉米和大豆两作物间作生长的过程中, 玉米对氮素吸收能力比大豆强, 且间作玉米的氮素吸收量大于单作玉米, 但是, 间作大豆对氮素的吸收能力处于劣势, 且间作大豆的氮素吸收量小于单作大豆。

在数学交叉应用的生物数学领域, 将植物或农作物生长发育上升为微分方程建模研究具有极其重要的理论和应用意义。为此, 近十年来, 国内许多学者相继进行了相关的研究。例如, 2012 年, 张林等建立了描述在 UV-B 辐射影响下烤烟株高生长形态的非自治 Logistic 模型, 数值模拟揭示出紫外线辐射显著地影响了烤烟植株的生长形态[10]; 2013 年, 刘春等在能量模型的基础上, 建立了水稻生物量和气温变化的二维 Logistic 微分方程模型, 数值模拟得出: 水稻的最大生长率出现时间为水稻分蘖后期、孕穗期[11]; 2014 年, 符云锦根据农作物生长因素与药物控制机理之间的关系, 建立了农作物生长质量的常微分方程模型[12]; 2019 年, 李文斌基于植物声频影响水稻分蘖期生长的农业研究成果, 建立了含有植物声频的一阶、二阶 Logistic 微分方程模型, 数值模拟表明, 二阶微分方程模型能更好、更准确地模拟了水稻的实际分蘖生长情况[13]; 2019 年, 李德盛以番茄为例, 主要考虑植物生长的碳氮养分而建立了碳氮需求比例一室模型[14]; 2021 年, 张沥以番茄为例, 增加考虑钾元素和植物声频影响作用, 建立了植物生长的碳氮钾需求比例的一室模型[15]; 2021 年, 梁仕军研究了花生与玉米间作增产和抗旱的问题, 建立了花生和玉米间作的二维微分方程模型, 数值模拟得出在花生和玉米的间作体系中, 花生干物质积累量略低于单作花生的积累量, 而玉米的干物质积累量却高于单作玉米的干物质积累量, 且两者的总量之和高于单作总量[16], 表明间作模型的合理性和有效性。

综上所述, 农学领域对大豆和玉米单、间作的氮素吸收量已有相关的研究和农业生产实践基础, 数学领域也有少量利用微分方程模型及其数值模拟对农作物的干物质以及生物量、株高等的研究, 但是, 利用微分方程建模方法研究在玉米和大豆间作系统中的氮素吸收量是一个有待于解决的问题。

本论文的目的, 就是通过建立描述玉米和大豆在单作和间作时的氮养分吸收的微分方程模型, 以深入本质认识两种作物对氮养分吸收动态变化规律, 为提高产量提出合理有效调控作物生长发育的措施和建议。

2. 大豆、玉米单作时氮素吸收量的微分方程模型

养分吸收是干物质形成的前提和基础, 干物质积累量越大, 产量越高。氮素吸收量直接影响着大豆的产量, 玉米对肥料的吸收, 特别是对氮肥的吸收直接影响着玉米的生长发育和产量的形成, 因此, 研究大豆和玉米的氮素吸收量对于提高它们的产量有着重要的意义。在本节中, 主要考虑在大豆和玉米单作时氮素吸收速率如何随着时间变化的问题, 从而分别建立大豆与玉米氮素吸收量的 Logistic 微分方程模型。

2.1 大豆单作时氮素吸收量的微分方程模型

2.1.1. 模型的建立

通过对大豆生育阶段的氮素吸收量的分析, 我们得到以下两个基本事实[9]:

- F1) 单株大豆对氮素的吸收量是作物产量形成的基础, 与经济产量成显著正相关;
 F2) 单株大豆对氮素的吸收量在其生育前期缓慢增长, 随后迅速增长, 在生育后期又逐渐减缓, 呈“S”型增长。

基于以上两个基本事实, 我们有如下合理假设:

- H1) 大豆对氮素的吸收量呈“S”型增长, 变化动态符合Logistic方程模型的特征;
 H2) 大豆种植中温度、光照、水分等因素对大豆生长发育的影响饱和;
 H3) 大豆氮素吸收速率 r_s 是常数;
 H4) 大豆氮素吸收量的最大值不变, 记氮素最吸收量为 K_s 。

设大豆生长到第 t 天在单位面积上吸收的氮素总量为 $X(t)$, 则根据以上基本事实和假设, 我们有大豆对氮素吸收量的如下Logistic微分方程模型:

$$\frac{dX}{dt} = r_s X \left(1 - \frac{X}{K_s} \right) \quad (1)$$

记(1)的右端为 $f(X)$, 由 $f(X) = 0$ 得到两个平衡点: $X_1 = 0$, $X_2 = K_s$ 。

由于 $f'(X) = r_s - \frac{2r_s X}{K_s}$, $f'(0) = r_s > 0$, $f'(K_s) = -r_s < 0$, 故根据微分方程线性稳定性定理[17], 平衡点 $X_1 = 0$ 不稳定, 而平衡点 $X_2 = K_s$ 是稳定的。

假定初始值为 $X(t_0) = X_0$, 利用分离变量法, 得到满足方程(1)的特解为:

$$X(t) = \frac{K_s}{1 + \left(\frac{K_s}{X_0} - 1 \right) e^{-r_s(t-t_0)}} \quad (2)$$

2.1.2. 数值模拟

由参考文献[18]进行整理, 得到大豆氮素吸收量的数据:

Table 1. Data on nitrogen uptake in soybeans

表 1. 大豆氮素吸收量的数据

t/day	48	60	80	110	140
$X/\text{g}\cdot\text{plant}^{-1}$	0.13	0.26	0.71	1.4	1.68

由表 1 可知, 微分方程(1)的初始条件为 $X(48) = 0.13$, 参数 $K_s = 1.68$, 此时(2)有解:

$$X(t) = \frac{1.68}{1 + 12e^{-r_s(t-48)}} \quad (3)$$

利用(3)进行数据拟合的得到参数 $r_s = 0.07$, 于是, 我们有描述大豆氮素吸收量变化的微分方程模型(1)的如下初始问题:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = 0.07X \left(1 - \frac{X}{1.68} \right) \\ X(48) = 0.13 \end{cases} \quad (4)$$

利用 MATLAB 画图及参数拟合, 我们得到(4)的数值结果如图 1 所示, 求得实验值与数值模拟的相关系数 $R^2 = 0.9989$, 这说明通过选取的参数模拟出来数值与实验值非常吻合。

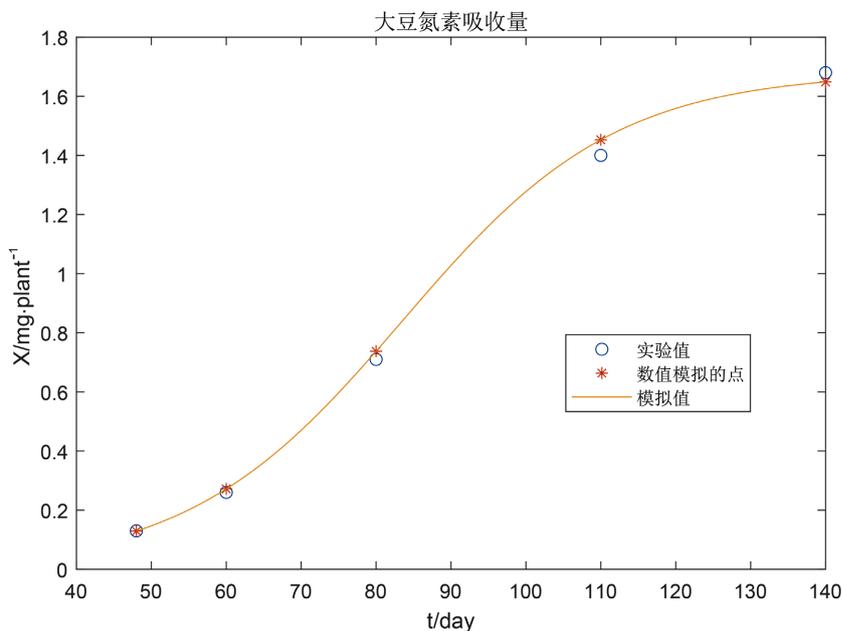


Figure 1. Numerical simulation results of initial value problem (4)
图 1. 初值问题(4)的数值模拟结果

计算得到方程(3)二阶导数和三阶导数零点的时间分别是：64.83；83.64；102.46。

我们有以下几点结论：

1) 大豆不同生育阶段氮素的吸收量不同，其中苗期到开花期氮素吸收量为 0.252 g，占总吸收量的 15%。开花期到结荚期的氮素吸收量为 0.4704 g，占总吸收量的 28%，结荚期到鼓粒期的氮素吸收量为 0.9072 g，占总吸收量的 54%，鼓粒期到成熟期的氮素吸收量为 0.0504 g，占总吸收量的 3%；

2) 由方程(2.3)得二阶导数的零点为 83.64，因此大豆对氮素的最高吸收速率出现在 84 天左右(结荚期)，结荚期至鼓粒期是大豆氮素吸收量最多的时期，氮素吸收量约占总量的 54%，说明该阶段是大豆需氮的关键时期，此阶段缺氮对大豆产量的影响最大。因此，大豆在结荚期之前追加适量氮肥，可以满足结荚期至鼓粒期的需氮量，适宜的施氮量有助于提高大豆植株花荚数，促进干物质积累，进而获得较高的产量；

3) 在大豆开花期追加适量氮肥；

4) 结荚期是大豆营养生长与生殖生长最旺盛的时期，也是氮素吸收量最快的时期。

2.2. 玉米单作氮素吸收量的微分方程模型

2.2.1. 模型的建立

玉米单株氮素吸收量生育前期缓慢增长，随后迅速增长，生育后期又逐渐减缓，呈“S”型增长。变化动态符合Logistic方程模型的特征。

设玉米于第 t 天在单位面积上吸收的氮素总量 $Y(t)$ ，氮素最大吸收量为 K_M ，吸收速率为 r_M （常数），我们有玉米氮素吸收量的微分方程模型：

$$\frac{dY}{dt} = r_M Y \left(1 - \frac{Y}{K_M} \right) \quad (5)$$

假定初始值为 $Y(t_0) = Y_0$ ，利用分离变量法，得到满足方程(5)的特解为：

$$Y = \frac{K_M}{1 + \left(\frac{K_M}{Y_0} - 1\right) e^{-r_M(t-t_0)}} \quad (6)$$

2.2.2. 数值模拟

由参考文献[18]整理, 得到玉米氮素吸收量的如下数据:

Table 2. Data on nitrogen uptake in maize

表 2. 玉米氮素吸收量的数据

t/day	48	60	80	110	140
$X/\text{g}\cdot\text{plant}^{-1}$	0.26	1.02	2.55	3.32	3.57

由表 2 可知, 微分方程(5)的初始条件为 $X(48)=0.26$, 参数 $K_M=3.57$, 代入(6)得方程(5)的初值问题的特解为:

$$Y = \frac{3.57}{1 + 13e^{-r_M(t-48)}} \quad (7)$$

利用 MATLAB 对(7)进行数据拟合的得到参数 $r_M=0.11$, 我们有描述玉米氮素吸收量变化的微分方程模型(6)的如下初始问题:

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = 0.11Y \left(1 - \frac{Y}{3.57}\right) \\ Y(48) = 0.26 \end{cases} \quad (8)$$

利用 MATLAB 画图及参数拟合, 我们得到(8)的数值结果如图 2 所示, 求得实验值与数值模拟的相关系数 $R^2=0.9893$, 这说明通过选取的参数模拟出来数值与实验值非常吻合。

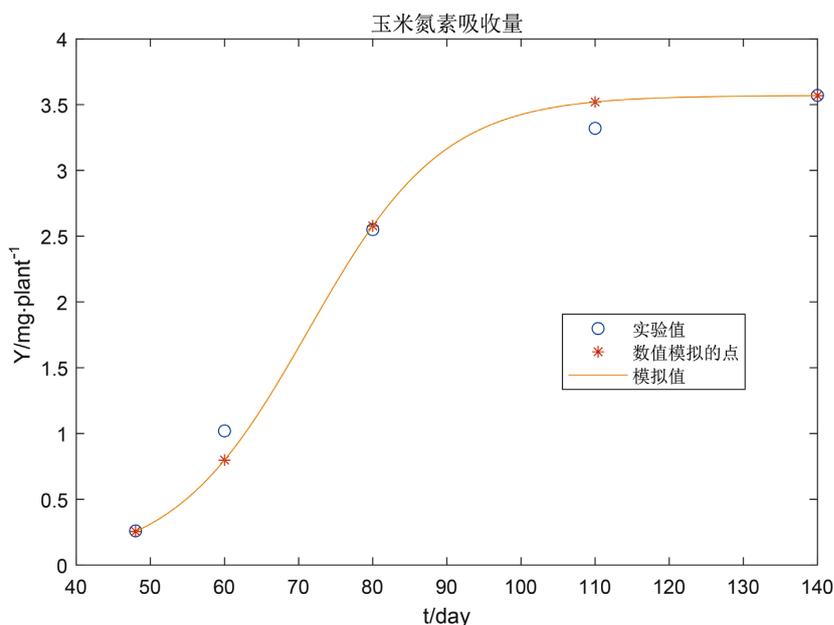


Figure 2. Numerical simulation results of initial value problem (8)

图 2. 初值问题(8)的数值模拟结果

由方程(7)得二阶导数和三阶导数的零点分别是: 59.33; 71.30; 83.28。

我们有以下几点结论:

1) 由方程(3)得二阶导数的零点为 83.64, 因此大豆对氮素吸收的高峰时间出现在 84 天左右, 由方程(8)得二阶导数的零点为 71.30, 所以玉米对氮素吸收的高峰时间出现在 71 天左右。玉米与大豆对氮素吸收高峰时间是错开的, 玉米对氮素吸收的高峰时间早于大豆, 玉米对氮养分的吸收能力强于大豆;

2) 由方程(8)得三阶导数的零点为 59.33, 83.28, 其中 59.33 为玉米氮素吸收量最快的起始时间, 83.28 为玉米氮素吸收量最快的终止时间, 在第 60 天到 83 天是玉米氮素吸收量最快的时间段。在第 60 天(吐丝期)左右是玉米氮素吸收量加速的起点, 在第 71 天左右(灌浆期)是玉米氮素吸收量的拐点, 在第 83 天左右(乳熟期)是玉米氮素吸收量的增速达到终点。在第 83 天以后玉米氮素吸收量的缓慢增长, 在第 140 天(收获期)达到玉米氮素吸收量的终点;

3) 在吐丝期追加适量氮肥。

3. 大豆/玉米间作时氮素吸收量的微分方程模型

农学研究和农业生产实践表明, 农作物的间作既可以减少农作物对化肥的需求, 也可以获得较高的产量和更高的经济效益, 其中的关键原因在于间作可以提高作物对养分的吸收和利用。因此, 从氮素吸收方面揭示大豆、玉米间作的产量优势, 可为间作体系的持续高产, 且进一步优化玉米、大豆间作体系施肥提供理论依据。然而, 针对间作系统过程内在的养分机理, 目前还没有文献从建立微分方程组模型来加以阐释并提供可靠的理论依据。

事实上, 在玉米、大豆间作体系中, 间作玉米的产量高于玉米单作的产量, 间作大豆的产量低于大豆单作的产量, 但二者间作的产量之和大于单作的产量。通过建立微分方程模型来研究两种农作物间作系统在地下土壤中的植物吸收营养竞争, 从而可揭示为什么间作条件下玉米的产量比单作时的产量高的本质。在两作物共生期, 玉米对氮养分的吸收能力比大豆强, 吸收量大于单作, 同时, 大豆对氮养分的吸收能力处于劣势, 吸收量小于单作。基于此, 本节主要建立玉米、大豆间作的氮素吸收量的二维微分方程模型, 从氮肥吸收方面来揭示间作优势。

3.1. 间作模型的建立

由参考文献[9]总结得到如下基本事实:

F1) 间作可以改善农作物的氮素营养, 进而提高氮素吸收量;

F2) 在间作模式下, 玉米比大豆表现出更强的竞争力;

F3) 大豆和玉米的间作既存在着竞争作用也存在着促进作用, 但竞争作用小于促进作用, 表现为间作优势;

F4) 玉米/大豆间作显著地提高了氮素当量比($LER_N > 1$), 表现出间作吸收氮素的优势;

基于以上基本事实, 我们做出以下合理假设:

H1) 大豆和玉米的氮素吸收量都是呈“S”型增长, 符合Logistic模型;

H2) 大豆和玉米间作, 玉米竞争力比大豆强, 在土壤养分中大豆为玉米提供氮素, 提高了玉米的氮素吸收量, 而大豆的竞争力弱, 玉米吸收了大豆的氮素, 从而使大豆氮素吸收量减少;

H3) 不考虑大豆间的竞争, 玉米间的竞争, 而只考虑交互区一株大豆和一株玉米之间的生长促进和抑制关系;

设大豆在 t 时刻氮素的吸收量为 $X(t)$, 单作时的最大值为 K_S , 吸收速率为 r_S ; 玉米在 t 时刻氮素的吸收量为 $Y(t)$, 单作时的最大值为 K_M , 吸收速率为 r_M 。于是, 根据假设, 我们建立大豆/玉米间作的如下

二维微分方程模型:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = r_s X \left(1 - \frac{X}{K_s} - \alpha \frac{Y}{K_M} \right) \\ \frac{dY}{dt} = r_M Y \left(1 - \frac{Y}{K_M} + \beta \frac{X}{K_s} \right) \end{cases} \quad (9)$$

其中 $r_s = 0.07$, $K_s = 1.68$, $r_M = 0.11$, $K_M = 3.57$ 仍然沿用前面第 2 节中的, $0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$ 均是常数。

3.2. 唯一正平衡点的稳定性分析

令 $g(X, Y) = r_s X \left(1 - \frac{X}{K_s} - \alpha \frac{Y}{K_M} \right)$, $h(X, Y) = r_M Y \left(1 - \frac{Y}{K_M} + \beta \frac{X}{K_s} \right)$, 则雅可比矩阵为:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial X} & \frac{\partial g}{\partial Y} \\ \frac{\partial h}{\partial X} & \frac{\partial h}{\partial Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_s \left(1 - \frac{2X}{K_s} - \alpha \frac{Y}{K_M} \right) & -r_s \alpha \frac{X}{K_M} \\ r_M \beta \frac{Y}{K_s} & r_M \left(1 - \frac{2Y}{K_M} + \beta \frac{X}{K_s} \right) \end{bmatrix}$$

由 $g(X, Y) = 0, h(X, Y) = 0$ 得到微分方程模型(9)的两个平衡点为:

$$P_1(0, 0); P_2 \left(\frac{K_s(1-\alpha)}{1+\alpha\beta}, \frac{K_M(1+\beta)}{1+\alpha\beta} \right)$$

记 $X^* = \frac{K_s(1-\alpha)}{1+\alpha\beta}, Y^* = \frac{K_M(1+\beta)}{1+\alpha\beta}$, 则正平衡点 $P_2(X^*, Y^*)$, 且有 $X^* < K_s, Y^* > K_M$;

在正平衡点 (X^*, Y^*) 处的特征方程为:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - r_s \left(1 - \frac{2X^*}{K_s} - \alpha \frac{Y^*}{K_M} \right) & r_s \alpha \frac{X^*}{K_M} \\ -r_M \beta \frac{Y^*}{K_s} & \lambda - r_M \left(1 - \frac{2Y^*}{K_M} + \beta \frac{X^*}{K_s} \right) \end{vmatrix} = 0$$

即: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

其中 $p = -\left(\frac{\partial g}{\partial X} + \frac{\partial h}{\partial Y} \right) = -\left[r_s \left(1 - \frac{2X^*}{K_s} - \alpha \frac{Y^*}{K_M} \right) + r_M \left(1 - \frac{2Y^*}{K_M} + \beta \frac{X^*}{K_s} \right) \right] = \frac{1-\alpha}{1+\alpha\beta} r_s + \frac{1+\beta}{1+\alpha\beta} r_M$;

$q = \det A = r_M r_s \left[\left(1 - \frac{2X^*}{K_s} - \alpha \frac{Y^*}{K_M} \right) \left(1 - \frac{2Y^*}{K_M} + \beta \frac{X^*}{K_s} \right) + \frac{\alpha\beta}{K_M K_s} X^* Y^* \right] = \frac{(1-\alpha)(1+\beta)}{1+\alpha\beta} r_M r_s$

此时特征方程为:

$$\lambda^2 + \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha\beta} r_s + \frac{1+\beta}{1+\alpha\beta} r_M \right) \lambda + \frac{(1-\alpha)(1+\beta)}{1+\alpha\beta} r_s r_M = 0 \quad (10)$$

解得:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha\beta} r_s + \frac{1+\beta}{1+\alpha\beta} r_M \right) \pm \sqrt{\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha\beta} r_s + \frac{1+\beta}{1+\alpha\beta} r_M \right)^2 - 4 \frac{(1-\alpha)(1+\beta)}{1+\alpha\beta} r_s r_M}}{2} < 0$$

由线性稳定性定理[17], 得唯一的正平衡点 $P_2(X^*, Y^*)$ 是稳定的结点。

现取微分方程中的初值和参数值为:

$$X(48) = 0.13, Y(48) = 0.26, \alpha = 0.1994, \beta = 0.2708.$$

此时, 由 $g(X, Y) = 0$, $h(X, Y) = 0$ 计算得到唯一正平衡点为 $(1.24, 4.29)$, 相应的特征方程为:

$$\lambda^2 + 0.18\lambda + 0.0072 = 0 \quad (11)$$

解得: $\lambda_1 = -0.12, \lambda_2 = -0.06$, 从而验证了唯一正平衡点为 $(1.24, 4.29)$ 是稳定的结点。

下面, 进一步从理论上证明: 当 $\beta > \frac{\alpha}{1-2\alpha}$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ 时, 必有 $X^* + Y^* > K_S + K_M$ 。

事实上, 当条件 $\beta > \frac{\alpha}{1-2\alpha}$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ 成立时, 有 $\beta(1-\alpha) \geq \alpha(1+\beta)$, 而 $K_M > K_S$, 故有:

$$\begin{aligned} X^* + Y^* &= \frac{K_S(1-\alpha)}{1+\alpha\beta} + \frac{K_M(1+\beta)}{1+\alpha\beta} \\ &= \frac{(1+\alpha\beta) - \alpha\beta - \alpha}{1+\alpha\beta} K_S + \frac{(1+\alpha\beta) - \alpha\beta + \beta}{1+\alpha\beta} K_M \\ &= K_S + K_M + \frac{\beta(1-\alpha)}{1+\alpha\beta} K_M - \frac{\alpha(1+\beta)}{1+\alpha\beta} K_S \\ &\geq K_S + K_M + \frac{\alpha(1+\beta)}{1+\alpha\beta} (K_M - K_S) \\ &\geq K_S + K_M \end{aligned}$$

归纳总结一下, 对于大豆和玉米的间作, $X^* < K_S$, $Y^* > K_M$ 和 $X^* + Y^* > K_S + K_M$ 表明, 尽管间作大豆的氮吸收量较间作减少, 但是, 间作玉米的氮素吸收量呈现出优势, 以及大豆和玉米两者总的氮素吸收量都大于, 因而间作使得玉米、玉米和大豆总量呈现增产优势。

模型(9)的数值模拟中, $\alpha = 0.1994$, $\beta = 0.2708$, 满足条件 $\beta > \frac{\alpha}{1-2\alpha} = 0.2619$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ 。

利用 MATLAB 编程, 得单间作氮素吸收量对比图如图 3 和图 4 所示。

由数值模拟结果可得如下结论:

1) 由图 3 和图 4 得: 在生育前期, 间作玉米和大豆与单作玉米和大豆相比单株氮素吸收量差异不显著, 但在生育后期, 间作大豆氮素吸收量低于单作, 间作玉米氮素吸收量则高于单作。

2) 大豆单作时的氮素吸收量为 1.68 g, 大豆间作时的氮素吸收量为 1.24 g, 比单作大豆减少了 26.19%; 单作玉米的氮素吸收量为 3.57 g, 间作玉米的氮素吸收量为 4.29 g, 比单作时的玉米增加了 20.17%, 特别地, 大豆和玉米单作时的总吸收量为 5.25 g, 大豆和玉米间作的总吸收量为 5.53 g, 间作的总吸收量比单作时增加了 5.33%。其中的主要原因是大豆固定的氮素大部分提供给玉米吸收利用, 使玉米对氮素的大量需求得到满足, 从而土壤中氮素的含量降低, 缓解了氮素含量高对固氮酶的活性抑制作用, 提高了大豆根瘤的固氮量和固氮效率, 缓解了大豆在间作系统中的劣势地位。

3) 间作微分方程模型(9)的正平衡点 P_2 是稳定的结点, 表明大豆和玉米间作是有效的, 氮素吸收量增加, 使氮素得到了充分的利用。

4) 玉米与大豆间作是一种具有明显间作产量优势的种植方式, 其优势在于氮素的吸收利用上, 主要表现为玉米对氮的竞争吸收能力比大豆强, 间作玉米的氮素养分吸收量的增加是其提高产量的基础。大豆通过自身固氮和略微的降低自身吸氮量, 来满足玉米对氮素营养的大量需求, 氮由豆科作物向非豆科作物转移, 使豆科作物的生长受到一定的抑制, 但这种抑制并不影响大豆的正常生长发育, 因此, 就体现出了间作优势。

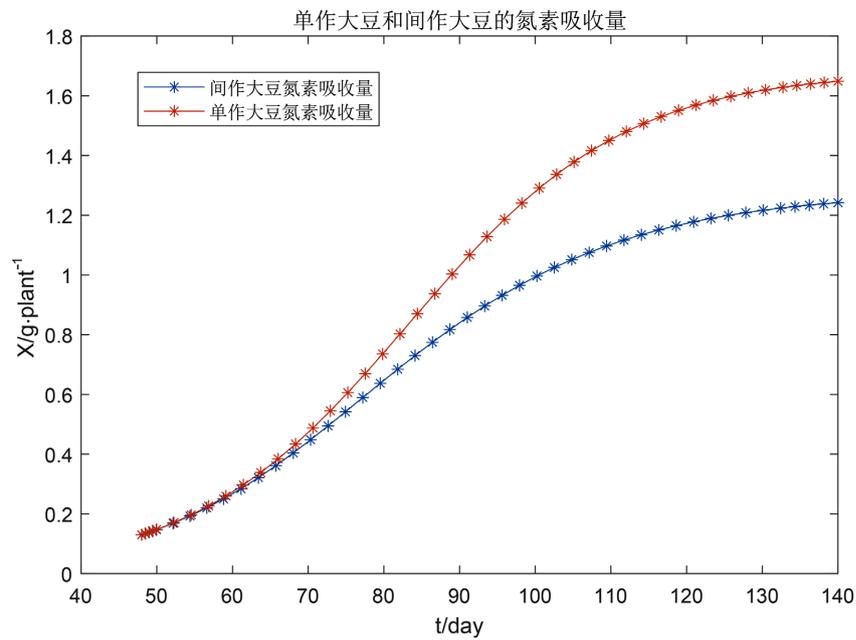


Figure 3. Image of the relationship between nitrogen uptake and time of single soybean and intercropping soybean

图 3. 单作大豆和间作大豆的氮素吸收量与时间关系图

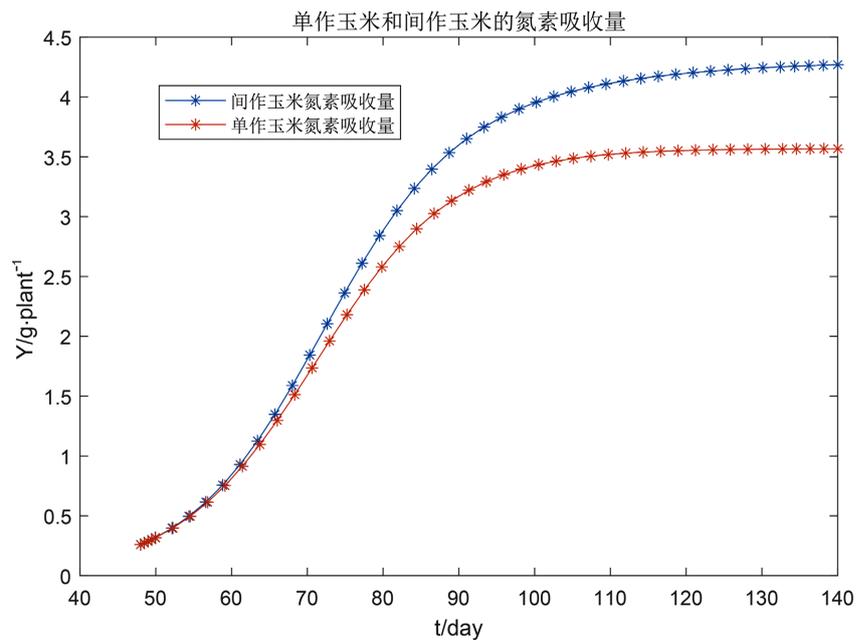


Figure 4. Image of the relationship between nitrogen uptake and time of single maize and intercropping maize

图 4. 单作玉米和间作玉米的氮素吸收量与时间关系图

4. 结论

在本文中, 首先建立了大豆和玉米单作时的氮素吸收量的 Logistic 模型(1)和(5)。然后, 提出大豆和玉米间作的氮素吸收量的二维微分方程模型, 对间作模型(9)进行稳定性理论分析得出, 当 $0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$

时, 唯一的正平衡点 $P_2(X^*, Y^*) = \left(\frac{K_S(1-\alpha)}{1+\alpha\beta}, \frac{K_M(1+\beta)}{1+\alpha\beta} \right)$ 是稳定的结点, 且 $X^* < K_S$, $Y^* > K_M$; 当条件

$\beta > \frac{\alpha}{1-2\alpha}$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $K_M > K_S$ 成立时, $X^* + Y^* > K_S + K_M$, 由此在理论上严格地证明了间作产生玉米的氮养分吸收及其与大豆总氮养分两者的优势, 从而最终使得间作产量呈现增长的优势。

当选取参数 $\alpha = 0.1994$, $\beta = 0.2708$ 时, 数值模拟得到正平衡点 (1.24, 4.29) 是稳定的结点。在间作条件下, 大豆的氮素吸收量为 1.24 g, 比单作大豆减少了 26.19%; 但间作玉米的氮素吸收量为 4.29 g, 比单作时的玉米增加了 20.17%, 特别地, 在间作条件下, 大豆和玉米两者的总吸收量增加了 5.33%, 从氮素吸收量中体现出了间作优势。

参考文献

- [1] 焦光纯. 大豆植株干物质积累与氮素动态变化研究[D]: [硕士学位论文]. 哈尔滨: 东北农业大学, 2003.
- [2] 吴巍, 赵军. 植物对氮素吸收利用的研究进展[J]. 中国农学通报, 2010, 26(13): 75-78.
- [3] 董钻, 谢甫缙. 大豆氮磷钾吸收动态及模式的研究[J]. 作物学报, 1996(1): 89-95.
- [4] 何萍, 金继运, 林葆, 王秀芳, 张宽. 不同氮磷钾用量下春玉米生物产量及其组分动态与养分吸收模式研究[J]. 植物营养与肥料学报, 1998(2): 123-130.
- [5] 宋海星, 李生秀. 玉米生长量、养分吸收量及氮肥利用率的动态变化[J]. 中国农业科学, 2003(1): 71-76.
- [6] 王立刚, 刘景辉, 刘克礼, 高聚林. 大豆对氮素吸收规律的研究[J]. 中国农学通报, 2004(6): 162-165.
- [7] 张晓娜, 陈平, 庞婷, 等. 玉米/豆科间作种植模式对作物干物质积累、分配及产量的影响[J]. 四川农业大学学报, 2017, 35(4): 484-490.
- [8] Li, L., Sun, J., Zhang, F., et al. (2006) Root Distribution and Interactions between Intercropped Species. *Oecologia (Berlin)*, **147**, 280-290. <https://doi.org/10.1007/s00442-005-0256-4>
- [9] 吕越. 玉米/大豆种内与种间作物的资源竞争[D]: [博士学位论文]. 杨凌: 西北农林科技大学, 2014.
- [10] 张林, 化存才, 强继业. 降低 UV-B 辐射对烤烟株高影响的非自治 Logistic 模型[J]. 生物数学学报, 2012, 27(4): 689-694.
- [11] 刘春, 张春辉, 郭萨萨. 基于能量模型的水稻生长模型[J]. 应用气象学报, 2013, 24(2): 240-247.
- [12] 符云锦. 农作物生长质量的非线性微分方程模型与分析[J]. 汕头大学学报(自然科学版), 2014, 29(4): 31-34.
- [13] 李文斌. 声频控制对水稻分蘖期生长影响的微分方程建模[D]: [硕士学位论文]. 昆明: 云南师范大学, 2019.
- [14] 李德盛. 植物生长发育问题的微分方程建模[D]: [硕士学位论文]. 昆明: 云南师范大学, 2019.
- [15] 张沂. 声频影响下番茄生长发育的微分方程建模[D]: [硕士学位论文]. 昆明: 云南师范大学, 2021.
- [16] 梁仕军. 三种不同环境下花生生长发育的微分方程建模[D]: [硕士学位论文]. 昆明: 云南师范大学, 2021.
- [17] 张锦炎, 冯贝叶. 常微分方程几何理论与分支问题[M]. 北京: 北京大学出版社, 2000.
- [18] 王雪蓉. 施氮水平对玉米/大豆间作干物质累积和养分吸收的影响[D]: [硕士学位论文]. 哈尔滨: 东北农业大学, 2019.