

基于分阶段SEIQDR模型的香港疫情分析

杜彦斌*, 刘晏滇

河南科技大学数学与统计学院, 河南 洛阳

收稿日期: 2023年1月26日; 录用日期: 2023年2月21日; 发布日期: 2023年2月28日

摘要

科学地预测传染病的发展规律对疫情防控至关重要。本文构建了一类分阶段带有潜伏期和隔离仓室的SEIQDR动力学模型, 且潜伏者也具有传染性。利用最小二乘算法进行参数估计, 并进行数据拟合, 结果表明SEIQDR模型预测结果与真实数据比较吻合, 平均误差率3.44%, 可以很好地描述疫情的传播规律, 分阶段预测效果更好。

关键词

传染病, SEIQDR模型, 基本再生数, 数据拟合

Analysis of Epidemic Situation in Hong Kong Based on Staged SEIQDR Model

Yanbin Du*, Yanzhen Liu

College of Mathematics and Statistics, Henan University of Science and Technology, Luoyang Henan

Received: Jan. 26th, 2023; accepted: Feb. 21st, 2023; published: Feb. 28th, 2023

Abstract

Scientific prediction of the development law of infectious diseases is very important for epidemic prevention and control. In this paper, a dynamic model of SEIQDR with incubation period and isolation chamber is constructed, and the latent person is also infectious. The least square algorithm was used to estimate the parameters and fit the data. The results showed that the prediction results of SEIQDR model were in good agreement with the real data, with an average error rate of 3.44%. It could well describe the spread of the epidemic situation, and the staged prediction was better.

*通讯作者。

Keywords

Infectious Diseases, SEIQDR Model, Basic Regeneration Number, Data Fitting

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

新冠肺炎疫情自从 2019 年发现至今已流行近三年的时间, 给世界人民带来了沉重的灾难。时至今日, 我国目前仍在遭受疫情的反复冲击, 病毒还在不断地发生变异, 人类对于新冠病毒的认识仍需不断深化, 尤其是今年传播性和隐匿性显著增强的奥密克戎变异株。自从变异株传入我国以来, 我国疫情呈现出点多、面广、频发的特点, 轻症和无症状感染者比例高, 多个地区发生局部性聚集性疫情, 如杭州、吉林、上海、新疆等地相继出现的新冠疫情。因此, 基于数学模型的疫情预测预警对于疫情防控至关重要, SIR, SEIR 以及改进的 SEIR 模型被广泛建立[1] [2]。然而, 很多模型未考虑到隐性感染者以及人为隔离等措施的影响。

2. SEIQDR 模型的建立

我们将疫情期间香港总人口划分为六个不同的仓室: 易感者(S)、潜伏期患者(E)、感染者(I)、隔离感染者(Q)、恢复者(R)和死亡者(D)。其中, 感染者包括了显性感染者 I 和无症状感染者 A 。模型流程图见图 1。在建立模型之前, 我们做出如下假设:

- 1) 人群种类均匀混合, 不考虑人群的大规模迁入和迁出。且短期内, 不考虑人口的自然出生和死亡率。
- 2) 人群普遍具有易感性, 且只考虑人传人的传播方式。
- 3) 具有潜伏期, 且潜伏期具有一定的传染性。
- 4) 感染者一旦被发现隔离, 视为无感染他人的能力。
- 5) 恢复者短期内不再考虑成为易感人群。

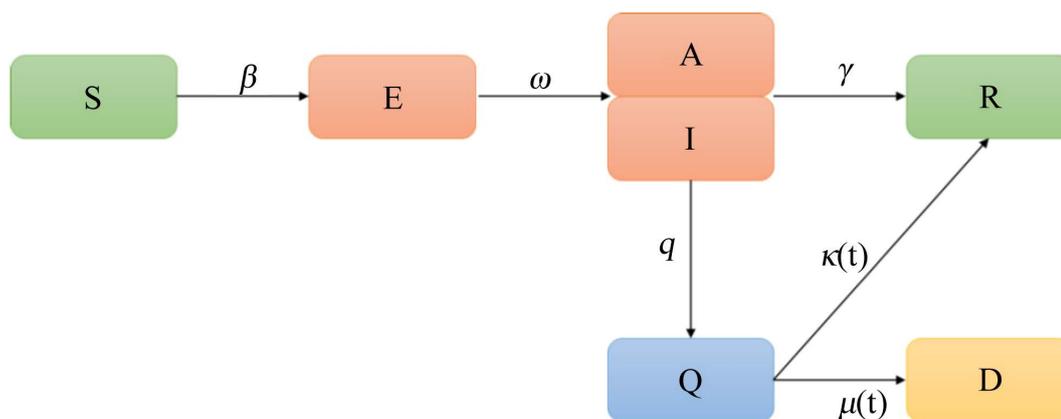


Figure 1. SEIAQRD model with isolation measures

图 1. 带隔离措施的 SEIAQRD 模型图

上述模型结构用数学模型表示为:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -c\beta \frac{S}{N}(\sigma E + A + I), \\ \frac{dE}{dt} = c\beta \frac{S}{N}(\sigma E + A + I) - \omega E, \\ \frac{dI}{dt} = \omega E - (\gamma + q)I, \\ \frac{dQ}{dt} = qI - \gamma_1[\kappa(t) + \mu(t)]Q, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I + \gamma_1\kappa(t)Q, \\ \frac{dD}{dt} = \gamma_1\mu(t)Q, \end{cases} \quad (1)$$

其中, N 为城市总人口数, c 是感染者平均每天接触易感者的人数, β 是感染者的传染概率, ω 是潜伏者转化为感染者的速率, σ 是潜伏期患者传染力衰减因子, q 是感染者被发现隔离的比例, γ 是感染者的自然恢复速率, γ_1 是隔离感染者的治疗恢复速率, $\kappa(t)$ 是隔离治疗者的恢复率, $\mu(t)$ 是确诊患者的死亡率。

由下一代再生矩阵可得基本再生数表达式[3]:

$$R_0 = \rho\left(FV^{-1}\Big|_{E_0}\right) = c\beta\left\{\frac{\sigma}{\omega} + \frac{1}{\gamma + q}\right\}. \quad (2)$$

3. 参数赋值与估计

所建立模型中共包含 7 个参数, 分别为无症状感染者和发病者日接触人数(c)、病毒传染率(β)、潜伏期系数(ω)、感染者隔离比率(q)、无症状感染者恢复速率(γ)、确诊患者恢复率 $\kappa(t)$ 和死亡率 $\mu(t)$ 。其中, 常数参数 c , ω , γ , 可以通过查阅已发表的文献获得一致的赋值。未知参数 β , q 需要通过借助 Matlab 软件, 采用最小二乘算法进行估计。未知参数函数 $\kappa(t)$ 拟用指数曲线去拟合恢复率数据, 具体表达式如下:

$$\kappa(t) = 1 - \frac{\kappa_m}{1 + ae^{b(t-1)}}, \quad (3)$$

其中, κ_m 是当前条件下确诊患者的最大恢复率, a 是指数增长系数, b 是恢复指数递增速率。

另外, 模型中含有 6 个初值变量, 分别为易感者(S)、潜伏者(E)、感染者(I)、隔离者(Q)、恢复者(R)和死亡者(D)。其中, 初值 $S(0)$, $I(0)$, $R(0)$, $D(0)$ 和 $Q(0)$ 可以由真实疫情数据得到, $E(0)$ 则通过采用初始三天新增确诊人数之和近似得到。

4. 实例分析

4.1. 数据来源

疫情数据来自于国家卫健委、中国疾病预防控制中心发布的每日疫情信息, 收集整理得到 2022 年 1 月 1 日至 4 月 30 日香港的新冠肺炎每日新增确诊患者人数、现存感染人数、累积感染人数、累计治愈病例数及死亡病例数。人口学数据来自国家统计局公布的 2021 年年底香港总人口数。部分数据见表 1。

Table 1. Hong Kong epidemic data display
表 1. 香港疫情数据展示

日期	天数	每日新增	现存确诊人数	累计确诊人数	累计死亡人数	累计治愈人数
1月1日	1	18	245	12,667	213	12,209
1月2日	2	3	237	12,664	213	12,214
1月3日	3	13	245	12,677	213	12,219
1月4日	4	13	249	12,690	213	12,228
1月5日	5	18	265	12,708	213	12,230
1月6日	6	24	284	12,732	213	12,235
1月7日	7	17	301	12,749	213	12,235
...
4月28日	118	990	262,028	330,488	9287	59,173
4月29日	119	111	261,985	330,599	9298	59,316
4月30日	120	71	261,858	330,670	9308	59,504

注：现存确诊人数 = 累计确诊人数 - 累计死亡人数 - 累计治愈人数。

4.2. 疫情流行基本特点

从2022年香港疫情爆发以来,至统计截止日期2022年4月30日,疫情共计持续120天,其中历经58天(即2022年2月27日),香港每日新增感染人数突破万人,随后疫情大规模发展,每日现存确诊人数持续上升。截止4月30日,香港地区现存确诊人数达261,853人,累计确诊人数达330,670人,累计死亡9308人,累计治愈59,504人。疫情总体发展趋势见图2。

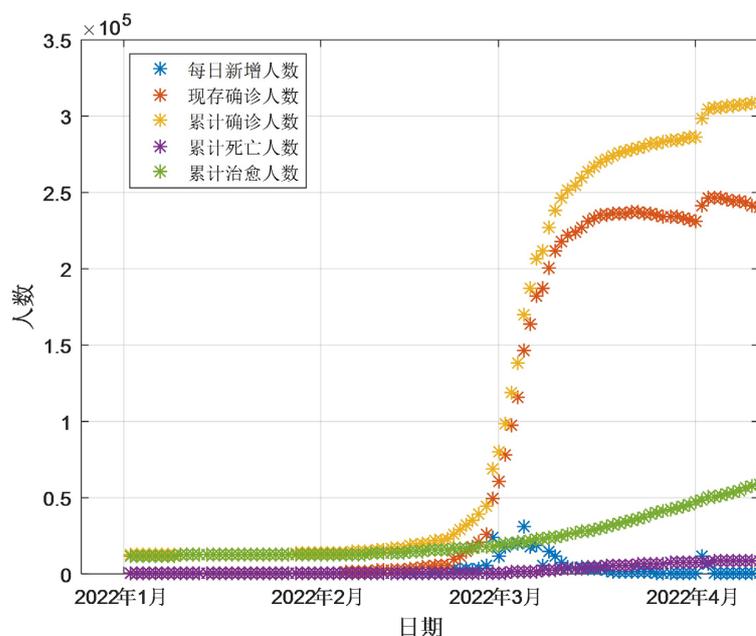


Figure 2. Overall development trend of the epidemic in Hong Kong
图 2. 香港疫情总体发展趋势

疫情治愈率和死亡率是大家普遍关心的一个问题, 因此我们做出香港疫情期间治愈率和死亡率变化趋势图。其中, 治愈率 r 计算公式如下: $r_i = \frac{n_i}{N_i}$, 其中, n_i 为第 i 天的累计治愈人数, N_i 为第 i 天的累计确诊病例数。同理, 可以定义死亡率计算公式。做出死亡率和治愈率变化曲线图, 见图 3。

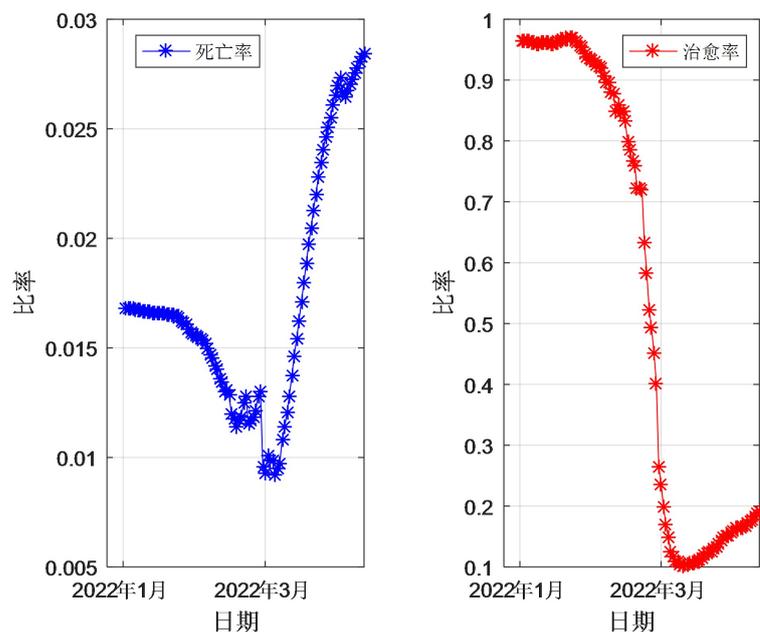


Figure 3. Cure rate and mortality trend in Hong Kong
图 3. 香港患病治愈率和死亡率趋势

由图 3 可以看出, 整体上随着疫情的发展, 疫情死亡率呈上升趋势, 最终达到 2.84%。总体来说, 此次疫情属于新冠奥密克戎变异株, 死亡率较低。但是, 传播能力较强, 所以导致疫情大规模爆发, 治愈率较低。特别是, 随着感染人数的大规模增加, 香港疫情出现治愈率不增反减的情况。

4.3. 参数估计结果

首先, 通过查阅大量文献资料获得一致的参数赋值: $c, \omega, \sigma, \gamma$ 。接着, 基于 2022 年 1 月 1 日~4 月 30 日官网公布的每日治愈病人总数、累计死亡病例数和累计感染人数, 得到治愈率和死亡率数据。由于在 3 月 9 日这一天治愈率和死亡率出现拐点, 因此我们采用指数模型和平均值相结合的分阶段模型。利用数据拟合, 采用最小二乘法求得模型中未知参数, 得到确诊病人治愈率函数和死亡率函数模型表达式:

$$\kappa(t) = \begin{cases} 1 - \frac{0.96}{1 + 600e^{-0.13(t-1)}} & \text{3月9日之前} \\ 0.15 & \text{3月9日之后} \end{cases}, \quad \mu(t) = \begin{cases} 0.014 & \text{3月9日之前} \\ \frac{0.028}{1 + 1.5e^{-0.15(t-1)}} & \text{3月9日之后} \end{cases}$$

数据拟合结果见图 4。

然后, 根据每天现存确诊人数、每日新增患者人数、累计死亡人数、治愈人数等真实疫情数据, 以及香港市人口总数, 采用最小二乘法结合我们提出的 SEIQRD 动力学模型, 估算出模型中的未知参数: β, q 。同时潜伏者 E 的初始值 $E(0)$, 我们采用接下来三天的新增确诊病例近似。并假设: 初始时刻发现的感染者都被隔离治疗, 则初始隔离确诊患者 $Q(0) =$ 确诊患者人数。具体参数估计结果见表 2。

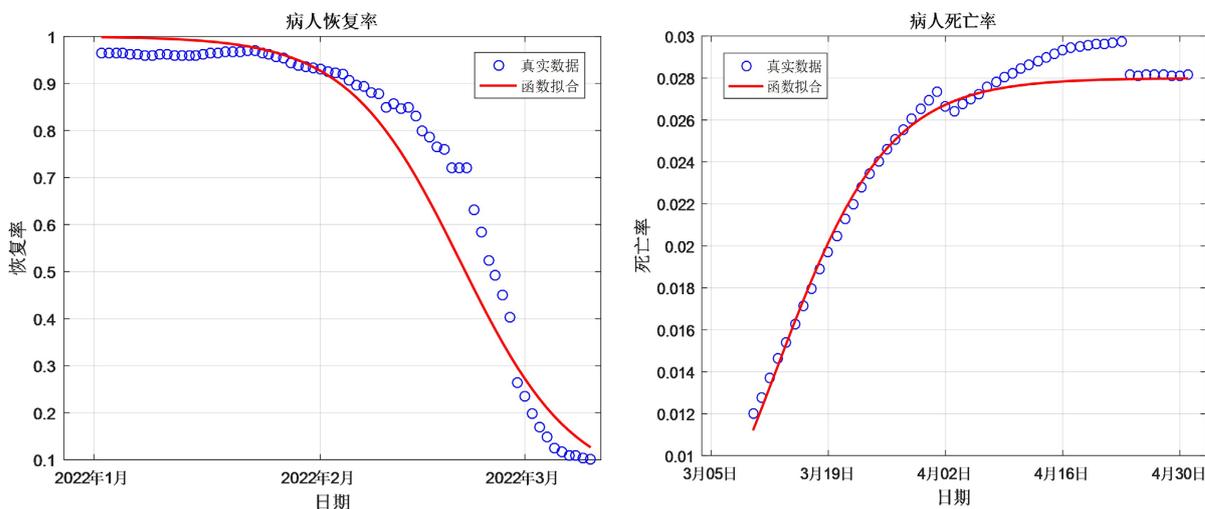


Figure 4. Function fitting of recovery rate and mortality of confirmed cases

图 4. 确诊病例恢复率和死亡率函数拟合

Table 2. Meaning and estimated value of parameters in the model

表 2. 模型中参数含义及其估计值

参数	含义	取值	来源
β	初始传染概率	0.04	估计
ω	潜伏期到发病的速率	1/3.18	文献[4]
c	感染者平均日接触率	10	文献[5]
γ	感染者自然恢复速率	1/7	文献[6]
γ_1	隔离感染者治疗恢复速率	1/10	文献[6]
σ	潜伏期传染性衰减因子	0.5	文献[7]
q	隔离比例	0.45	估计
μ	确诊患者平均死亡率	0.014	数据计算
κ_m	当前条件下确诊患者恢复最大比例	0.96	数据计算
初值	含义	估计值	来源
N	香港市总人口数	740.21 万	官方
$S(0)$	初始时刻易感者人数	N-E-I-A-Q-D-R	真实数据
$E(0)$	初始时刻潜伏者人数	29	估计
$I(0)$	初始时刻发病者人数	18	真实数据
$Q(0)$	初始时刻确诊隔离人数	245	真实数据
$D(0)$	初始时刻死亡人数	0	真实数据
$R(0)$	初始时刻治愈者人数	5	真实数据

4.4. 数据拟合结果

根据参数估计结果, 带入基本再生数表达式(2)得到香港本次疫情的基本再生数 $R_0 = 1.64$ 。但随着疫情的大规模发展, 再生数会持续增加, 最后随着疫情得到控制, 再生数会下降到 1 之下。

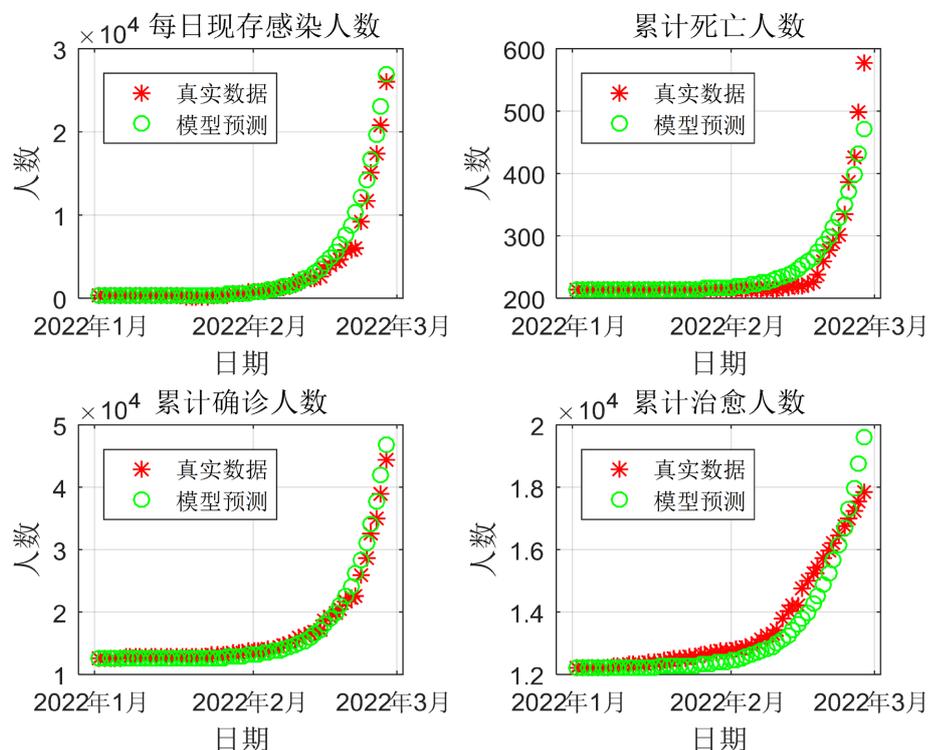


Figure 5. The fitting results of the daily number of existing infections, cumulative deaths, cumulative number of confirmed cases and cumulative number of cured cases in Hong Kong from January 1 to March 9, 2022

图 5. 香港 2022 年 1 月 1 日~3 月 9 日每日现存感染人数、累计死亡人数、累计确诊人数、累计治愈人数数据拟合结果

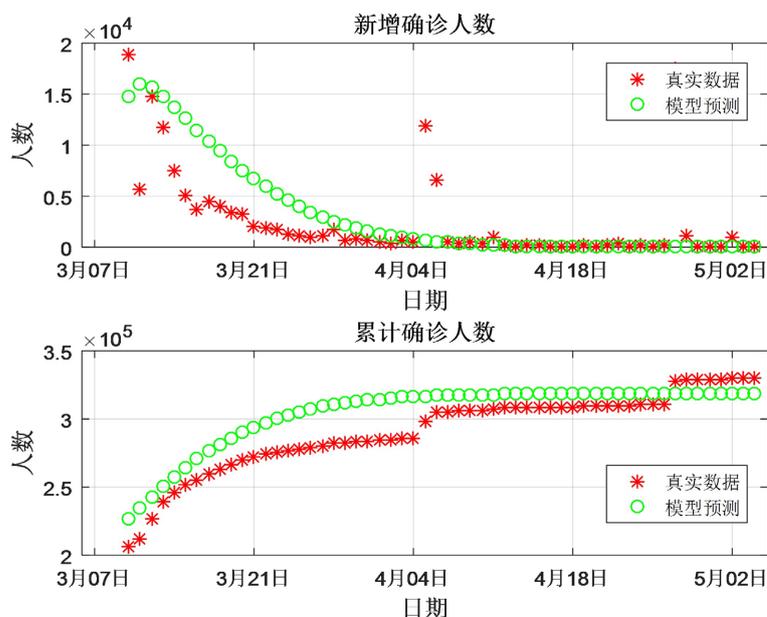


Figure 6. The fitting results of the new number of confirmed cases and the cumulative number of confirmed cases in Hong Kong from March 9 to April 30, 2022

图 6. 香港 2022 年 3 月 9 日~4 月 30 日新增确诊人数、累计确诊人数数据拟合结果

在疫情传播过程中, 第 56 天疫情迅速增加, 每日现存感染人数、新增确诊人数大规模增加, 此后处于不断上升阶段。且结合治愈率和死亡率变化函数, 我们尝试采用分阶段的动力学模型, 先拟合 1 月 1 日~3 月 9 日的的数据, 拟合效果见图 5。从图 5 中可以看出, SEIQRD 模型预测结果与真实数据比较吻合, 可以较好地描述香港疫情的早期传播规律。

接着, 进行第二阶段模型拟合时, 潜伏者 E 的初始值采用第一阶段模型预测的最后预测值, 即 $E(0) = 32283$ 。现存确诊人数、累计死亡人数、累计治愈人数由实际数据得到, 即 3 月 9 日数据。该阶段设接触率 $a = 4 \exp\{-0.05 * (T - 1)\} + 2$, 隔离率 $q = 0.4$, 根据 2022 年 3 月 9 日~4 月 30 日真实疫情数据进行数据拟合, 结果见图 6。

我们详细列出了最后 5 天累计确诊病例数模型预测结果与真实数据对比, 结果见表 3。结合图 6 分析, 模型预测准确度比较高, 预测最后 5 天平均误差率达 3.44%。总体来说, 模型可以较好的描述疫情的发展规律。

Table 3. Error of cumulative number of confirmed cases predicted by the model

表 3. 模型预测累计确诊病例数误差

日期	4 月 26 日	4 月 27 日	4 月 28 日	4 月 29 日	4 月 30 日
真实数据	329,356	329,498	330,488	330,599	330,670
预测数据	318,752	318,754	318,755	318,757	318,758
误差绝对值	10,604	10,744	11,733	11,842	11,912
误差率	3.22%	3.26%	3.55%	3.58%	3.6%
平均误差	Bias = 3.44%				

5. 结语

香港是奥密克戎变异株最先输入的城市, 由此引起了我国此轮疫情的爆发[8]。据报告, 奥密克戎是新冠病毒的变异毒株, 相较于新冠病毒而言, 奥密克戎有更强的传染性, 传播速度也更快, 平均潜伏期为 3.18 天, 相对低于新冠毒株 5.2 天[9]。且潜伏期同样具有传染性, 此轮疫情同时出现了许多无症状感染者, 但香港疫情数据没有单独通报无症状感染者的个数。因此, 我们建立的 SEIQDR 模型中感染者同时包含了显性感染者和无症状感染者, 并假设他们具有相同的传播能力。模型的建立更符合香港疫情实际情况, 具有更好的应用价值。而模型在其他区域的应用要根据当地疫情的特点和采取的各种措施进行适当改进和调节。

基金项目

河南省科技攻关重点项目(编号: 222102320461)。

参考文献

- [1] 薛明劲, 黄钊慰, 胡雨迪, 杜进林, 黄志刚. 传染病动力学模型研究进展[J]. 预防医学, 2022, 34(1): 53-57.
- [2] 尹楠. 基于 SIR 模型的有限区域内新冠肺炎疫情传播仿真模拟[J]. 统计与决策, 2020, 36(5): 15-20.
- [3] 马知恩, 周义仓, 王稳地, 等. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 10-35.
- [4] Hanai, T. (2022) Quantitative in Silico Analysis of SARS-CoV-2 S-RBD Omicron Mutant Transmissibility. *Talanta*, **240**, 123206. <https://doi.org/10.1016/j.talanta.2022.123206>
- [5] 崔景安, 吕金隆, 郭松柏, 陈田木. 新发传染病动力学模型——应用于 2019 新冠肺炎传播分析[J]. 应用数学学报, 2020, 43(2): 147-155.

-
- [6] 丁中兴, 宋文煜, 方欣玉, 等. 基于 SEIAQR 动力学模型预测湖北省武汉市新型冠状病毒肺炎疫情趋势[J]. 中国卫生统计, 2020, 37(3): 327-330+334.
- [7] Shao, P. and Shan, Y. (2020) Beware of Asymptomatic Transmission: Study on 2019-nCoV Prevention and Control Measures Based on Extended SEIR Model. <https://doi.org/10.1101/2020.01.28.923169>
- [8] 潘静静, 王莹莹, 王文华, 李亚飞, 王艺康, 尤爱国, 王若琳, 王海峰, 马红霞, 叶莹, 黄学勇, 郭万申. 一起由奥密克戎变异株 BA.2.2 引起的河南省新冠肺炎本土疫情流行病学特征分析[J]. 中国公共卫生, 2022, 38(8): 975-979.
- [9] 邹彦琳, 梁进. SEIR 修正模型下的武汉地区 COVID-19 疫情研究与分析[J]. 运筹与模糊学, 2020, 10(3): 17.