

Aitken推广算法在三维空间插值中的应用

宋文健, 张敬, 崔利宏*

辽宁师范大学, 辽宁 大连

收稿日期: 2022年10月16日; 录用日期: 2022年11月10日; 发布日期: 2022年11月18日

摘要

以代数曲面和空间代数曲线上的多元多项式插值问题的研究成果为基础, 主要对二元以及多元Lagrange插值的适定节点组问题进行进一步的研究并在该基础上有一个四面体迭代法, 它可以看作是Aitken算法在三维空间的一种推广, 并给出了Aitken算法在三维空间推广的证明过程, 最后通过两个实验算例对所得的研究成果进行了验证。

关键词

Aitken算法, 四面体迭代法, 三元Lagrange插值

Application of Aitken Generalization Algorithm in 3D Space Interpolation

Wenjian Song, Jing Zhang, Lihong Cui*

Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Oct. 16th, 2022; accepted: Nov. 10th, 2022; published: Nov. 18th, 2022

Abstract

Based on the research results of multivariate polynomial interpolation problems on algebraic surfaces and space algebraic curves, further research is carried out on the well-posed node group problem of binary and multivariate Lagrange interpolation. On this basis, a tetrahedral iteration method is proposed., it can be regarded as an extension of Aitken algorithm in three-dimensional space, and the proof process of Aitken algorithm in three-dimensional space is given. Finally, the obtained research results are verified by two experimental examples.

*通讯作者。

Keywords

Aitken Algorithm, Tetrahedral Iteration Method, Ternary Lagrange Interpolation

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

二元以及多元多项式的插值一直是计算数学中重要的研究领域，由于计算科学的不断进步和发展，极大地减少了人力物力，同时我们也希望计算机中关于函数插值这方面的程序能不断得到完善，多元函数插值也会在实际应用中发挥更大的作用。而二元以及多元多项式插值问题中的一个主要研究问题就是二元以及多元 Lagrange 插值的适定节点组问题。原吉林大学梁学章教授在 1965 年创造性的提出了关于二元多项式空间 Lagrange 插值适定性问题转换为几何问题的研究(详见文献[1])。随后在 1979 年梁学章教授在文献[2]中给出了插值节点组的构造方法及其应用。1998 年梁学章和吕春梅在文献[3]中以代数几何中的相关理论为基础，进一步的讨论了沿无重复分量平面代数曲线上的 Lagrange 插值问题，使得 Lagrange 插值获得长足进步。后来吕春梅教授结合了代数曲面和空间代数曲线上的 Lagrange 插值问题(详见文献[4]-[10])提出了 Aitken 推广算法在三维空间插值中的应用。

2. 基本定义和主要定理

2.1. 基本定义

定义 1 [3]: 设 n 为非负整数并且 $d_n = \binom{n+3}{3}$ 。而 $P_n^{(3)} = P_n[R^3]$ 代表所有全次数不超过 n 的三元实系数多项式空间，即

$$P_n^{(3)} = \left\{ \sum_{0 \leq i+j+k \leq n} a_{ijk} x^i y^j z^k \mid a_{ijk} \in R \right\}$$

定义 2 [3]: 设 n, k 均为自然数， $q(X) = 0$ 为 k 次无重复分量代数曲面。定义 $d_n(k)$ 如下：

$$d_n(k) = \binom{n+3}{3} - \binom{n+3-k}{3} = \begin{cases} \frac{1}{6}(n+3)(n+2)(n+1), & n < k, \\ \frac{1}{6}k[3n(n-k)+12n+k^2-6k+11], & n \geq k. \end{cases} \quad (1)$$

令 $A = \{Q_i\}_{i=1}^{d_n(k)}$ 为曲面 $q(X) = 0$ 上的 $d_n(k)$ 个相异点，对于一个任意给定的实数组 $\{f_i\}_{i=1}^{d_n(k)}$ ，寻找一个多项式 $g(X) \in P_n^{(3)}$ 使之满足如下插值条件

$$g(Q_i) = f_i, i = 1, \dots, d_n(k) \quad (2)$$

如果对于每一个任意给定的实数组 $\{f_i\}_{i=1}^{d_n(k)}$ ，方程组(2)总存在一组解，则称节点组 $A = \{Q_i\}_{i=1}^{d_n(k)}$ 为沿 k 次代数曲面 $q(X) = 0$ 的 n 次插值适定节点组，并简记为 $A \in I_n^{(3)}(q)$ [这里 $I_n^{(3)}(q)$ 代表所有位于曲面 $q(X) = 0$ 上的 n 次插值适定节点组的集合]。

2.2. 基本定理

定理 1 [3]: 设 $A = \{Q_i\}_{i=1}^{d_n}$ 是 $P_n^{(3)}$ 的一个插值适定节点组, 作一个 k 次无重复分量代数曲面 $q(X) = 0$, 使其不通过 A 中任何点。任取沿曲面 $q(X) = 0$ 上的一个 $n+k$ 次插值适定节点组 $B \in I_{n+k}^{(3)}(q)$, 则 $A \cup B$ 必定构成空间 $P_{n+k}^{(3)}$ 的插值适定节点组。

定理 2 [3]: 假设 k 次无重复分量代数曲面 $q(X) = 0$ 与平面 $h(X) = 0$ 相交于一个平面代数曲线 $C = s(q, h)$ [这里 $s(q, h)$ 表示多项式 $q(X)$ 与 $h(X)$ 的公共零点集]。如果 $A = \{Q_i\}_{i=1}^{d_n(k)}$ 为沿曲面 $q(X) = 0$ 的一个 n 次插值适定节点组且 A 不位于曲线 $C = s(q, h)$ 上。在曲线 $C = s(q, h)$ 上任取一个沿该曲线的 $n+1$ 次插值适定节点组 $B \in I_{n+1}^{(3)}(q)$ 。

3. Aitken 算法在三维空间中的推广

3.1. Aitken 算法的推广

定理 3: 在三维空间 R^3 上任作四个平面 l_1, l_2, l_3, l_4 使其交成一四面体, 在四面体的六个边上分别取异于顶点的 $n-1$ 个互不相同的点, 再在每个平面上取异于三角形边上的 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 个点, 这些点构成相应平面上的二元 $n-3$ 次多项式空间 π_{n-3}^3 的适定节点组 C_{n-3}^2 , 我们用 μ_i 表示平面 l_i 上所取的这些点与四面体和这个平面所截三角形的三个顶点构成的集合, $i=1, 2, 3, 4$ 。用 C_{n-4}^3 表示四面体外 R^3 上任一 $n-4$ 次多项式空间 π_{n-4}^3 的适定节点组, 它由 $\binom{n-1}{3} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$ 个点构成。则集合

$$C_n^3 = C_{n-4}^3 \cup \mu_1 \cup \mu_2 \cup \mu_3 \cup \mu_4$$

构成空间 π_n^3 的适定节点组, 而且集合

$$\beta_i = C_n^3 \setminus \mu_i, i=1, 2, 3, 4$$

都是空间 π_{n-1}^3 的适定节点组。

进一步, 设 $f(x, y, z)$ 为被插函数, $P_{n-1}^{(i)}(x, y, z)$ 分别是函数 $f(x, y, z)$ 在 π_{n-1}^3 中关于节点组 β_i 的插值多项式, $i=1, 2, 3, 4$ 。设

$$d = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (3)$$

其中 (x_i, y_i, z_i) 为平面 l_i 所对应的四面体的顶点坐标, $i=1, 2, 3, 4$ 。则我们可以证明

$$P_n(x, y, z) = \frac{1}{d} \begin{vmatrix} P_{n-1}^{(1)}(x, y, z) & x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ P_{n-1}^{(2)}(x, y, z) & x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z \\ P_{n-1}^{(3)}(x, y, z) & x_3 - x & y_3 - y & z_3 - z \\ P_{n-1}^{(4)}(x, y, z) & x_4 - x & y_4 - y & z_4 - z \end{vmatrix} \quad (4)$$

是 $f(x, y, z)$ 在 π_n^3 中关于节点组 C_n^3 的插值多项式。

证明: 设四面体的六条边分别为 $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6$ 。

首先，我们在四面体外 R^3 上任取多项式空间 π_{n-4}^3 的插值适定节点组 C_{n-4}^3 ，然后在四面体的每个面上取沿平面的 $n-3$ 次插值适定节点组，之后再在每个边上取沿曲线的 $n-2$ 次插值适定节点组。

接下来，我们用空间的 $n-4$ 次插值适定节点组和四面体的一个平面 l_1 的插值适定节点组并起来构成 $n-3$ 次插值适定节点组 C_{n-3}^3 ，然后把平面 l_2 和边 m_1 上的点与之前的插值适定节点组并起来构成沿平面的 $n-2$ 次插值适定节点组 C_{n-2}^3 。接着，我们把平面 l_3 、边 m_2 上的点、边 m_3 上的一个点与之前的插值适定节点组并起来构成沿平面的 $n-1$ 次插值适定节点组 C_{n-1}^3 。最后，我们把平面 l_4 上的点、边上 m_4 的点、边 m_5 上的一个点、边 m_6 上的两个点与之前的插值适定节点组并起来构成 n 次插值适定节点组 C_n^3 ，这样我们就得到了结论 $C_n^3 = C_{n-4}^3 \cup \mu_1 \cup \mu_2 \cup \mu_3 \cup \mu_4$ 。

$$(验证点数：因为 \mu_1 \cup \mu_2 \cup \mu_3 \cup \mu_4 = 4 \times \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 6(n-1) + 4 = 2(n^2 + 1))$$

$$\text{而 } C_n^3 - C_{n-4}^3 = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} = \frac{12n^2 + 12}{6} = 2(n^2 + 1), \text{ 所以可以验证}$$

$C_n^3 = C_{n-4}^3 \cup \mu_1 \cup \mu_2 \cup \mu_3 \cup \mu_4$ 证毕。

3.2. 实验算例

算例 1：设 $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$ 为被插函数，取 $n = 1$ ，则

$$P_0^{(1)}(x, y, z), P_0^{(2)}(x, y, z), P_0^{(3)}(x, y, z), P_0^{(4)}(x, y, z)$$

分别是函数 $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$ 在 π_{n-1}^3 关于节点组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 的插值多项式。我们取 $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ 为平面 l_1, l_2, l_3, l_4 所对应的四面体的四个顶点坐标。因此，根据公式(3)我们可以算得 $d = 1$ 。根据公式(4)我们要想得到 $P_1(x, y, z)$ 的值则必须先得到

$$P_0^{(1)}(x, y, z), P_0^{(2)}(x, y, z), P_0^{(3)}(x, y, z), P_0^{(4)}(x, y, z)$$

对应的值，这里我们取四面体的四个顶点为插值节点，从而得到

$$P_0^{(1)}(0, 0, 0) = 1, P_0^{(2)}(1, 0, 0) = \frac{1}{2}, P_0^{(3)}(0, 1, 0) = \frac{1}{2}, P_0^{(4)}(0, 0, 1) = \frac{1}{2}， 将其代入公式(4)可以得到$$

$P_1(x, y, z) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2} - \frac{z}{2}$ 。由定义 2 可知 $P_1(x, y, z) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{2} - \frac{z}{2}$ 是 $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$ 在 π_n^3 中关于插值节点的插值多项式。

算例 2：设 $f(x, y, z) = -2(x^2 + y^2 + z^2) + 1$ 为被插函数，取 $n = 2$ ，则同理我们由公式(4)可得要求 $P_2(x, y, z)$ 的值必须先求出

$$P_1^{(1)}(x, y, z), P_1^{(2)}(x, y, z), P_1^{(3)}(x, y, z), P_1^{(4)}(x, y, z)$$

的值，这里我们根据定理 3 可得

$$P_1^{(1)}(x, y, z), P_1^{(2)}(x, y, z), P_1^{(3)}(x, y, z), P_1^{(4)}(x, y, z)$$

的值正好是这个四面体的四个平面所对应的四个平面方程 $P_1^{(1)}(x, y, z) = x, P_1^{(2)}(x, y, z) = y, P_1^{(3)}(x, y, z) = z, P_1^{(4)}(x, y, z) = x + y + z - 1$ 。由算例 1 的 $d = 1$ 不变，因此我们根据公式(4)可算出 $P_2(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz - 2x - 2y - 2z + 1$ ，同理由定义 2 可知

$P_2(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz - 2x - 2y - 2z + 1$ 是 $f(x, y, z) = -2(x^2 + y^2 + z^2) + 1$ 在 π_n^3 中关于插值节点的插值多项式。

4. 结论

多元多项式插值问题中的一个主要研究问题就是多元 Lagrange 插值的适定节点组问题，这些年来代数几何理论和方法被学者们不断地更新和完善，这对于研究多元插值问题奠定了雄厚的理论基础，给出有力的理论依据和更丰富的计算方法在很多领域有重要的作用。因此，本文拟研究以代数曲面和空间代数曲线上的多元多项式插值问题的研究成果为基础，主要对二元以及多元 Lagrange 插值的适定节点组问题进行进一步的研究并在该基础上有一个四面体迭代法，它可以看作是 Aitken 算法在三维空间的一种推广。

参考文献

- [1] 梁学章. 关于多元函数的插值与逼近[J]. 高等学校计算数学学报, 1979(1): 123-124.
- [2] 梁学章. 二元插值的适定结点组与迭加插值法[J]. 吉林大学自然科学学报, 1979(1): 27-32.
- [3] Liang, X.Z. and Lv, C.M. (1998) Properly Posed Set of Nodes for Bivariate Lagrange Interpolation. *Approximation Theory IX*, 2, 189-196.
- [4] 梁学章, 崔利宏. 代数曲线上的 Lagrange 插值[J]. 吉林大学自然科学学报, 2001(3): 17-20.
- [5] 梁学章, 李强. 多元逼近[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005: 22-28.
- [6] 崔利宏. 多元 Lagrange 插值与多元 Kergin 插值[M]. 大连: 辽宁师范大学出版社, 2018.
- [7] 崔利宏, 杨一浓, 王晓婉. 平面代数曲线的二元多项式插值问题[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 2013, 36(3): 318-321.
- [8] 梁学章, 崔利宏. Cayley-Bacharach 定理在沿平面代数曲线插值问题中的应用[J]. 高等学校计算数学学报, 2003(3): 261-270.
- [9] 崔利宏, 范晓倩, 刘莹. 多元分次插值适定性问题研究[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 2016, 39(4): 433-437.
- [10] 崔利宏, 张丰利, 铁旭. 四面体框架上的 Lagrange 插值[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 2016, 39(1): 1-6.