

直径为 d 的一些树的排序

谭 荣, 姜文芳

和田师范专科学校数学与信息学院, 新疆 和田

收稿日期: 2023年3月19日; 录用日期: 2023年4月15日; 发布日期: 2023年4月21日

摘要

本文主要是对有 n 个点直径为 d 的树 $T_{n,d}(i)$, 以及前 $\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$ 棵这样的树做了排序的成果(具体内容见序言部分)基础上重新讨论了上述树的另一种排序方法, 并更进一步确定了它们的上界。

关键词

树, 谱半径, 排序, 上界

Sorting of Some Trees with Diameter of d

Rong Tan, Wenfang Jiang

School of Mathematics and Information, Hetian Normal College, Hetian Xinjiang

Received: Mar. 19th, 2023; accepted: Apr. 15th, 2023; published: Apr. 21st, 2023

Abstract

Based on the results of sorting trees $T_{n,d}(i)$ with n -point diameter d and the previous $\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$ trees with n -point diameter d (see the preface for details), this paper rediscusses another sorting method of the above-mentioned trees, and their upper bounds are further determined.

Keywords

Tree, Spectral Radius, Sorting, Upper Bound

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



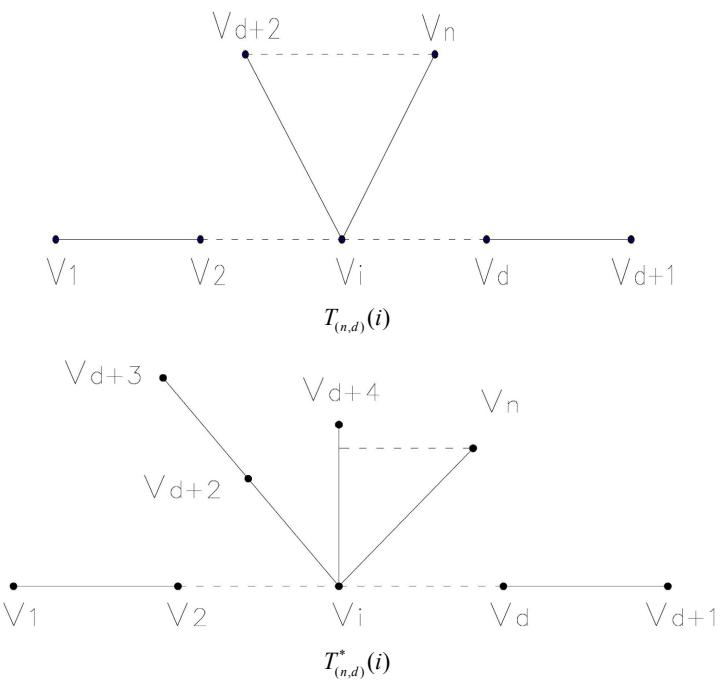
Open Access

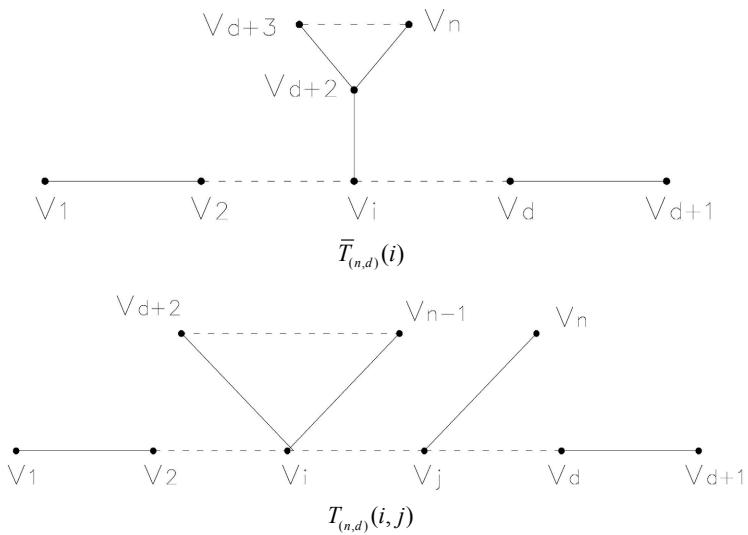
1. 序言

设 $X = (V, E)$ 是一个简单图。我们用 $A(X)$ 表示 X 的矩阵。称 $\Phi(X, \lambda) = \det(\lambda I - A(X))$ 为 X 的特征多项式, 可简单记为 $\Phi(X)$ 。因为 $A(X)$ 是对称矩阵, 则它的特征值是实数。我们可以把这些特征值记作 $\lambda_1(X) \geq \lambda_2(X) \geq \lambda_3(X) \geq \dots \geq \lambda_n(X)$, 并且把它们称为 X 的谱。显然, λ_1 是图 G 的邻接矩阵 $A(G)$ 的最大特征值, (有时也被称为指数), 并且我们将它称为图 G 的谱半径。

无圈的连通图称为树。如果在 G 中存在 (u, v) 路, 称 u 和 v 是连通的。若在 G 中顶点 u 和 v 是连通的, 则 u 和 v 之间的距离是指 G 中 u 和 v 之间最短路的长度。 G 的直径是指 G 中最远的两个顶点之间的距离。自 1981 年 Cvetkovic 在[1]提出, 根据图的最大特征值给树分类和排序这个问题以来, 人们用固定某个常量的方法研究树的谱半径, 对于 n 个点的树, Hofmeister 在[2]中已经确定了它的谱半径的前五大特征值以及这些特征值所对应的树。在[3]中 Chang 和 Huang 将这个顺序增加到了第八棵树。

设 $T_{(n,d)}$ 是有 n 个点的直径为 d 的树集($3 \leq d \leq n-4$), Ji-Ming Guo 和 Jia-Yu Shao 在[1]中给出了 $T_{(n,d)}$ 的四个子集, 它们分别是 $T_{(n,d)}(i)$, $T_{(n,d)}^*(i)$, $\bar{T}_{(n,d)}(i)$, $T_{(n,d)}(i, j)$ 。(它们都是 n 个点的直径为 d 的树。) 并且讨论了当 $n \geq d+4, d \geq 4$, $i = \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1, j = \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 2$ 时它们的谱半径的排序问题, 在这里我们介绍一下它们的定义, 并给出对应的图形, 如图 1 所示。树图 $T_{(n,d)}(i)$ 是通过一个 d 长路在第 i 个顶点处增加 $n-d-1$ 个新的悬挂边 $v_i v_{d+2}, v_i v_{d+3}, \dots, v_i v_n$ 所形成的。 $T_{(n,d)}^*(i)$ 是通过一个 d 长路在第 i 个顶点处分别增加一个长为 2 的路 $v_i v_{d+2} v_{d+3}$ 和 $n-d-3$ 个新的悬挂边 $v_i v_{d+4}, v_i v_{d+5}, \dots, v_i v_n$ 所形成的。 $\bar{T}_{(n,d)}(i)$ 是通过一个 d 长路在第 i 个顶点处增加一个星图 $K_{1,n-d-2}$ (其中顶点 v_{d+2} 是星图 $K_{1,n-d-2}$ 的中心点)所形成的。 $T_{(n,d)}(i, j)$ 是通过一个 d 长路在第 i 个顶点处增加 $n-d-2$ 个新的悬挂边 $v_i v_{d+2}, v_i v_{d+3}, \dots, v_i v_{n-1}$, 在第 j 个顶点处增加一个悬挂边 $v_j v_n$ 所形成的。在这篇文章里, 我们重新讨论了这四棵树在当 $n \geq d+4, d \geq 4$, $i = \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1, j = \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 2$ 时的排序问题。



**Figure 1.** Tree graph**图 1.** 树图

Ji-Ming Guo 和 Jia-Yu Shao 在[4]中对有 n 个点直径为 d 的树 $T_{n,d}(i)$ 也进行了研究, 并对前 $\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$ 棵这样的树做了排序, 即

$$\lambda_1\left(T_{(n,d)}\left(\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1\right)\right) > \lambda_1\left(T_{(n,d)}\left(\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor\right)\right) > \dots > \lambda_1\left(T_{(n,d)}(3)\right) > \lambda_1\left(T_{(n,d)}(2)\right), \text{ 其中 } n \geq d + 4, d \geq 3,$$

$$i = \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor - 1, \dots, 3, 2。 \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor \text{ 表示不超过 } \frac{d}{2} \text{ 的最大整数, 但是他们没有讨论这些树的上界。在这篇文章里, 我们重新讨论了上述树的另一种排序方法, 并且确定了它们的上界。}$$

2. 主要结果

在这一节里我们先给出一些引理; 之后, 通过它们得出我们的主要结果。

引理 1 [4] 当 $n \geq d + 3 \geq 7$ 时, 有 $\lambda_1(T'') > \lambda_1(T^*)$ 成立, 其中 T'' 是树 $T_{(n,d)}\left(\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 2\right)$, T^* 是树 $T_{(n,d)}^*\left(\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1\right)$ 。

引理 2 [4] 当 $n \geq d + 4, d \geq 3$ 时, 有

$$\lambda_1\left(T_{(n,d)}\left(\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1\right)\right) > \lambda_1\left(T_{(n,d)}\left(\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor\right)\right) > \dots > \lambda_1\left(T_{(n,d)}(3)\right) > \lambda_1\left(T_{(n,d)}(2)\right) > \lambda_1(T'').$$

其中 T'' 是树 $T_{(n,d)}\left(\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 2\right)$ 。

引理 3 [4] 设 P_n 是 $n-1$ 长的路, 则 $\Phi(P_n, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 4}}(a^{n+1} - b^{n+1})$, 其中

$$a = \frac{1}{2}(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}), b = \frac{1}{2}(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}).$$

其中 T'' 是树 $T_{(n,d)}\left(\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 2\right)$ 。

引理 4 [5]若 G_1, G_2, \dots, G_t 是图 G 的 t 个分支, 则 $\Phi(G, \lambda) = \Phi(G_1, \lambda)\Phi(G_2, \lambda)\cdots\Phi(G_t, \lambda) = \prod \Phi(G_i, \lambda)$

引理 5 [6]设 u 是非平凡图 G 的一个顶点, $G_{k,l}^0$ 是 G 通过在顶点 u 处增加两条长分别为 k 和 l 的路所得到的图。若 $k \geq l \geq 1$, 则有 $\lambda_1(G_{k,l}^0) > \lambda_1(G_{k+1,l-1}^0)$ 。

引理 6 [7]设 T_1, T_2 是有 n 个点的树集 G_n 中的两棵树($n \geq 4$), 若 $\Delta(T_1) \geq \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil - 1$, 并且 $\Delta(T_1) > \Delta(T_2)$, 则 $\lambda_1(T_1) > \lambda_1(T_2)$ 。

引理 7 [8]设 u 是 G 的一个顶点, v 表示 G 中所有与 u 相邻的顶点, $C(u)$ 是包含顶点 u 的所有圈集, 设 $V(Z)$ 是圈 Z 的顶点集, 则 $\Phi(G)$ 的特征多项式满足

$$\Phi(G, \lambda) = \lambda \Phi(G-u) - \sum_v \Phi(G-u-v) - 2 \sum_Z \Phi(G-V(Z))$$

定理 8 当 $4 \leq d \leq n-4$ 时, 按谱半径的大小给 $T_{(n,d)}(i)$ 的排序如下:

$\lambda_1\left(T_{(n,d)}\left(\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1\right)\right) > \lambda_1\left(T_{(n,d)}\left(\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor\right)\right) > \dots > \lambda_1\left(T_{(n,d)}(3)\right) > \lambda_1\left(T_{(n,d)}(2)\right)$, 其中 $\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$ 表示不超过 $\frac{d}{2}$ 的最大整数。

证明: 首先根据引理 1,6, 我们有

$\lambda_1\left(T_{(n,d)}\left(\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1\right)\right) > \lambda_1\left(T_{(n,d)}\left(\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 2\right)\right) > \lambda_1\left(T_{(n,d)}^*\left(\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1\right)\right) > \lambda_1\left(\bar{T}_{(n,d)}\left(\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1\right)\right)$ 再由引理 2 容易得到, 在带有 n 个点且直径为 d 的树中, 谱半径最大的树是 $T_{(n,d)}(i)$ 。

因此下面我们仅需对 $T_{(n,d)}(i)$ 中的树的谱半径的排序进行讨论。由引理 5, 我们容易得出结论成立。 #

定理 9 当 $4 \leq d \leq n-4$ 时, $\lambda_1\left(T_{(n,d)}\left(\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1\right)\right) < \sqrt{n-d} + 1$

证明: 由引理 3, 4, 7 容易得到 $T_{(n,d)}\left(\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1\right)$ 的特征多项式为

$$\begin{aligned} & \lambda^{n-d-2} \left[\left(\lambda^2 - n + d + 1 \right) \left(a^{d+2} - a^{d-2\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor} - b^{d-2\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor} + b^{d+2} \right) \right. \\ & \left. - \lambda \left(2a^{d+1} - a^{d-2\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1} - b^{d-2\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1} - a^{d-2\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor - 1} - a^{d-2\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor - 1} + 2b^{d+1} \right) \right] \end{aligned}$$

则 $T_{(n,d)}\left(\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1\right)$ 的最大特征值是方程

$$\begin{aligned} & \left(\lambda^2 - n + d + 1 \right) \left(a^{d+2} - a^{d-2\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor} - b^{d-2\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor} + b^{d+2} \right) \\ & - \lambda \left(2a^{d+1} - a^{d-2\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1} - b^{d-2\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1} - a^{d-2\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor - 1} - a^{d-2\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor - 1} + 2b^{d+1} \right) = 0 \end{aligned}$$

的最大根。

那么我们就有 $\frac{\lambda^2 - n + d + 1}{\lambda} = \frac{2a^{d+1} - a^{d-2\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1} - b^{d-2\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1} - a^{d-2\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor - 1} - a^{d-2\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor - 1} + 2b^{d+1}}{a^{d+2} - a^{d-2\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor} - b^{d-2\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor} + b^{d+2}}$

因为 $a = \frac{1}{2}(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4})$, $b = \frac{1}{2}(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4})$, 是方程 $x^2 - \lambda x + 1 = 0$ 的两个根。

设 $h_1(\lambda) = a = \frac{1}{2}(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4})$, $h_2(\lambda) = b = \frac{1}{2}(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4})$

$h'_1(\lambda) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4}}\right) > 0$, 则 $h_1(\lambda)$ 是增函数。

$h'_2(\lambda) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 4}}\right) < 0$, 则 $h_2(\lambda)$ 是减函数。

容易得出, 当 $4 \leq d \leq n-4$ 时,

$$\frac{2a^{d+1} - a^{d-2\lfloor\frac{d}{2}\rfloor+1} - b^{d-2\lfloor\frac{d}{2}\rfloor+1} - a^{d-2\lfloor\frac{d}{2}\rfloor-1} - a^{d-2\lfloor\frac{d}{2}\rfloor-1} + 2b^{d+1}}{a^{d+2} - a^{d-2\lfloor\frac{d}{2}\rfloor} - b^{d-2\lfloor\frac{d}{2}\rfloor} + b^{d+2}} < \frac{2a^{d+1} + 2}{a^{d+1} + 1} = 2,$$

于是 $\frac{\lambda^2 - n + d + 1}{\lambda} < 2$ 。我们容易计算出 $\lambda_1\left(T_{(n,d)}\left(\left\lfloor\frac{d}{2}\right\rfloor + 1\right)\right) < \sqrt{n-d} + 1$. #

3. 结论

本文主要研究了有 n 个点, 直径为 d 的树其四个子集 $T_{(n,d)}(i)$, $T_{(n,d)}^*(i)$, $\bar{T}_{(n,d)}(i)$, $T_{(n,d)}(i, j)$ 的新的排序方法, 并给出了新的研究成果, 即: 进一步确定了他们的上界。这使得对于满足以上特征的树的排序方面的研究成果更加丰满。这种排序方法所使用方法理论可尝试应用于其他树型, 并得到新的成果。

致 谢

作者在此感谢一直关心和支持我的领导和同事们, 谢谢大家的帮忙与鼓励, 感谢我的合作伙伴姜文芳老师给予我的帮助, 感谢审稿人在百忙之中能够给予指导。

参考文献

- [1] Cvetkovic, D.M. (1981) Some Possible Directions in Further Investigation of Graph Spectra. In: *Algebraic Methods in Graph Theory*, Vol. 1, North-Holland, Amsterdam, pp. 47-67.
- [2] Hofmeister, M. (1997) On the Two Largest Eigenvalues Trees. *Linear Algebra and Its Applications*, **360**, 43-59.
- [3] Chang, A. and Huang, Q. (2003) Ordering Trees by Their Largest Eigenvalues. *Linear Algebra and Its Applications*, **370**, 175-184. [https://doi.org/10.1016/S0024-3795\(03\)00384-7](https://doi.org/10.1016/S0024-3795(03)00384-7)
- [4] Guo, J.-M. and Shao, J.-Y. (2006) On the Spectral Radius of Trees with Fixed Diameter. *Linear Algebra and Its Applications*, **413**, 131-147. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2005.08.008>
- [5] Cvetkovic, D., Doob, M. and Sachs, H. (1980) Spectra of Graphs Theory and Applications. Academic Press, New York.
- [6] Li, Q. and Feng, K. (1979) One the Largest Eigenvalue of Graphs. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, **2**, 167-175. (in Chinese)
- [7] Lin, W.S. and Guo, X.F. (2006) Ordering Trees by Their Largest Eigenvalues. *Linear Algebra and Its Applications*, **418**, 450-456. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2006.02.035>
- [8] Schwenk, A. (1974) Computing the Characteristic Polynomial of a Graph. In: Bary, R., and Harary, F., Eds., *Graphs and Combinatorics, Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 153-172. <https://doi.org/10.1007/BFb0066438>