

无源定位

张晓琪, 高佳楠, 徐子凯

沈阳航空航天大学安全工程学院, 辽宁 沈阳

收稿日期: 2023年3月26日; 录用日期: 2023年4月21日; 发布日期: 2023年4月29日

摘要

无源定位观测设备不向外发射电磁波, 仅被动接受外界无线电信号对目标进行定位。本文主要通过机理研究, 坐标变换, 迭代法等对基于无人机目标的无源定位进行研究。问题1(1)中首先固定两架无人机发射信号即Y00, Y01, 取两个固定无位置偏差的发射信号无人机构建一个极坐标系, 接收信号到Y00的直线距离与极坐标系夹角为自变量, 在两个三角形中运用正弦定理求解两种接收信号的无人机的坐标。

$$\left(\frac{R \sin(\theta + \alpha_1)}{\sin \alpha_1}, \sin^{-1} \left(\frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin(\alpha_2 - |\beta|)}{\sin \alpha_1 \cos(\sin(\alpha_2 - |\beta|)) - \sin \alpha_2 \cos \alpha_1} \right) \right),$$
$$\left(\frac{R \sin(\gamma + \alpha_1)}{\sin \alpha_1}, \sin^{-1} \left(\frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin(\alpha_1 + |\beta|)}{\sin \alpha_1 \cos(\sin(\alpha_2 + |\beta|)) - \sin \alpha_2 \cos \alpha_1} \right) \right)。$$

问题1(2)是基于问题一的延伸与发展, 问题一解决了位于圆心的无人机(FY00)和编队中另2架无人机发射信号, 同时在发射信号的无人机位置无偏差且编号已知的情况下, 如何确定其余位置略有偏差的被动接收信号无人机的位置的问题。简言为已知3 (包含无人机(FY00))架机编号位置, 可确定另一位置略有偏差无人机位置。问题二为已知两架无人机FY00和FY01的编号和位置, 还需几架无人机编号位置, 可确定另一位置略有偏差无人机编号位置? 首先需得假设可发射信号的无人机亦可接收信号, 题目中虽无说明但猜推测是可以, 可发射信号的无人机亦可接收信号。9架无人机均匀分布在圆周上, 若无偏差相邻无人机与圆心夹角均相等。由于逆时针或顺时针方位问题, 将无人机分为上半周、下半周两组。由于发射信号的无人机位置无偏差, 以FY00、FY01所连直线为X轴, 由接收信号角度判断其方位角, 进而判断所需无人机数。采用图形分析法进行讨论, 最后在三角形定位下进行最小二乘法分析。讨论出还需几架无编号无人机才能进行定位。问题1(3)题根据接收到的方向信息来调整无人机的位置, 通过表中数据已知FY00和FY01的位置是精确的, 将FY00至FY09的极坐标转化为直角坐标可以得到无人机的直角坐标图, D为调整前各无人机与准确位置的距离之和, 用迭代法依次矫正, 最终使各无人机与准确位置的距离之和可以减小到3.6, 很接近各个无人机的理想位置。问题2以FY13为坐标原点建立坐标系第1列FY11 [0, 100], FY12 [0, 50], FY13 [0, 0], FY14 [0, -50], FY15 [0, -100]; 第2列FY07 [25√3, 75], FY08 [25√3, 25], FY09 [25√3, -25], FY10 [25√3, -75], 第3列FY04 [50√3, 50], FY05 [50√3, 0], FY06 [50√3, -50], 第4列FY03 [75√3, 25], FY02 [75√3, -25], 第5列FY01 [100√3, 0]通过程序模拟, 将除了FY13和FY14外的无人机进行偏移处理, 使其偏移标准位置, 进行模拟仿真。以FY13和FY14作为两个固定发射信号无人机, 设定另外一架已知编号无人机发射信号, 可以通过问题1(1)模型确定其余无人机坐标, 再通过问题1(3)方法对于其余无人机进行多次重复

校准，来达到不断减小无人机偏移距离之和的目的。设计出无人机的调整方案。

关键词

正弦定理，图形分析法，最小二乘法，极坐标转换直角坐标，迭代法

Passive Location

Xiaoqi Zhang, Jianan Gao, Zikai Xu

School of Safety Engineering, Shenyang Aerospace University, Shenyang Liaoning

Received: Mar. 26th, 2023; accepted: Apr. 21st, 2023; published: Apr. 29th, 2023

Abstract

Passive positioning observation equipment does not emit electromagnetic waves outward, but only passively accepts external radio signals to locate the target. In this paper, the passive positioning of UAV target is mainly studied through mechanism study, coordinate transformation and iterative method. Problem 1 (1) in the first fixed two UAV launch signal namely Y00, Y01, take two fixed position deviation of the launch signal drones to build a polar system, receive the signal to Y00 linear distance and polar system Angle for independent variable, using the sine theorem in the two triangle solution two receiving signal coordinates.

$$\left(\frac{R \sin(\theta + \alpha_1)}{\sin \alpha_1}, \sin^{-1} \left(\frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin(\alpha_2 - |\beta|)}{\sin \alpha_1 \cos(\sin(\alpha_2 - |\beta|)) - \sin \alpha_2 \cos \alpha_1} \right) \right),$$

$$\left(\frac{R \sin(\gamma + \alpha_1)}{\sin \alpha_1}, \sin^{-1} \left(\frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin(\alpha_1 + |\beta|)}{\sin \alpha_1 \cos(\sin(\alpha_2 + |\beta|)) - \sin \alpha_2 \cos \alpha_1} \right) \right).$$

Problem 1 (2) is based on the extension of the problem and development, a problem solved in the center of the drone (FY 00) and formation of two drones launch signal, at the same time in the position of the drone without deviation and the number is known, how to determine the rest of the position slightly deviation passive receiving signal the position of the drone. In short, it is the rack number position of known 3 (including UAV (FY 00)), which determines another position slightly deviated from the position of the UAV. Question 2 is the number and location of the two drones FY 00 and FY 01, and several drones are numbered to determine the number location of the UAV? First of all, it should be assumed that the UAV that can transmit the signal can also receive the signal. Although there is no explanation in the topic, I guess it is ok, and the UAV that can transmit the signal can also receive the signal. The 9 UAVs are evenly distributed on the circle, and if there is no deviation, the adjacent UAV are equal to the center of the circle. Due to the counterclockwise or clockwise orientation problem, the UAV is divided into two groups: the first week and the second week. Because there is no deviation in the position of the UAV of the transmitting signal, taking the straight line connected to FY 00 and FY 01 as the X-axis, the Angle of the receiving signal will judge the azimuth, and then judge the number of UAV required. Discussion were discussed by graphical analysis and finally least squares analysis under triangle positioning. Several unnumbered drones are needed to locate. Problem 1 (3) according to the received direction information to adjust the position of the drone, through the data in the table known FY 00 and FY 01 position is accurate, FY

00 to FY 09 polar coordinates into rectangular coordinates can get drones, D to adjust the sum of the distance between the drones and the exact position, corrected by an iterative method, finally make the sum of the drones and the exact position of the distance can be reduced to 3.6, very close to the ideal position of the drones. Question 2: FY 13: column 1 FY 11 [0,100], FY 12 [0,50], FY 13 [0,0], FY 14 [0, -50], FY 15 [0, -100]; column 2 FY 07 [$25\sqrt{3}$, 75], FY 08 [$25\sqrt{3}$, 25], FY 09 [$25\sqrt{3}$, -25], FY 10 [$25\sqrt{3}$, -75], column 3, FY 04 [$50\sqrt{3}$, 50], FY 05 [$50\sqrt{3}$, 0], FY 06 [$50\sqrt{3}$, -50], column 4, FY 03 [$75\sqrt{3}$, 25], FY 02 [$75\sqrt{3}$, -25], column 5, FY 01 [$100\sqrt{3}$, 0]. Through the program simulation, the UAV other than FY 13 and FY 14 was offset to shift the standard position. With FY 13 and FY 14 as two fixed launch signal drones, set another known number UAV launch signal, can be through the problem 1 (1) model to determine the rest of the UAV coordinates, then by problem 1 (3) method for the rest of the UAV repeated calibration, to achieve the purpose of continuously reduce the sum of the UAV offset distance. Design the adjustment plan for the UAV.

Keywords

Sine Theorem, Graphic Analysis Method, Least Square, Polar Coordinate Conversion Rightele Coordinate, Iteration Method

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 研究背景

随着社会发展以无人机为代表的“低慢小”目标成为空中日益增长的安全威胁，而传统的设备技术难以对其实施准确有效的处理。考虑到传统有源雷达不适用于城市复杂电磁环境，加上无人机雷达散射截面较小难以捕捉以及成本问题，无源定位技术成为对无人机定位的首选。无源定位观测设备不向外发射电磁波，仅被动接受外界无线电信号对目标进行定位，同时无源定位具有覆盖范围大、耗费低、良好的隐蔽性等优势。本文主要对基于无人机目标的无源定位跟踪技术进行了深入地研究。

无源定位是设备不向外发射电磁波，仅被动接受外界无线电信号从而对目标进行定位的技术。不同于有源定位，它不需要向目标发射电磁波来获得发射回波，具有良好的隐蔽性。因此，无源定位可以很好地补充完善现有定位系统，作为定位方法未来发展的重要方向，受到人们越来越多的重视[1]。

现代科学技术突飞猛进，尤其是高科技技术在军事领域就有重要作用，以雷达为核心的定位手段面临越来越严峻的挑战，单纯依靠我国军事人力手段即侦察兵来进行人为定位也十分困难，也必然会产生人员伤亡资源匮乏等问题，此时无源定位腾空如天降奇兵为我国军事现代化提供了重要帮助，无源定位手段是一种隐蔽探测，精准打击的重要手段。

2. 无源定位的问题分析

无源定位一般需要多站协同工作。由于单个侦察站在接收电磁信号时无法计量信号来自多远，它只能给出在什么时间收到什么方位进入的信号。因此，除了一些特殊的情况外，无源定位需要多站提供信息，协同定位，所以本文是针对多架无人机模拟个站点中的协同工作而采取的算法。

3. 本文创新性

在电子对抗领域，无源定位的应用十分重要。应用于无人机群的定位当中，在不对目标发射电磁信号的

条件下获得目标的位置。本文采用正弦定理、图形分析法、最小二乘法、极坐标转换直角坐标和迭代法实现无人机群间的相互定位,同时进行分析,讨论出已知条件下需要最少加数的无人机能实现定位系统。在军事领域,基于本文算法的无人机群定位方法,无源定位系统的使用不易被对方感知,无源定位系统不会对被敌方定位,一般不存在被干扰的问题,可以避免在目标战场上被敌群进行强磁干扰而失去方位而损毁和坠毁。

4. 应用前景

随着科技的发展和需求的扩大,无人机的无源定位应用能够有效扩大活动范围,提高工作时间,在军事、科研、政府、商业活动及个人消费品等领域都有很大的应用空间。我国是军事强国,重视军事发展,大力提高军事战略能力,无人机群在战场上的应用能力十分突出,是我国重点关注发展的项目。其具有隐蔽性强,作战灵活的特点,配以无源定位技术,加强屏蔽信号干扰和隐蔽自身的能力,大大提高无人机群的作战能力,使其可以广泛应用于多种作战场景。

5. 问题提出

编队由 10 架无人机组成,形成圆形编队,其中 9 架无人机(编号 FY01~FY09)均匀分布在某一圆周上,另 1 架无人机(编号 FY00)位于圆心无人机基于自身感知的高度信息,均保持在同一个高度上飞行。

问题 1: 1) 位于圆心的无人机(FY00)和编队中另 2 架无人机发射信号,其余位置略有偏差的无人机被动接收信号。当发射信号的无人机位置无偏差且编号已知时,建立被动接收信号无人机的定位模型。

2) 某位置略有偏差的无人机接收到编号为 FY00 和 FY01 的无人机发射的信号,另接收到编队中若干编号未知的无人机发射的信号。若发射信号的无人机位置无偏差,除 FY00 和 FY01 外,还需要几架无人机发射信号,才能实现无人机的有效定位?

3) 按编队要求,1 架无人机位于圆心,另 9 架无人机均匀分布在半径为 100 m 的圆周上。当初始时刻无人机的位置略有偏差时,请给出合理的无人机位置调整方案,即通过多次调整,每次选择编号为 FY00 的无人机和圆周上最多 3 架无人机遂行发射信号,其余无人机根据接收到的方向信息,调整到理想位置(每次调整的时间忽略不计),使得 9 架无人机最终均匀分布某个圆周上。利用表给出的数据,仅根据接收到的方向信息来调整无人机的位置,请给出具体的调整方案

问题 2: 实际飞行中,无人机集群也可以是其他编队队形,例如锥形编队队形(直线上相邻两架无人机的间距相等,如 50 m)。仍考虑纯方位无源定位的情形,设计无人机位置调整方案。

6. 问题假设

假设 1: 题目中的无人机略有偏差时,还大体在理想位置,不存在偏离过大范围的无人机;

假设 2: 假设每架无人机标号都是固定的,且明确知道哪些无人机发射信号;

假设 3: 不考虑磁场等因素对于无人机发送接受信号的影响;

假设 4: 无人机能发射信号也可以接受信号。

7. 符号说明

α_1 ——无人机接收的 Y00, Y01 发出的信号;

θ ——接收信号(如本例中 Y04)的无人机与 FY00, FY01 连线的夹角;

$|\beta|$ ——另一架发出信号(如本例中 Y02)的无人机与 FY00, FY01 连线的夹角;

α_2 ——无人机接收的 Y00 与另一架发出信号(如本例中 Y02)的无人机发出的信号;

x ——接收信号的(如本例中 Y02)无人机与 Y00 的直线距离;

y ——接收信号的(如本例中 Y08)无人机与 Y00 的直线距离;

γ ——接收信号(如本例中 Y08)的无人机与 FY00, FY01 连线的夹角;
 α ——FY00 接收到 FY01 和其余任意架无人机信号;
 β ——无人机编号;
 a_1 ——半径。

8. 问题分析

8.1. 问题(1)的分析

问题一要求已知三架发射信号无人机编号求接收信号无人机的定位[2]。

首先固定两架无人机发射信号即 Y00, Y01, 取两个固定无位置偏差的发射信号无人机构建一个极坐标系, 接收信号到 Y00 的直线距离与极坐标系夹角为自变量, 分情况讨论, 以特殊情况推普遍规律, 在两个三角形中运用正弦定理求解接收信号的无人机的坐标。

8.2. 问题 1(2)的分析

问题二是基于问题一的延伸与发展, 问题一解决了位于圆心的无人机(FY00)和编队中另 2 架无人机发射信号, 同时在发射信号的无人机位置无偏差且编号已知的情况下, 如何确定其余位置略有偏差的被动接收信号无人机的位置的问题[3]。简言为已知 3 (包含无人机(FY00))架机编号位置, 可确定另一位置略有偏差无人机位置。问题二为已知两架无人机 FY00 和 FY01 的编号和位置, 还需几架无人机编号位置, 可确定另一位置略有偏差无人机编号位置? 首先需得假设可发射信号的无人机亦可接收信号, 题目中虽无说明但猜推测是可以, 可发射信号的无人机亦可接收信号。9 架无人机均匀分布在圆周上, 若无偏差相邻无人机与圆心夹角均相等。由于逆时针或顺时针方位问题, 将无人机分为上半周、下半周两组。由于发射信号的无人机位置无偏差, 以 FY00、FY01 所连直线为 X 轴, 由接收信号角度判断其方位角, 进而判断所需无人机数。采用图形分析法进行讨论, 最后在三角形定位下进行最小二乘法分析。讨论出还需几架无编号无人机才能进行定位。

8.3. 问题 1(2)的分析

本题根据接收到的方向信息来调整无人机的位置, 通过表中数据已知 FY00 和 FY01 的位置是精确的(分别为(0,0) (100,0))。

将 FY00 至 FY09 的极坐标转化为直角坐标可以得到无人机的直角坐标图(如图 1)。9 架无人机是均匀分布在某个圆周上, 说明圆周的位置和大小不是绝对的, 因此本文可以从 FY02-FY09 轮流选取一个无人机,

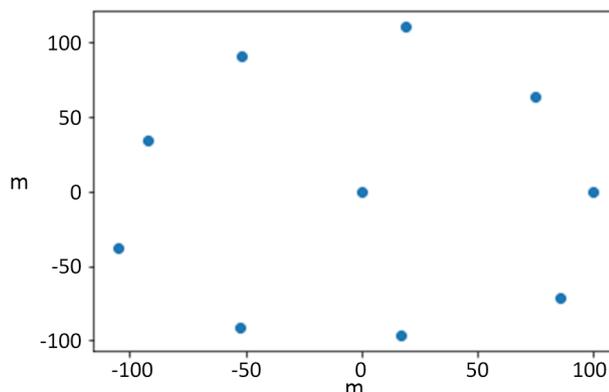


Figure 1. The actual coordinates of the UAV
 图 1. 无人机实际坐标图

与 FY00 和 FY01 一起，作为发射信号的三架无人机，校正其它无人机的位置，再选取第二个无人机，与 FY00 和 FY01 一起，校正其它无人机的位置，在每一次矫正后，通过代码 1 可以得到各个矫正无人机位置和标准无人机位置距离之和，通过这种迭代的方法可以发现每一次矫正后，其位置偏差之和在不断减小。

8.4. 问题 2 的分析

以 FY13 为坐标原点建立坐标系(如图 2)。

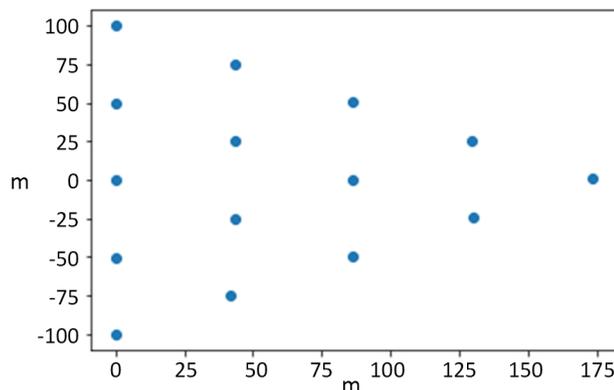


Figure 2. Tapered coordinate diagram of the standard UAV
图 2. 标准无人机锥形坐标图

- 第 1 列 FY11 $[0, 100]$, FY12 $[0, 50]$, FY13 $[0, 0]$, FY14 $[0, -50]$, FY15 $[0, -100]$;
- 第 2 列 FY07 $[25\sqrt{3}, 75]$, FY08 $[25\sqrt{3}, 25]$, FY09 $[25\sqrt{3}, -25]$, FY10 $[25\sqrt{3}, -75]$;
- 第 3 列 FY04 $[50\sqrt{3}, 50]$, FY05 $[50\sqrt{3}, 0]$, FY06 $[50\sqrt{3}, -50]$;
- 第 4 列 FY03 $[75\sqrt{3}, 25]$, FY02 $[75\sqrt{3}, -25]$;
- 第 5 列 FY01 $[100\sqrt{3}, 0]$ 。

通过程序模拟，得到坐标如下。

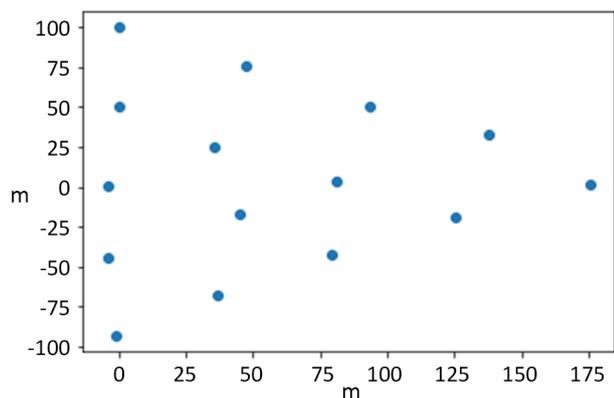


Figure 3. Coordinate diagram of offset tapered drone
图 3. 偏移锥形无人机坐标图

将除了 FY13 和 FY14 外的无人机进行偏移处理，使其偏移标准位置，进行模拟仿真(如图 3)。以 FY13 和 FY14 作为两个固定发射信号无人机，设定另外一架已知编号无人机发射信号，可以通过问题 1(1)模型确定其余无人机坐标，再通过问题 1(3)方法对于其余无人机进行多次重复校准[4]，来达到不断减小无人机偏移距离之和的目的。设计出无人机的调整方案。

9. 问题 1(1)的模型建立与求解

9.1. 问题 1(1)的模型建立

9.1.1. 极坐标下方程的建立

由于发送信号的无人机位置无偏差且编号已知，又因为每个无人机按编号顺序排列，因此可以根据编号位置关系结合三角函数关系构建模型。题目给出 Y00 是三架发射信号无人机中的一架，选取固定发射信号无人机 Y01，对另一未知发射信号无人机位于接收信号无人机与两架发射信号无人机所构成的劣弧优弧上分情况讨论，劣弧时如下图 4 Y00, Y01, Y02 为已知飞机，Y04 为未知。根 01, 04 编号差就可以求出 θ 的大小，在圆中根据三角函数关系用 $\alpha_1, \alpha_2, \theta$ 表达出 04 02 00 所构成的角和 04 01 00 所构成得夹角， x 是 04 到 00 的距离，将 θ, x 作为影响因子，根据它就可以调整无人机位置，实现定位。

劣弧时如下图 Y00, Y01, Y02 为已知飞机，Y08 为未知。根 01, 04 编号差就可以求出 γ 的大小，在圆中根据三角函数关系用 $\alpha_1, \alpha_2, \gamma$ 表达出 08 02 00 所构成的角和 08 01 00 所构成得夹角， y 是 04 到 00 的距离，将 γ, y 作为影响因子，根据它就可以调整无人机位置，实现定位。

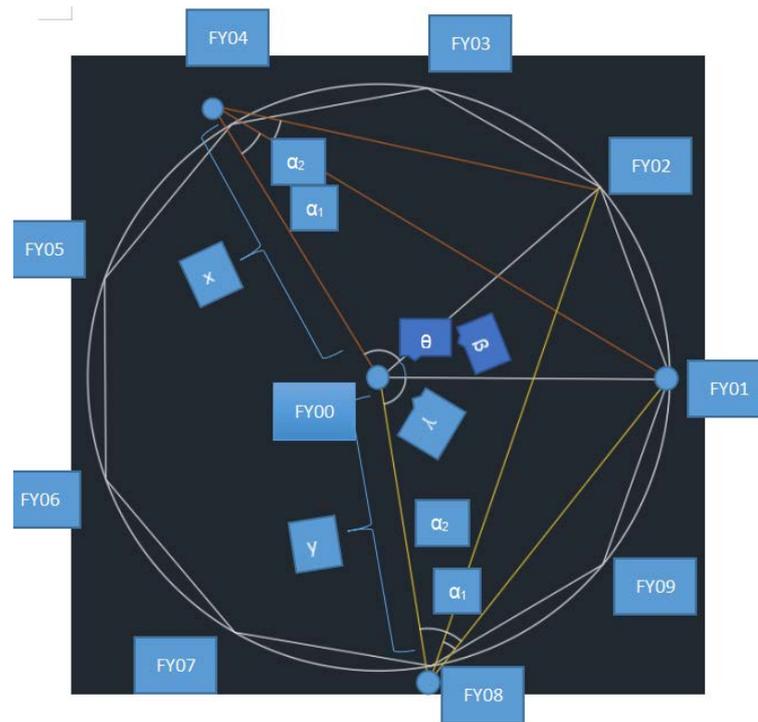


Figure 4. Schematic diagram of the four-circle circular UAV formation simulation
图 4. 圆形无人机编队模拟示意图

假设圆周的半径为 R 以无人机 FY00 为极点，以 FY00 为端点且经过 FY01 的射线为极轴建立极坐标系。由于发射信号的无人机都是位置准确的，所以另一架发射信号无人机的位置是根据编号固定的，由于理想状态下，所有无人机均匀分布在圆周上，则其对应的坐标为 $(R, \frac{9\beta}{2\pi} + 1)$ ，其编号为 Y0K, $K = \frac{9\beta}{2\pi} + 1$ 接着，假设接受信号的无人机的极坐标位置为 (x, θ) ，由于剩下无人机的位置略有偏差，所以两个参数都需要进行确定。接着，本文去假设它与三架发射信号的无人机的夹角。假设与 FY00、FY01 之间的夹角为 α_1 ，与 FY00、FY0K 之间的夹角为 α_2 。接下来需要通过已知信息来确定出相应接收信号无人机的极坐标 (x, θ) 。

本文将略有偏差的无人机与确定的无人机位置相连，利用正弦定理，通过联立方程组来解得极坐标 (x, θ) 。下面由于牵扯到角度，还需要对 K 的不同值进行分类讨论：

(情况 1) FY0K 在接收信号无人机与 Y00, Y01 的劣弧上(如 Y00, Y01, Y02 发射信号($K = 2$), Y04 接收信号)。

在 Y00, Y01, Y04 所构成的三角形中由正弦定理得

$$\frac{\sin \alpha_1}{R} = \frac{\sin(\pi - \alpha_1 - \theta)}{x}$$

在 Y00, Y02, Y04 所构成的三角形中由正弦定理得

$$\frac{\sin \alpha_2}{R} = \frac{\sin(\pi - \alpha_2 - (\theta - |\beta|))}{x}$$

$$\text{解得} \begin{cases} \theta = \sin^{-1} \left(\frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin(\alpha_2 - |\beta|)}{\sin(\alpha_1) \cos(\sin(\alpha_2 - |\beta|)) - \sin \alpha_2 \cos \alpha_1} \right) \\ x = \frac{R \sin(\theta + \alpha_1)}{\sin \alpha_1} \end{cases}$$

$$\text{此时接收信号无人机的位置为} \left(\frac{R \sin(\theta + \alpha_1)}{\sin \alpha_1}, \sin^{-1} \left(\frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin(\alpha_2 - |\beta|)}{\sin(\alpha_1) \cos(\sin(\alpha_2 - |\beta|)) - \sin \alpha_2 \cos \alpha_1} \right) \right)$$

(情况 2)假设接受信号的无人机的极坐标位置为 (y, γ) ，剩下无人机的位置略有偏差，所以两个参数都需要进行确定。假设它与三架发射信号的无人机的夹角。假设与 FY00、FY01 之间的夹角为 α_1 ，与 FY00、FY0K 之间的夹角为 α_2 。接下来需要通过已知信息来确定出相应接收信号无人机的极坐标 (y, γ) 。

本文将略有偏差的无人机与确定的无人机位置相连，利用正弦定理，通过联立方程组来解得极坐标 (y, γ) 设另一架发射信号无人机在接收信号无人机与 Y00, Y01 的优弧上(如 Y00, Y01, Y02 发射信号($K = 2$), Y08 接收信号)由正弦定理得

在 Y00, Y01, Y08 所构成的三角形中由正弦定理得

$$\frac{\sin \alpha_1}{R} = \frac{\sin(\pi - \alpha_1 - \gamma)}{y}$$

在 Y00, Y02, Y08 所构成的三角形中由正弦定理得

$$\frac{\sin \alpha_2}{R} = \frac{\sin(\pi - \alpha_2 - (\gamma + |\beta|))}{y}$$

$$\text{解得} \begin{cases} \gamma = \sin^{-1} \left(\frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin(\alpha_1 + |\beta|)}{\sin(\alpha_1) \cos(\sin(\alpha_2 + |\beta|)) - \sin \alpha_2 \cos \alpha_1} \right) \\ y = \frac{R \sin(\gamma + \alpha_1)}{\sin \alpha_1} \end{cases}$$

$$\text{此时接收信号无人机的位置为} \left(\frac{R \sin(\gamma + \alpha_1)}{\sin \alpha_1}, \sin^{-1} \left(\frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin(\alpha_1 + |\beta|)}{\sin \alpha_1 \cos(\sin(\alpha_2 + |\beta|)) - \sin \alpha_2 \cos \alpha_1} \right) \right)$$

10. 问题 1(2)的模型建立与求解

在问题一的基础上，在包含无人机 FY00，以及 2 个已知位置和编号的无人机时，即可定位任意一个

已知编号的接收无人机的位置。那么问题二就可以转化成，已知无人机 FY00 和 FY01 的编号和位置，要多少个未知编号发射无人机，才能知道未知发射无人机的编号[2]。

可知圆周上相邻无人机的圆心角为 40° ，假设可以发送信号无人机亦可接收信号，FY00 接收到 FY01 和其余任意架无人机信号为 $\alpha = n40^\circ$ ，其编号为 $\beta = n+1$ 。无人机只能接受角度信息， $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ 。见下图，在 FY00 的极坐标系中，FY0A = M(r, a₁)，其中夹角 FY00-FY0A 与 FY00-FY01 的夹角。

设半径为 a_1 ，由于发射无人机定位无偏差，所以 $a_1 = r$ 已知。

当 $2 < A < 5$ 时，由于 a_1 是 40° 的倍数，所以 $A = n/40 + 1$ ，即可得知 FY0A 的编号。而当 $5 \ll A \ll 9$ 时，由于 FY0A 可能在 FY01 的顺时针或者逆时针方向上，无法区分。此时引入一个新的发射无人机 FY0B 增加定位条件。

见下图 5，设 FY00-FY0A-FY01 的内角分别是 a_1, a_2, a_3 ，FY00-FY0B-FY01 的内角分别是 b_1, b_2, b_3 ，由于全部是发射无人机，可发射和接收信号，所以全部内角已知，且 r 已知。

见下图 5，设 FY00-FY0A-FY0B 的内角分别是 c_1, c_2, c_3 ，其中 $c_1 = a_1 + b_1$ ，且全部是发射无人机，所以全部内角已知，且 r 已知。

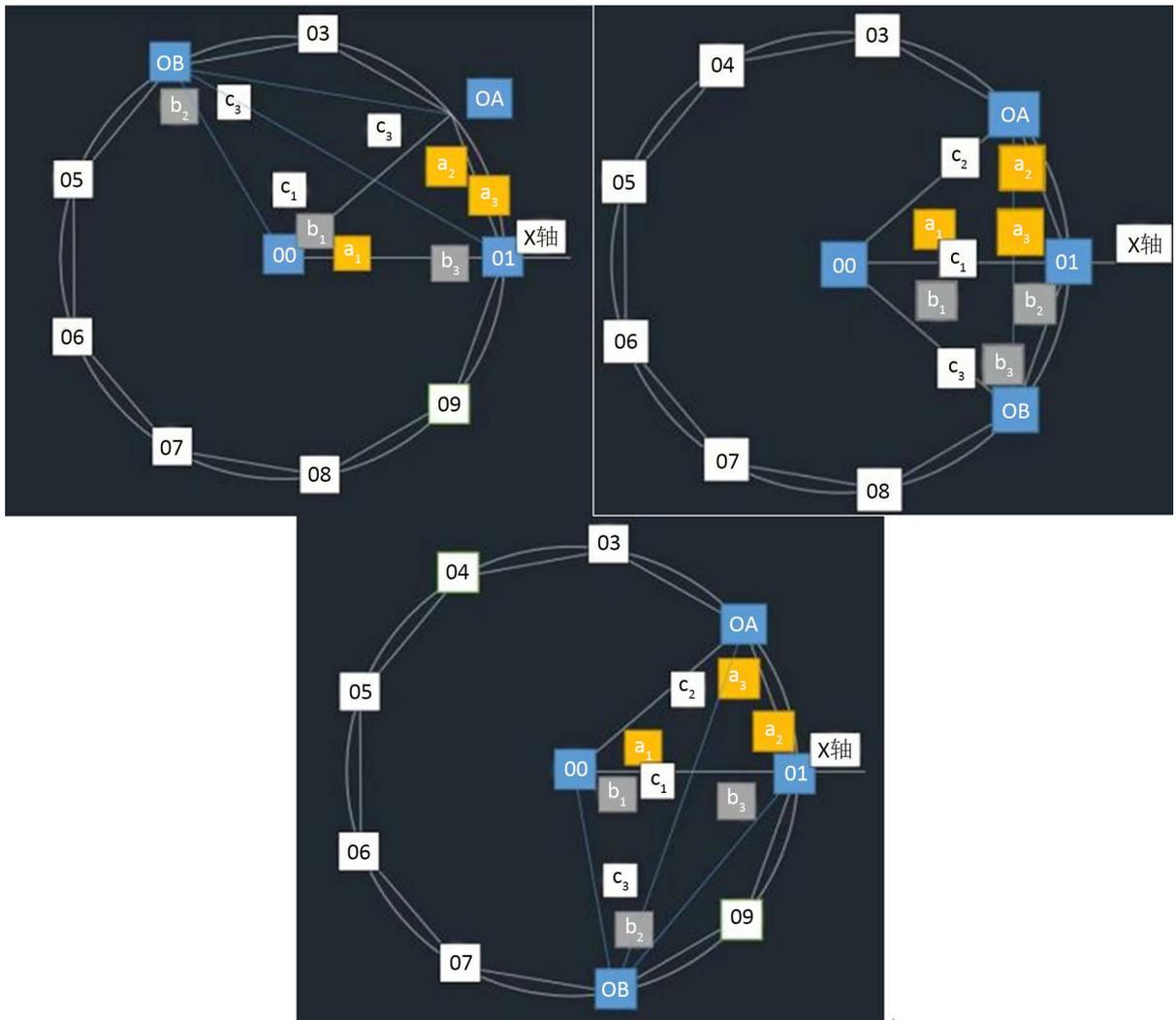


Figure 5. A schematic diagram of the UAV simulation
图 5. 无人机模拟示意图

所以有所选两架无人机同侧、异侧和对称的情况。列出以上情况的 a_1 、 b_1 、 c_1 关系即可，定位出其他无人机的位置。

本文可以利用基于角度的测量方法三角测量定位法求出无人机的定位。三角定位原理主要根据一个测量目标点以及两个已知坐标的参考点可形成一个三角形，借助三角形中参考边的长度，测量两参考点与目标点形成的角度，即可找到目标点的距离及坐标。将多种情况带入做小二乘法进行分析。

$$A = \begin{bmatrix} 2(x_1 - x_n) & 2(y_1 - y_n) \\ \vdots & \vdots \\ 2(x_{n-1} - x_n) & 2(y_{n-1} - y_n) \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_n^2 + y_1^2 - y_n^2 + d_n^2 - d_1^2 \\ \vdots \\ x_{n-1}^2 - x_n^2 + y_{n-1}^2 - y_n^2 + d_n^2 - d_{n-1}^2 \end{bmatrix}$$

将 X 、 Y 用 R 和 α 代替，用上述第 n 个方程减去 $n-1$ 个方程， $AX = B$

$$\begin{cases} (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = d_1^2 \\ \vdots \\ (x_n - x)^2 + (y_n - y)^2 = d_n^2 \end{cases}$$

带入多个情况下的位置信息，可以验证出 $n=2$ 。

综上，2 还需要 2 架无人机发射信号，才能实现无人机的有效定位。

11. 问题 1(3)的模型建立与求解

11.1. 问题 1(3)模型的建立

$$D = \sum_{i=1}^9 D_i$$

D 为调整前各无人机与准确位置的距离之和 D_i 分别为 FY01-FY09 当前位置和准确位置两点间距离，可以通过代码一得到。

11.2. 问题 1(3)模型的求解

通过问题 1(1)模型可以求出每一次调整后 FY00 至 FY09 的极坐标。

第 1 次调整：

调整前 $D = 52.0826$

使用 0, 1, 2, 调整后 $D = 24.1281$

使用 0, 1, 3, 调整后 $D = 40.4936$

使用 0, 1, 4, 调整后 $D = 12.1310$

使用 0, 1, 5, 调整后 $D = 9.4485$

使用 0, 1, 6, 调整后 $D = 8.6595$

使用 0, 1, 7, 调整后 $D = 9.0299$

使用 0, 1, 8, 调整后 $D = 13.4595$

使用 0, 1, 9, 调整后 $D = 41.2624$

第 2 次调整：

调整前 $D = 41.2624$

使用 0, 1, 2, 调整后 $D = 90.7717$

使用 0, 1, 3, 调整后 $D = 14.1208$

使用 0, 1, 4, 调整后 $D = 3.5716$
 使用 0, 1, 5, 调整后 $D = 4.2012$
 使用 0, 1, 6, 调整后 $D = 4.1706$
 使用 0, 1, 7, 调整后 $D = 4.7210$
 使用 0, 1, 8, 调整后 $D = 5.3880$
 使用 0, 1, 9, 调整后 $D = 20.8081$

第 3 次调整:

调整前 $D = 20.8081$
 使用 0, 1, 2, 调整后 $D = 53.1398$
 使用 0, 1, 3, 调整后 $D = 6.8673$
 使用 0, 1, 4, 调整后 $D = 3.3737$
 使用 0, 1, 5, 调整后 $D = 3.4652$
 使用 0, 1, 6, 调整后 $D = 4.0655$
 使用 0, 1, 7, 调整后 $D = 3.0855$
 使用 0, 1, 8, 调整后 $D = 4.2611$
 使用 0, 1, 9, 调整后 $D = 3.6019$

调整后无人机极坐标

FY00 [0.0, 0.0], FY01 [100.0, 0.0]
 FY02 [99.7866, 40.3430], FY03 [99.8680, 80.1144]
 FY04 [99.7154, 120.1626], FY05 [98.9393, 160.0333]
 FY06 [99.1846, 199.9090], FY07 [99.8990, 240.0401]
 FY08 [100.0027, 280.0230], FY09 [99.9554, 320.1525]

可以发现, 在经过 3 次以 FY00, FY01 为基准的调整后, 各无人机与准确位置的距离之和可以减小到 3.6, 很接近各个无人机的理想位置。

对于模拟定位的精密度进行定量分析, 认为精度达到 2M CEP 的模型为一个优质模型。

问题一(3)中。

调整调整后 FY05 [98.9393, 160.0333] 距离标准位置最远, $D_5 = 1.1117434461241$, 即最大精度可达 1.2M 2D RMS, 显然满足 2M CEP 的标准, 是一个优质模型。

12. 问题 2 的模型建立和求解

1、根据 FY13 和 FY14, 先校准第一列的 x 轴坐标, 通过调整这一列其他无人机的位置, 使 $\alpha = 0$ 。让第一列对齐。

2、以第一列的 FY12、FY13 和 FY14 作为发射信号无人机, 第三列无人机分别接收信号, 调整其位置校准第三列。校准前后的 D 分别为 71.1015 和 51.3690。

3、以第三列的 FY04、FY05 和 FY06 作为发射信号无人机, 第一列无人机分别接收信号, 调整其位置校准第一列。

校准前后的 D 分别为 51.3690 和 33.5414。

4、再次调整第一列使其与 FY13 对齐。

5、最后以 FY12、FY13 和 FY14 作为发射信号无人机, 其余无人机分别接收信号, 调整剩下所有无人机位置进行最后的校准。

校准前后的 D 分别为 33.5414 和 4.7805。通过 5 次调整使无人机形成了间距为 50 m 的较为标准的锥形无人机编队[3]，如图 6~图 10 所演示模型。

问题二

经过 5 次调整后 $D = 4.7805$ ，最多只有 2 只无人机偏离 2 米以上，偏离 2 米以上的无人机数量不可能超过 5 只，其精度显然高于 2M CEP 的标准。是一个优质模型。

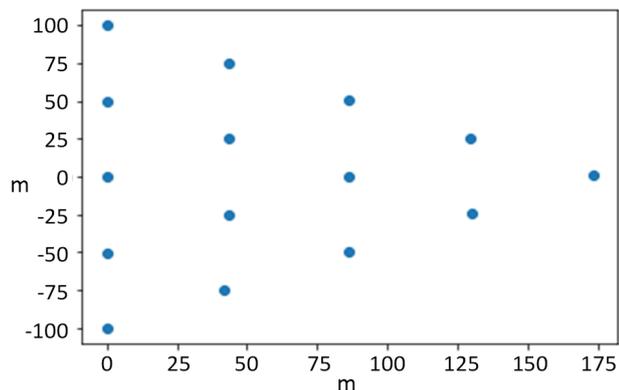


Figure 6. The first adjustment coordinate diagram

图 6. 第一次调整坐标图

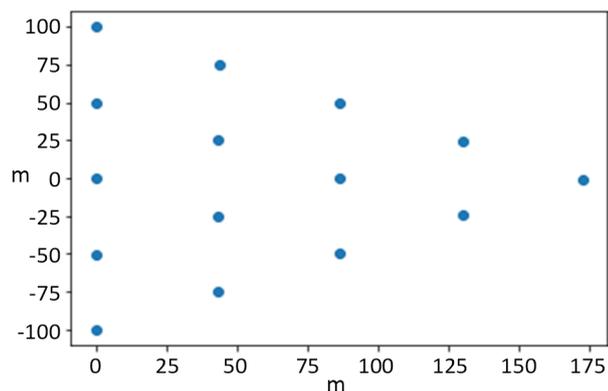


Figure 7. The second adjustment coordinate diagram

图 7. 第二次调整坐标图

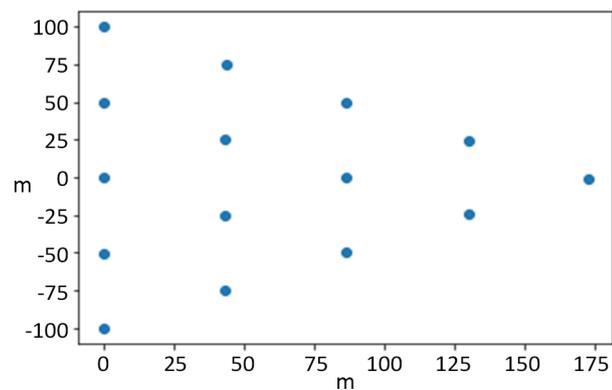


Figure 8. The third adjustment coordinate chart

图 8. 第三次调整坐标图

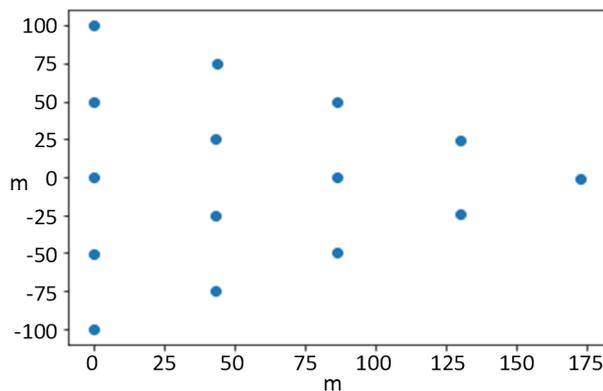


Figure 9. The fourth adjustment coordinate chart
图 9. 第四次调整坐标图

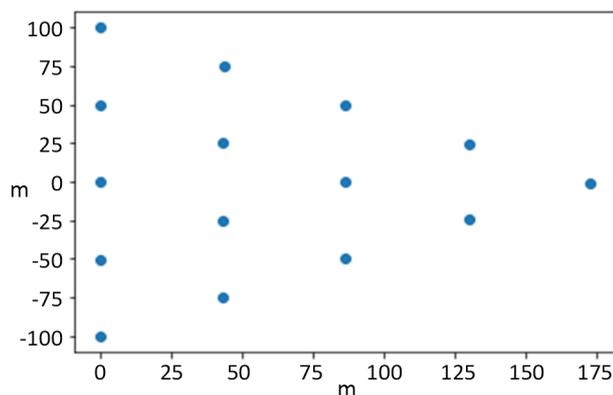


Figure 10. The fifth adjustment coordinate diagram
图 10. 第五次调整坐标图

2M 指在半径 2 米的圆中，CEP 是在此圆中的无人机有 50%，RMS 是在此精度的概率为 66.7%，2D RMS 是在此精度的概率为 95%。

13. 模型的评价

模型的评价与推广随着社会发展以无人机为代表的“低慢小”目标成为空中日益增长的安全威胁，而现有常规武器装备通常无法对其实施有效的处置拦截。考虑到传统有源雷达不适用于城市复杂电磁环境，加上无人机雷达散射截面积较小难以捕捉以及成本问题，采用无源定位技术，观测设备不向外发射电磁波，仅被动接受外界无线电信号对目标进行定位，同时无源定位具有覆盖范围大、耗费低、良好的隐蔽性等优势。本文主要利用无源定位技术对无人机目标进行定位跟踪研究。无源定位技术广泛应用于军防、地形测绘、交通检测等多个领域。本文并没有考虑受时间、压强，大气限制等问题，理想化考虑，仅涉及利用到达距离和到达方向对无人机的无源定位技术研究。本文认为可结合多种元素作为下一深入研究领域。

在第一小问的求解中在理想状态下即发射信号无人机无位置偏移，利用在极坐标系中利用三角函数中正弦定理求解相对于三点确定一个圆取三圆交点数学分析上思维模式更清晰，实际操作计算更为简洁

对于问题 1(3)和问题 2，本文使用了(1)中模型并将程序和模型结合，方便进行多次反复调整和迭代，通过设定函数值 D 清晰的观察出调整前后无人机和标准位置的差距。但是在选择发射信号无人机时，并未考虑其所处位置，矫正先后顺序对于最后调整结果的影响。

基金项目

2022 年大创项目，项目编号：X202210143037。

参考文献

- [1] Stinco, P., GRECO, M.S., Gini, F., *et al.* (2016) IEEE 802.22 Passive Readers: Multistatic Detection and Velocity Profiler. *IEEE Transactions on Aerospace & Electronic Systems*, **52**, 2298-2313.
<https://doi.org/10.1109/TAES.2016.150363>
- [2] 王欢, 刘树光, 张博洋. 基于分层控制结构的有人/无人机编队队形控制[J/OL]. 电光与控制, 1-8, 2022-09-18.
- [3] 郭鹏军, 张睿, 高关根, 许斌. 基于相对速度和位置辅助的无人机编队协同导航[J/OL]. 上海交通大学学报, 1-9, 2022-09-18.
- [4] 彭建帅, 付兴建. 仿雁群行为的领航-跟随无人机编队控制[J/OL]. 控制工程, 1-7, 2022-09-18.
<https://doi.org/10.14107/j.cnki.kzgc.20200927>