Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(11), 8290-8298
Published Online November 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.1111877

B-矩阵线性互补问题解的误差界的新估计式

李玲玲，莫宏敏[*]，李慧君

吉首大学数学与统计学院，湖南 吉首

收稿日期：2022年10月25日；录用日期：2022年11月21日；发布日期：2022年11月29日

摘 要

利用严格对角占优*M*-矩阵逆矩阵的无穷大范数范围，综合运用不等式放缩技巧，得到了*B*-矩阵线性互补问题解的误差界的一个新估计式。理论证明新估计式改进了现有文献的有关结果，数值例子说明了新估计式的可行性和有效性。

关键词

严格对角占优*M*-矩阵，*B*-矩阵，误差界，估计式

A New Estimator of Error Bounds for B-Matrix Linear Complementary Problems

Lingling Li, Hongmin Mo[*], Huijun Li

College of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou Hunan

Received: Oct. 25th, 2022; accepted: Nov. 21st, 2022; published: Nov. 29th, 2022

Abstract

By using the infinite norm range of the strictly diagonally dominant M-matrix inverse matrix, a new estimator of the error bounds of the solutions of B-matrix linear complementarity problems is obtained by using the inequality reduction technique. It is proved that the new estimation improves the results of the existing literature. Numerical examples show the feasibility and effectiveness of the new estimation.

Keywords

Strictly Diagonally Dominant M-Matrix, B-Matrix, Error Bound, Estimator

[*]通讯作者。

文章引用: 李玲玲, 莫宏敏, 李慧君. *B*-矩阵线性互补问题解的误差界的新估计式[J]. 应用数学进展, 2022, 11(11): 8290-8298. DOI: 10.12677/aam.2022.1111877

1. 引言

线性互补问题在许多领域具有广泛的应用，例如二次规划问题、市场均衡问题、最优控制问题等[1] [2] [3]。线性互补问题的数学模型为求 $x \in R^n$，满足

$$x \ge 0, Mx+q \ge 0, (Mx+q)^{\mathrm{T}} x = 0,$$

简记为 $LCP(M,q)$。其中 $M=(m_{ij}) \in R^{n\times n}$ 为给定的实矩阵，$q \in R^n$ 为给定的实向量。

线性互补问题的解很大程度上取决于矩阵 M 的性质。若矩阵 M 为 P-矩阵，则线性互补问题有唯一解。2006 年，文[4]给出结果：设 M 是 P-矩阵，则有

$$\left\| x-x^* \right\|_\infty \le \max_{d\in[0,1]^n} \left\| (I-D+DM)^{-1} \right\|_\infty \left\| r(x) \right\|_\infty,$$

其中 x^* 是 $LCP(M,q)$ 的解，$r(x)=\min\{x, Mx+q\}, D=diag(d_1,d_2,\cdots,d_n), (0\le d_i \le 1)$。近年来，国内外学者在此基础上给出了很多特殊矩阵类线性互补问题解的误差界估计式[5]-[15]。本文将继续讨论 P-矩阵的子类 B-矩阵线性互补问题解的误差界，给出 B-矩阵线性互补问题解的误差界的一个新估计式，并通过理论分析和数值实例说明新估计式的有效性和可行性。

2. 预备知识

令 N^+ 表示全体正整数的集合，$A=(a_{ij}) \in R^{n\times n}$，若

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\ne i}^{n} |a_{ij}|, \forall i \in N = \{1,2,\cdots,n\}$$

则称 A 为严格对角占优矩阵；若 $a_{ij} \le 0, i \ne j, i, j \in N$，则称 A 为 Z-矩阵[11]；若 A 为 Z-矩阵且 $A^{-1} \ge 0$，则称 A 为 M-矩阵[11]。

定义 1 [3]设 $A=(a_{ij}) \in R^{n\times n}, x \in R^n$，若 A 满足 $\max x_i (Ax)_i \ge 0, \forall x \ne 0$ 则称 A 为 P-矩阵。

定义 2 [12]设 $A=(a_{ij}) \in R^{n\times n}$，若对任意的 $i, j \in N$

$$\sum_{k\in N} a_{ik} > 0, \frac{1}{n}\left(\sum_{k\in N} a_{ik} \right) > a_{ij}, j \ne i.$$

则称 A 为 B-矩阵。

2009 年，文[6]给出：设 $M=(m_{ij}) \in R^{n\times n}$ 是 B-矩阵，$M = B^+ + C$，这里

$$B^+ = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} m_{11}-r_1^+ & \cdots & m_{1n}-r_1^+ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1}-r_n^+ & \cdots & m_{nn}-r_n^+ \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} r_1^+ & \cdots & r_1^+ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_n^+ & \cdots & r_n^+ \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$r_i^+ = \max\{0, m_{ij} | j \ne i\}$ 则

$$\max_{d\in[0,1]^n} \left\| (I-D+DM)^{-1} \right\| \le \frac{n-1}{\min\{\beta,1\}} \tag{2}$$

其中 $\beta=\min_{i\in N}\{\beta_i\}$，且 $\beta_i=b_{ii}-\sum_{j\neq i}|b_{ij}|$。

2016 年，文[9]给出了优于(2)式的新估计式：设 $M=(m_{ij})\in R^{n\times n}$ 是 B-矩阵，$M=B^{+}+C$，其中 $B^{+}=(b_{ij})$ 形如(1)式，则有

$$\max_{d\in[0,1]^n}\left\|(I-D+DM)^{-1}\right\|\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{\min\{\bar{\beta}_i,1\}}\prod_{j=1}^{i-1}\left(1+\frac{1}{\bar{\beta}_j}\sum_{k=j+1}^{n}|b_{jk}|\right)\tag{3}$$

其中

$$\bar{\beta}_i=b_{ii}-\sum_{j=i+1}^{n}|b_{ij}|l_i(B^{+}),\tag{4}$$

$$l_k=\max_{k\leq i\leq n}\left\{\frac{1}{|b_{ii}|}\sum_{j=k,\neq i}^{n}|b_{ij}|\right\},\prod_{j=1}^{i-1}\left(1+\frac{1}{\bar{\beta}_j}\sum_{k=j+1}^{n}|b_{jk}|\right)=1,i=1$$

2016 年，文[10]又给出了新的估计式：设 $M=(m_{ij})\in R^{n\times n}$ 是 B-矩阵，且 $M=B^{+}+C$，其中 $B^{+}=(b_{ij})$ 形如(1)式，则有：

$$\max_{d\in[0,1]^n}\left\|(I-D+DM)^{-1}\right\|\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{\min\{\tilde{\beta}_i,1\}}\prod_{j=1}^{i-1}\left(\frac{b_{jj}}{\tilde{\beta}_j}\right)\tag{5}$$

$$\text{其中 }\tilde{\beta}_i=b_{ii}-\sum_{j=i+1}^{i-1}|b_{ij}|>0\text{，且}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{b_{jj}}{\tilde{\beta}_j}=1(i=1)\text{。}\tag{6}$$

3. 主要结果

引理 1 [9]设 $\gamma>0$ 和 $\eta\geq 0$，则对任意的 $x\in[0,1]$，

$$\frac{1}{1-x+\gamma x}\leq\frac{1}{\min\{\gamma,1\}},\frac{\eta x}{1-x+\gamma x}\leq\frac{\eta}{\gamma}$$

引理 2 [10]设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 且 $a_{ii}>\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|,\forall i\in N$，则对任意的 $x_i\in[0,1],i\in N$

$$\frac{1-x_i+a_{ii}x_i}{1-x_i+a_{ii}x_i-\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|x_i}\leq\frac{a_{ii}}{a_{ii}-\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|}.$$

引理 3 [10] $H:=(h_1,h_2,\cdots,h_n)^{\mathrm{T}}e,e=(1,1,\cdots,1),h_1,h_2,\cdots,h_n\geq 0,\left\|(I-H)^{-1}\right\|_\infty\leq n-1$

引理 4 [16]设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是严格对角占优 M-矩阵，则有

$$\left\|A^{-1}\right\|_\infty\leq\max\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{a_{ii}-\sum_{i<k\leq n}|a_{ik}|m_{ki}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{u_j}{1-u_jp_j}\right],\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{a_{ii-}\sum_{i<k\leq n}|a_{ik}|m_{ki}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{1}{1-u_jp_j}\right\}$$

为叙述方便起见，本文引入以下符号：

$$u_i(A)=\frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|,b_k(A)=\max\left\{\frac{\sum_{j\neq i+k,k\leq j\leq n}|a_{i+k,j}|}{|a_{i+k,i+k}|},i=1,2,\cdots,n-k\right\},k=1,2,\cdots,n,$$

$$p_k(A)=\max\left\{\frac{|a_{i+k,k}|+\sum_{h=k+1,h\neq i+k}^{n}|a_{i+k,h}|b_k(A)}{|a_{i+k,i+k}|},i=1,2,\cdots,n-k\right\},k=1,2,\cdots,n,$$

$$d_k(A)=\max\left\{\frac{\sum_{j\neq i+k-1,k\le j\le n}^{n}|a_{i+k-1,j}|}{|a_{i+k-1,i+k-1}|},i=1,2,\cdots,n-k+1\right\},k=1,2,\cdots,n,$$

$$r_{li}(A)=\frac{|a_{li}|}{|a_{ll}|-\sum_{k\neq l,i}|a_{lk}|},l\neq i,r_i(A)=\max_{l\neq i}\{r_{li}(A)\},i\in N,$$

$$m_{ji}(A)=\frac{|a_{ji}|+\sum_{k\neq j,i}|a_{jk}|r_i(A)}{|a_{jj}|},j\neq i,i\in N.$$

3.1. 定理 1

设 $M=(m_{ij})\in R^{n\times n}$ 是 B-矩阵，且 $M=B^{+}+C,B=(b_{ij})$ 形如(1)式，则有：

$$\max_{d\in[0,1]^n}\left\|(I-D+DM)^{-1}\right\|_\infty\le\max\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{n-1}{\min\{\hat{\beta}_i,1\}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{\sum_{k=j+1}^{n}|b_{jk}|}{\alpha_j(B^{+})}\right],\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(n-1)p_i(B^{+})}{\min\{\hat{\beta}_i,1\}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{|b_{jj}|}{\alpha_j(B^{+})}\right]\right\}.\tag{7}$$

其中，

$$\hat{\beta}_i=|b_{ii}|-\sum_{k\neq i}|b_{ik}|m_{ki}(B^{+}),\alpha_i(B^{+})=|b_{ii}|-\sum_{k=i+1}^{n}|b_{ik}|p_i(B).\tag{8}$$

证明：令 $M_D=I-D+DM$ 。则有

$$M_D=I-D+DM=I-D+D(B^{+}+C)=B_D^{+}+C_D.$$

其中 $B_D^{+}=I-D+DB^{+},C_D=DC$ ，由文献[6]中定理 2.2 的证明可知 B_D^{+} 是主对角元素为正的严格对角占优 M-矩阵，于是由引理 3 可得：

$$\left\|M_D^{-1}\right\|_\infty\le\left\|\left(I+(B_D^{+})^{-1}C_D\right)^{-1}\right\|_\infty\left\|(B_D^{+})^{-1}\right\|_\infty\le(n-1)\left\|(B_D^{+})^{-1}\right\|_\infty.\tag{9}$$

由引理 4 可得：

$$\left\|(B_D^{+})^{-1}\right\|_\infty\le\max\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{1-d_i+b_{ii}d_i-\sum_{i<k\le n}|b_{ik}|d_im_{ki}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{u_j}{1-u_jp_j}\right],\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{p_i}{1-d_i+b_{ii}d_i-\sum_{i<k\le n}|b_{ik}|d_im_{ki}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{1}{1-u_jp_j}\right]\right\}.\tag{10}$$

由引理 1 可得：

$$b_k(B_D^{+})=\max\left\{\frac{\sum_{j\neq i+k,k\le j\le n}|b_{i+k,j}|d_{i+k}}{1-d_{i+k}+b_{i+k,i+k}d_{i+k}}\right\}\le\max\left\{\frac{\sum_{j\neq i+k,k\le j\le n}|b_{i+k,j}|}{|b_{i+k,i+k}|}\right\}=b_k(B^{+}),$$

$$p_k\left(B_D^+\right)=\max\left\{\frac{\left|b_{i+k,k}\right|d_{i+k}+\sum_{h=k+1,h\neq i+k}^{n}\left|b_{i+k,h}\right|d_{i+k}b_k\left(B_D^+\right)}{1-d_{i+k}+b_{i+k,i+k}d_{i+k}}\right\}$$

$$\leq\max\left\{\frac{\left|b_{i+k,k}\right|+\sum_{h=k+1,h\neq i+k}^{n}\left|b_{i+k,h}\right|b_k\left(B_D^+\right)}{\left|b_{i+k,i+k}\right|}\right\}=p_k\left(B^+\right),$$

$$u_i\left(B_D^+\right)=\frac{1}{1-d_i+b_{ii}d_i}\sum_{j=i+1}^{n}\left|b_{ij}\right|d_i\leq\frac{1}{\left|b_{ii}\right|}\sum_{j=i+1}^{n}\left|b_{ij}\right|=u_i\left(B^+\right),$$

$$r_{li}\left(B_D^+\right)=\frac{\left|b_{li}\right|d_l}{\left(1-d_l+b_{ll}d_l\right)-\sum_{k\neq l,i}\left|b_{lk}\right|d_l}\leq\frac{\left|b_{li}\right|}{\left|b_{ll}\right|-\sum_{k\neq l,i}\left|b_{lk}\right|}=r_{li}\left(B^+\right),$$

$$r_i\left(B_D^+\right)=\max_{l\neq i}\left\{r_{li}\left(B_D^+\right)\right\}\leq\max_{l\neq i}\left\{r_{li}\left(B^+\right)\right\}=r_i\left(B^+\right),$$

$$m_{ji}\left(B_D^+\right)=\frac{\left|b_{ji}\right|d_j+\sum_{k\neq j,i}\left|b_{jk}\right|d_jr_i\left(B_D^+\right)}{1-d_j+b_{jj}d_j}\leq\frac{\left|b_{ji}\right|+\sum_{k\neq j,i}\left|b_{jk}\right|r_i\left(B_D^+\right)}{\left|b_{jj}\right|}=m_{ji}\left(B^+\right),$$

进而，由引理 2 可得：

$$\frac{1}{\left(1-d_i+b_{ii}d_i\right)-\sum_{i<k\leq n}\left|b_{ik}\right|d_im_{ki}\left(B_D^+\right)}\leq\frac{1}{\min\left\{\left|b_{ii}\right|-\sum_{i<k\leq n}\left|b_{ik}\right|m_{ki}\left(B^+\right),1\right\}}=\frac{1}{\min\left\{\hat{\beta}_i,1\right\}},$$

$$\frac{p_i\left(B_D^+\right)}{\left(1-d_i+b_{ii}d_i\right)-\sum_{i<k\leq n}\left|b_{ik}\right|d_im_{ki}\left(B_D^+\right)}\leq\frac{p_i\left(B^+\right)}{\min\left\{\hat{\beta}_i,1\right\}},$$

$$\frac{1}{1-u_j\left(B_D^+\right)p_j\left(B_D^+\right)}=\frac{1-d_j+b_{jj}d_j}{1-d_j+b_{jj}d_j-\sum_{k=j+1}^{n}\left|b_{jk}\right|d_jp_j\left(B_D^+\right)}$$

$$\leq\frac{\left|b_{jj}\right|}{\left|b_{jj}\right|-\sum_{k=j+1}^{n}\left|b_{jk}\right|p_j\left(B^+\right)}=\frac{\left|b_{jj}\right|}{\alpha_j\left(B^+\right)},$$

$$\frac{u_j\left(B_D^+\right)}{1-u_j\left(B_D^+\right)p_j\left(B_D^+\right)}=\frac{\sum_{k=j+1}^{n}\left|b_{jk}\right|d_j}{\left(1-d_j+b_{jj}d_j\right)-\sum_{k=j+1}^{n}\left|b_{jk}\right|d_jp_j\left(B_D^+\right)}$$

$$\leq\frac{\sum_{k=j+1}^{n}\left|b_{jk}\right|}{\left|b_{jj}\right|-\sum_{k=j+1}^{n}\left|b_{jk}\right|p_j\left(B^+\right)}=\frac{\sum_{k=j+1}^{n}\left|b_{jk}\right|}{\alpha_j\left(B^+\right)},$$

由此可得：

$$\left\|\left(B_D^+\right)^{-1}\right\|_\infty \le \max\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\min\left\{\hat{\beta}_i,1\right\}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{\sum_{k=j+1}^{n}\left|b_{jk}\right|}{\alpha_j\left(B^+\right)}\right],\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{p_i\left(B^+\right)}{\min\left\{\hat{\beta}_i,1\right\}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{\left|b_{jj}\right|}{\alpha_j\left(B^+\right)}\right]\right\}, \tag{11}$$

因此，由(10)、(11)式可得(7)式成立。

接下来，对(3)式、(5)式及(7)式进行比较。

3.2. 定理 2

设 $M=\left(m_{ij}\right)\in R^{n\times n}$ 是 B-矩阵，且 $M=B^++C$，其中 $B^+=\left(b_{ij}\right)$ 形如(1)式，则有：

$$\begin{aligned}&\max\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{n-1}{\min\left\{\hat{\beta}_i,1\right\}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{\sum_{k=j+1}^{n}\left|b_{jk}\right|}{\alpha_j\left(B^+\right)}\right],\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(n-1)\,p_i\left(B^+\right)}{\min\left\{\hat{\beta}_i,1\right\}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{\left|b_{jj}\right|}{\alpha_j\left(B^+\right)}\right]\right\}\\&\le\sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{\min\left\{\bar{\beta}_i,1\right\}}\prod_{j=1}^{i-1}\left[1+\frac{1}{\bar{\beta}_j}\sum_{k=j+1}^{n}\left|b_{jk}\right|\right]\le\sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{\min\left\{\tilde{\beta}_i,1\right\}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{\left|b_{jj}\right|}{\tilde{\beta}_j}.\end{aligned} \tag{12}$$

其中 $\hat{\beta}_i$，$\alpha_i\left(B^+\right)$，$\bar{\beta}_i$ 及 $\tilde{\beta}_i$ 分别如(8)式，(4)式及(6)式所示。

证明：因为 B^+ 为具有正主对角元的严格对角占优矩阵，因此对任意的 $j\in N$，有

$$0\le r_j\left(B^+\right)<1,0\le l_j\left(B^+\right)<1,0\le p_j\left(B^+\right)<1.$$

且对任意的 $j=1,2,\cdots,n-1$，

$$\begin{aligned}m_{ki}\left(B^+\right)-l_{ki}\left(B^+\right)&=\frac{\left|b_{ki}\right|+\sum_{j=i+1,\ne k}^{n}\left|b_{kj}\right|r_i\left(B^+\right)}{\left|b_{kk}\right|}-\frac{\left|b_{ki}\right|+\sum_{j=i+1,\ne k}^{n}\left|b_{kj}\right|}{\left|b_{kk}\right|}\\&=\frac{\sum_{j=i+1,\ne k}^{n}\left|b_{kj}\right|r_i\left(B^+\right)-\sum_{j=i+1,\ne k}^{n}\left|b_{kj}\right|}{\left|b_{kk}\right|}\le 0,\end{aligned}$$

$$\text{则有 } \hat{\beta}_i\ge\bar{\beta}_i,\frac{1}{\min\left\{\hat{\beta}_i,1\right\}}\le\frac{1}{\min\left\{\bar{\beta}_i,1\right\}}. \tag{13}$$

$$\begin{aligned}p_k\left(B^+\right)-l_k\left(B^+\right)&=\frac{\left|b_{i+k,k}\right|+\sum_{h=k+1,\ne i+k}^{n}\left|b_{i+k,h}\right|b_k}{\left|b_{i+k,i+k}\right|}-\frac{\left|b_{i+k,k}\right|+\sum_{h=k+1,\ne i+k}^{n}\left|b_{i+k,h}\right|}{\left|b_{i+k,i+k}\right|}\\&=\frac{\sum_{h=k+1,\ne i+k}^{n}\left|b_{i+k,h}\right|b_k-\sum_{h=k+1,\ne i+k}^{n}\left|b_{i+k,h}\right|}{\left|b_{i+k,i+k}\right|}\le 0,\end{aligned}$$

$$\text{则有 } \alpha_i\left(B^+\right)\ge\bar{\beta}_i. \tag{14}$$

由(13)式及(14)式可得

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{n-1}{\min\left\{\hat{\beta}_i,1\right\}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{\sum_{k=j+1}^{n}\left|b_{jk}\right|}{\alpha_j\left(B^+\right)}\right]\le\sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{\min\left\{\bar{\beta}_i,1\right\}}\prod_{j=1}^{i-1}\left[1+\frac{1}{\bar{\beta}_i}\prod_{k=j+1}^{n}\left|b_{jk}\right|\right], \tag{15}$$

$$\frac{|b_{jj}|}{\alpha_j(B^+)} \le \frac{|b_{jj}|}{\bar{\beta}_j} = \frac{|b_{jj}| - \sum_{k=j+1}^{n}|b_{jk}| + \sum_{k=j+1}^{n}|b_{jk}|}{\alpha_j(B^+)} \tag{16}$$

$$= 1 + \frac{1}{\bar{\beta}_j}\sum_{k=j+1}^{n}|b_{jk}|l_j(B^+) \le 1 + \frac{1}{\bar{\beta}_j}\sum_{k=j+1}^{n}|b_{jk}|,$$

由(15)式及(16)式可得

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(n-1)}{\min\{\hat{\beta}_i,1\}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{|b_{jj}|}{\alpha_j(B^+)}\right] \le \sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{\min\{\bar{\beta}_i,1\}}\prod_{j=1}^{i-1}\left[1+\frac{1}{\bar{\beta}_i}\prod_{k=j+1}^{n}|b_{jk}|\right], \tag{17}$$

综上，由(15)式及(17)式可得

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{n-1}{\min\{\hat{\beta}_i,1\}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{\sum_{k=j+1}^{n}|b_{jk}|}{\alpha_j(B^+)}\right], \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(n-1)p_i(B^+)}{\min\{\hat{\beta}_i,1\}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{|b_{jj}|}{\alpha_j(B^+)}\right]\right\} \tag{18}$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{\min\{\bar{\beta}_i,1\}}\prod_{j=1}^{i-1}\left[1+\frac{1}{\bar{\beta}_j}\sum_{k=j+1}^{n}|b_{jk}|\right].$$

$$\bar{\beta}_i \ge \tilde{\beta}_i, \frac{1}{\min\{\bar{\beta}_i,1\}} \le \frac{1}{\min\{\tilde{\beta}_i,1\}},$$

因此，

$$1+\frac{1}{\bar{\beta}_j}\sum_{k=j+1}^{n}|b_{jk}| \le 1+\frac{1}{\tilde{\beta}_j}\sum_{k=j+1}^{n}|b_{jk}| = \frac{\tilde{\beta}_j + \sum_{k=j+1}^{n}|b_{jk}|}{\tilde{\beta}_j} = \frac{|b_{jj}|}{\tilde{\beta}_j}, \tag{19}$$

由(18)式及(19)式可得

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{n-1}{\min\{\hat{\beta}_i,1\}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{\sum_{k=j+1}^{n}|b_{jk}|}{\alpha_j(B^+)}\right], \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(n-1)p_i(B^+)}{\min\{\hat{\beta}_i,1\}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{|b_{jj}|}{\alpha_j(B^+)}\right]\right\}$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{\min\{\bar{\beta}_i,1\}}\prod_{j=1}^{i-1}\left[1+\frac{1}{\bar{\beta}_j}\sum_{k=j+1}^{n}|b_{jk}|\right] \le \sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{\min\{\tilde{\beta}_i,1\}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{|b_{jj}|}{\tilde{\beta}_j}.$$

4. 数值算例

例 1. 考虑 B-矩阵

$$M = \begin{pmatrix} 1.3 & -0.1 & 0.3 & 0 \\ -0.3 & 1.4 & -0.1 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 1.4 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 & 0.3 & 1.5 \end{pmatrix}.$$

$M = B^+ + C$，其中

$$B^{+}=\begin{pmatrix}1 & -0.4 & 0 & -0.3\\ -0.1 & 1 & -0.5 & 0\\ 0 & -0.2 & 1 & -0.1\\ 0 & 0 & -0.2 & 1\end{pmatrix}.$$

由(3)式可得

$$\max_{d\in[0,1]^n}\left\|\left(I-D+DM\right)^{-1}\right\|_\infty \le 40.5506,$$

由(5)式可得

$$\max_{d\in[0,1]^n}\left\|\left(I-D+DM\right)^{-1}\right\|_\infty \le 74.4444,$$

由(7)式可得

$$\max_{d\in[0,1]^n}\left\|\left(I-D+DM\right)^{-1}\right\|_\infty \le 9.7961.$$

可见，(7)式优于(3)式和(5)式。

例 2. 考虑 B-矩阵[9]

$$M_k=\begin{pmatrix}1.5 & 0.5 & 0.4 & 0.5\\ -0.1 & 1.7 & 0.7 & 0.6\\ 0.8 & -0.1\frac{k}{k+1} & 1.8 & 0.7\\ 0 & 0.7 & 0.8 & 1.8\end{pmatrix}.$$

$M_k=B_k^{+}+C_k$，其中

$$B_k^{+}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -0.1 & 0\\ -0.8 & 1 & 0 & -0.1\\ 0 & -0.1\frac{k}{k+1}-0.8 & 1 & -0.1\\ -0.8 & -0.1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

由(2)式可得

$$\max_{d\in[0,1]^n}\left\|\left(I-D+DM\right)^{-1}\right\|_\infty \le \frac{3}{\min\{\beta,1\}}=30(k+1),$$

当 $k\to+\infty$ 时，$30(k+1)\to+\infty$，因此该数值结果会趋于正无穷。

由(3)式可得

$$\max_{d\in[0,1]^n}\left\|\left(I-D+DM\right)^{-1}\right\|_\infty \le 14.8064,$$

由(5)式可得

$$\max_{d\in[0,1]^n}\left\|\left(I-D+DM\right)^{-1}\right\|_\infty \le 15.2675,$$

由(7)式可得

$$\max_{d\in[0,1]^n}\left\|\left(I-D+DM\right)^{-1}\right\|_\infty \le 3.6762.$$

由此可知，(7)式优于(2)式、(3)式和(5)式。

由数值算例的结果可知，定理 1 中的误差界新估计式是可行的、有效的，改进了文献[9] [10]中的结果。

5. 结论

理论证明本文所得 *B*-矩阵线性互补问题解的误差界新估计式优于文献[9] [10]中的结果，数值算例亦说明了本文所得新估计式的有效性和可行性。

参考文献

[1] Chen, X. and Xiang, S. (2008) Perturbation Bounds of *P*-Matrix Linear Complementarity Problems. *SIAM Journal on Optimization*, **18**, 1250-1265. https://doi.org/10.1137/060653019

[2] Murty, K.G. and Yu, F.T. (1988) Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming. Heldermann, Berlin.

[3] Cottle, R.W., Pang, J.S. and Stone, R.E. (2009) The Linear Complementarity Problem. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia. https://doi.org/10.1137/1.9780898719000

[4] Chen, X. and Xiang, S. (2006) Computation of Error Bounds for *P*-Matrix Linear Complementarity Problems. *Mathematical Programming*, **106**, 513-525. https://doi.org/10.1007/s10107-005-0645-9

[5] Chen, T., Li, W., Wu, X. and Vong, S. (2015) Error Bounds for Linear Complementarity Problems of *MB*-Matrices. *Numerical Algorithms*, **70**, 341-356. https://doi.org/10.1007/s11075-014-9950-9

[6] García-Esnaola, M., and Peña, J.M. (2009) Error Bounds for Linear Complementarity Problems for *B*-Matrices. *Applied Mathematics Letters*, **22**, 1071-1075. https://doi.org/10.1016/j.aml.2008.09.001

[7] Araújo, C.M. and Mendes-Gonçalves, S. (2019) On a Class of Nonsingular Matrices Containing *B*-Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, **578**, 356-369. https://doi.org/10.1016/j.laa.2019.05.015

[8] García-Esnaola, M. and Peña, J.M. (2012) Error Bounds for Linear Complementarity Problems Involving B^S-Matrices. *Applied Mathematics Letters*, **25**, 1379-1383. https://doi.org/10.1016/j.aml.2011.12.006

[9] Li, C. and Li, Y. (2016) Note on Error Bounds for Linear Complementarity Problems for *B*-Matrices. *Applied Mathematics Letters*, **57**, 108-113. https://doi.org/10.1016/j.aml.2016.01.013

[10] Li, C. and Li. Y. (2016) Weakly Chained Diagonally Dominant *B*-Matrices and Error Bounds for Linear Complementarity Problems. *Numerical Algorithms*, **73**, 985-998. https://doi.org/10.1007/s11075-016-0125-8

[11] Berman, A. and Plemmons, R.J. (1994) Nonnegative Matrices in The mathematical Sciences. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia. https://doi.org/10.1137/1.9781611971262

[12] Peña, J.M. (2001) A Class of *P*-Matrices with Applications to the Localization of the Eigenvalues of a Real Matrix. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **22**, 1027-1037. https://doi.org/10.1137/S0895479800370342

[13] 王峰，彭小平，孙德淑. *B*-矩阵线性互补问题的误差界估计[J]. 高等学校计算数学学报, 2018, 40(1): 27-36.

[14] 周翠玲，莫宏敏. *B*-矩阵线性互补问题解的误差界新估计式[J]. 高校应用数学学报, 2022, 37(2): 142-150.

[15] Gao, L. and Li, C. (2017) An Improved Error Bound for Linear Complementarity Problems for *B*-Matrices. *Journal of Inequalities and Applications*, **2017**, Article No. 144. https://doi.org/10.1186/s13660-017-1414-z

[16] 刘新，杨晓英. 严格对角占优 *M*-矩阵 *A* 的 $\|A^{-1}\|_\infty$ 的新上界[J]. 北华大学学报(自然科学版), 2014, 15(2): 184-187.