Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(5), 2480-2492**
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.125250

一类偏泛函微分方程的测度伪型解及在生物数学模型中的应用

王 芳

浙江长征职业技术学院基础部，浙江 杭州

收稿日期：2023年4月28日；录用日期：2023年5月21日；发布日期：2023年5月31日

摘 要

本文研究了一类具有无限时滞的α-型偏泛函微分方程测度伪型解的存在性和唯一性。文中假设线性算子部分在$Banach$ 空间X 上生成紧的解析半群，然后利用分数幂算子理论和算子半群理论证明了方程解的存在唯一性，并将其应用于一类生物数学模型中，验证结论的正确性。

关键词

偏泛函微分方程，无穷时滞，测度论，分数幂算子

A Class of Measure Pseudo Type Solution of Partial Functional Differential Equations and Applications in Biomathematical Model

Fang Wang

Department of Basic Courses, Zhejiang Changzheng Vocational Technical College,
Hangzhou Zhejiang

Received: Apr. 28^{th}, 2023; accepted: May 21^{st}, 2023; published: May 31^{st}, 2023

文章引用: 王芳. 一类偏泛函微分方程的测度伪型解及在生物数学模型中的应用[J]. 应用数学进展, 2023, 12(5): 2480-2492. DOI: 10.12677/aam.2023.125250

Abstract

In this paper, the existence, uniqueness of measure pseudo type solutions in the α-form for partial functional differential equations with infinite delay are investigated. Here we assume that the linear part generates a compact analytic semigroup on a Banach space X, the delayed part is assumed to be continuous with respect to the fractional power of the generator. Finally, an example of biomathematical model is presented to illustrate the main findings.

Keywords

Partial Functional Differential Equations, Infinite Delay, Measure Theory, Fractional Power of Operators

1. 引言

在文献 [1]中, 研究了如下具有无穷时滞的偏泛函微分方程(简记为PFDEs)概周期解的存在性,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = -Au(t) + L(u_t) + f(t), \qquad t \geq \sigma, \\ u_\sigma = \varphi \in \mathcal{B}. \end{cases} \tag{1.1}$$

其中$-A$ 满足Hille-Yosida 条件，函数$u_t \in \mathcal{B}$ 定义为$u_t(\theta) = u(t+\theta)$, $\theta \in (-\infty, 0]$, $\mathcal{B}$ 为从$(-\infty, 0]$ 映射到X 的函数构成的$Banach$ 空间, 且满足后文将要介绍的一些公理性条件. L 为从$\mathcal{B}$ 映射到X 的有界线性算子, f 为概周期函数. 此外, 进一步如果$-A$ 在X 上生成解析半群$(T(t))_{t\geq 0}$, 则根据分数幂算子理论, 文献 [2] 研究了微分方程的几乎自守性.

因具有无穷时滞的PFDEs 在生物、化学和物理等领域都有广泛应用, 目前已经成为动力系统的一个重要研究领域. 关于无穷时滞的PFDEs 的文献非常多, 例如在 [3] 中研究了周期性, 在 [4–6] 中研究了概周期性, [7, 8] 讨论了几乎自守性, [9, 10] 研究了方程的测度伪概周期性和测度伪几乎自守性, 而解的正则性和稳定性则分别在 [11–13] 和 [12, 14, 15]中有所探讨. 在动力学性质的研究中，

周期性，概周期性，几乎自守性，伪概周期性，伪几乎自守性等是备受关注的研究对象，但很少有文献对这些性质进行统一地研究。另一方面，在以往的文献中，大部分文献$-A$ 生成的是连续半群，对生成解析半群的研究并不多见。本文在前面文献的基础上，利用分数幂算子理论和算子半群的方法，研究了模型(1.1) 测度伪型解的存在性和唯一性, 其中$-A$ 生成解析半群. 相对于有限时滞, 无穷时滞显然是更复杂, 因为解的具体性质与相空间$\mathcal{B}$ 的选择密切相关，在本文中，我们取的相空间$\mathcal{B}$ 满足Hale 和Kato 给出的基本公理性条件 [16].

2. 预备知识

记$(X, |\cdot|)$ 为一个复Banach 空间, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$ 和$\mathbb{C}$ 分别表示自然数集, 实数集, 非负实数集和复数集. A 是定义在X 上的线性算子, $D(A)$ 和$\sigma(A)$ 表示A 的定义域和谱.

定义2.1. 称$f \in C(\mathbb{R}, X)$ 为反周期函数(或周期函数), 若存在$\omega \in \mathbb{R} - \{0\}$ 使得对于所有的$t \in \mathbb{R}$ 满足$f(t+\omega) = -f(t)$ (或$f(t+\omega) = f(t)$). 将这类函数的集合记为$P_{\omega ap}(\mathbb{R}, X)$ (或$P_{\omega}(\mathbb{R}, X)$).

注2.1. 若$f \in P_{\omega ap}(\mathbb{R}, X)$, 则有$f \in P_{2\omega}(\mathbb{R}, X)$.

定义2.2. [17] 对于给定的$\omega, k \in \mathbb{R}$, 称$f \in C(\mathbb{R}, X)$ 为(ω, k)-周期函数(或Bloch-周期函数),若对于所有的$t \in \mathbb{R}$ 满足$f(t+\omega) = e^{ik\omega} f(t)$. 将这类函数的集合记为$P_{\omega,k}(\mathbb{R}, X)$.

注2.2. 称k 为f 的Floquet 指数. 若f 是(ω, k)-周期函数且$\omega k = 2\pi$, 则f 是ω-周期函数; 若$\omega k = \pi$, 则f 是ω-反周期函数.

定义2.3. [18] 对于给定的$\rho \in C(\mathbb{R}, X)$, 称$f \in C(\mathbb{R}, X)$ 为加权周期函数, 若对于所有的$t \in \mathbb{R}$ 满足$f(t+\omega) = \rho(t) f(t)$. 将这类加权周期函数的集合记为$P_{\omega,\rho(t)}(\mathbb{R}, X)$.

定义2.4. [19] 称$f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}, X)$ 为概周期函数, 若对于任意$\varepsilon > 0$, 存在$l(\varepsilon) > 0$, 使得在每个长度为$l(\varepsilon)$ 的区间I 上至少存在一个τ 使其满足$\|f(t+\tau) - f(t)\| < \varepsilon$ 对一切$t \in \mathbb{R}$ 成立. 这类概周期函数的集合记为$AP(\mathbb{R}, X)$.

定义2.5. [20] 称$f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}, X)$ 为几乎自守函数, 若对于每个实数列$(s_n')_{n\in\mathbb{N}}$，存在一个子数列$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 使得$g(t) := \lim\limits_{n\to\infty} f(t+s_n)$ 对于任意$t \in \mathbb{R}$ 都有定义, 且$\lim\limits_{n\to\infty} g(t-s_n) = f(t)$ 对任意$t \in \mathbb{R}$ 成立. 这类函数的集合记为$AA(\mathbb{R}, X)$.

下面, 我们利用测度理论的方法，通过遍历空间的概念，引入测度伪型函数的概念, 即测度伪反周期函数, 测度伪周期函数, 测度伪Bloch-周期函数, 测度伪加权周期函数, 测度伪概周期函数和测度伪几乎自守函数.

$\mathcal{L}$ 表示$\mathbb{R}$ 上的Lebesgue σ 域, $\mathcal{M}$ 表示在$\mathcal{L}$ 上所有满足如下条件正测度μ 的集合：对于所有的$a, b \in \mathbb{R}$ $(a \le b)$, 且$\mu(\mathbb{R}) = \infty$ 和$\mu([a,b]) < \infty$.

定义2.6. 取$\mu, \nu \in \mathcal{M}$. 若满足

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{\mu([-T,T])} \int_{[-T,T]} |f(t)| d\nu(t) = 0,$$

则称函数$f \in C(\mathbb{R}, X)$ 为(μ, ν)-遍历的. 这类函数的集合记为$\mathcal{E}(\mathbb{R}, X, \mu, \nu)$.

定义2.7. 取$\mu, \nu \in \mathcal{M}$. 称$f \in C(\mathbb{R}, X)$ 为测度伪反周期函数(或测度伪周期函数, 测度伪Bloch-周期函数, 测度伪加权周期函数, 测度伪概周期函数和测度伪几乎自守函数), 若函数可分解为$f = g + \varphi$, 其中$g \in P_{\omega ap}(\mathbb{R}, X)$ (或$P_{\omega}(\mathbb{R}, X)$, $P_{\omega,k}(\mathbb{R}, X)$, $P_{\omega,\rho(t)}(\mathbb{R}, X)$, $AP(\mathbb{R}, X)$, $AA(\mathbb{R}, X)$) 且$\varphi \in$

$\mathcal{E}(\mathbb{R},X,\mu,\nu)$. 这类函数的集合记为$MPP_{\omega ap}(\mathbb{R},X,\mu,\nu)$ (或$MPP_{\omega}(\mathbb{R},X,\mu,\nu)$, $MPP_{\omega,k}(\mathbb{R},X,\mu,\nu)$, $MPP_{\omega,\rho(t)}(\mathbb{R},X,\mu,\nu)$, $MPAP(\mathbb{R},X,\mu,\nu)$, $MPAA(\mathbb{R},X,\mu,\nu)$).

注2.3. 由上面的定义，不难看出如下包含关系成立：

(i) $MPP_{\omega ap}(\mathbb{R},X,\mu,\nu)\subset MPP_{\omega}(\mathbb{R},X,\mu,\nu)\subset MPP_{\omega,k}(\mathbb{R},X,\mu,\nu)\subset MPP_{\omega,\rho(t)}(\mathbb{R},X,\mu,\nu)$.

(ii) $MPP_{\omega ap}(\mathbb{R},X,\mu,\nu)\subset MPAP(\mathbb{R},X,\mu,\nu)\subset MPAA(\mathbb{R},X,\mu,\nu)$.

(iii) $MPP_{\omega}(\mathbb{R},X,\mu,\nu)\subset MPAP(\mathbb{R},X,\mu,\nu)$, $MPP_{\omega}(\mathbb{R},X,\mu,\nu)\subset MPAA(\mathbb{R},X,\mu,\nu)$.

分别定义如下集合：

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(\mathbb{R},X)=\{P_{\omega ap}(\mathbb{R},X),P_{\omega}(\mathbb{R},X),P_{\omega,k}(\mathbb{R},X),P_{\omega,\rho(t)}(\mathbb{R},X),AP(\mathbb{R},X),AA(\mathbb{R},X)\},\\
&\mathcal{P}(\mathbb{R},X,\mu,\nu)=\{MPP_{\omega ap}(\mathbb{R},X,\mu,\nu),MPP_{\omega}(\mathbb{R},X,\mu,\nu),MPP_{\omega,k}(\mathbb{R},X,\mu,\nu),MPP_{\omega,\rho(t)}(\mathbb{R},X,\mu,\nu),\\
&\qquad\qquad MPAP(\mathbb{R},X,\mu,\nu),MPAA(\mathbb{R},X,\mu,\nu)\},
\end{aligned}$$

则$f\in\mathcal{P}(\mathbb{R},X,\mu,\nu)$ 当且仅当满足f 可以分解为$f=g+\varphi$, 其中$g\in\mathcal{A}(\mathbb{R},X)$, $\varphi\in\mathcal{E}(\mathbb{R},X,\mu,\nu)$. 我们也统一称$\mathcal{P}(\mathbb{R},X,\mu,\nu)$里面的函数为测度伪型函数.

接下来给出$\mathcal{P}(\mathbb{R},X,\mu,\nu)$ 的一些性质, 首先作如下假设:

(M_1) 对于所有的$\tau\in\mathbb{R}$, 存在$\beta>0$ 和有界区间I 使得

$$\text{若 } A\in\mathcal{L} \text{ 且 } A\cap I=\emptyset,\quad \text{则有 } \mu(\{a+\tau,a\in A\})\le\beta\mu(A)\quad .$$

(M_2) $\mu,\nu\in\mathcal{M}$ 且$\limsup\limits_{T\to\infty}\frac{\mu([-T,T])}{\nu([-T,T])}<\infty$

与 [21] 的证明类似, 我们可以得到

引理2.1. *设$\mu,\nu\in\mathcal{M}$ 满足(M_1), 则$\mathcal{E}(\mathbb{R},X,\mu,\nu)$ 和$\mathcal{P}(\mathbb{R},X,\mu,\nu)$ 是平移不变的, 且测度伪型函数的分解是唯一的.*

引理2.2. *设$\mu,\nu\in\mathcal{M}$ 满足(M_1) 和(M_2), 则$\mathcal{P}(\mathbb{R},X,\mu,\nu)$ 在上确界范数$|\cdot|_\infty$ 下是Banach 空间.*

引理2.3. *设$\mu,\nu\in\mathcal{M}$ 且满足(M_1), (M_2), 若$f\in\mathcal{E}(\mathbb{R},X,\mu,\nu)$, $G\in L^1(\mathbb{R},B(X))$, 则$\mathcal{E}(\mathbb{R},X,\mu,\nu)$ 上卷积$f*G$*

$$(f*G)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(s)f(t-s)ds\in\mathcal{E}(\mathbb{R},X,\mu,\nu),\quad t\in\mathbb{R}.$$

证明. 由引理2.1 不难看出, 对于所有的$s\in\mathbb{R}$ 有$f(\cdot-s)\in\mathcal{E}(\mathbb{R},X,\mu,\nu)$, 根据Fubini 定理, 有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\nu([-T,T])}\int_{[-T,T]}|(f*G)(t)|d\mu(t)\\
&\le\frac{1}{\nu([-T,T])}\int_{[-T,T]}\int_{-\infty}^{+\infty}|G(s)||f(t-s)|dsd\mu(t)\\
&\le\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|G(s)|}{\nu([-T,T])}\int_{[-T,T]}|f(t-s)|d\mu(t)ds.
\end{aligned}$$

再根据$G \in L^1(\mathbb{R}, B(X))$ 以及

$$0 \leq \frac{|G(s)|}{\nu([-T,T])} \int_{[-T,T]} |f(t-s)| d\mu(t) \leq \sup_{T\to\infty} \frac{\mu([-T,T])}{\nu([-T,T])} \cdot |G(s)| \cdot |f| \qquad s \in \mathbb{R},$$

由Lebesgue 控制收敛定理和$f(\cdot - s) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, X, \mu, \nu)$, 得到

$$\lim_{T\to+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|G(s)|}{\nu([-T,T])} \int_{[-T,T]} |f(t-s)| d\mu(t) ds = 0.$$

所以$f * G \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, X, \mu, \nu)$. ■

3. 主要结论

这一部分, 我们将研究具有无穷时滞PFDEs 的$\mathcal{P}(\mathbb{R}, X, \mu, \nu)$ 解的存在性和唯一性问题:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} u(t) = -Au(t) + L(u_t) + f(t), & t \geq \sigma, \\ u_\sigma = \varphi \in \mathcal{B}. \end{cases} \tag{3.1}$$

其中f 为$[\sigma, +\infty)$ 映射到X的连续函数，$-A$ 在X 上生成解析半群$(T(t))_{t\geq 0}$，对于$0 < \alpha < 1$, A^α 表示A 的分数幂算子. L 为定义在子空间$\mathcal{B}_\alpha$ 而取值在X 中的有界线性算子, 其中$\mathcal{B}_\alpha$ 定义为

$$\mathcal{B}_\alpha = \{\varphi \in \mathcal{B} : \varphi(\theta) \in D(A^\alpha), \quad \theta \leq 0 \ \text{且} \ A^\alpha \varphi \in \mathcal{B}\},$$

对于$\varphi \in \mathcal{B}_\alpha$ 定义范数$\|\varphi\|_\alpha = \|A^\alpha \varphi\|$, $A^\alpha \varphi$ 定义为

$$(A^\alpha \varphi)(\theta) = A^\alpha(\varphi(\theta)), \qquad \theta \leq 0.$$

函数$u_t \in \mathcal{B}_\alpha$ 定义为$u_t(\theta) = u(t+\theta)$, 其中$\theta \leq 0$.

为了研究(3.1), 首先引入如下假设:

(H_1) $-A : D(A) \to X$ 是$Banach$ 空间X 上解析半群$(T(t))_{t\geq 0}$ 的无穷小生产元, 使得

$$|T(t)x| \leq Me^{\omega t}|x|, \qquad t \geq 0, \ \ x \in X,$$

其中$M \geq 1$ 且$\omega \in \mathbb{R}$. 不失一般性得, 我们可以假设$0 \in \rho(A)$, 否则, 可将$-A + \delta I$ 替换为$-A$ 使得$0 \in \rho(-A + \delta I)$.

(H_2) 对$\varphi \in \mathcal{B}$ 有$A^{-\alpha}\varphi \in \mathcal{B}$, 其中$A^{-\alpha}\varphi$ 定义为$(A^{-\alpha}\varphi)(\theta) = A^{-\alpha}(\varphi(\theta))$, 对所有$\theta \leq 0$ 成立.

(H_3) $T(t)$ 在X 上是紧的, 对所有$t > 0$ 成立.

显然, 当满足假设(H_1) 且$0<\alpha<1$ 时, 我们可以定义X 上线性算子$A^{-\alpha}$,

$$A^{-\alpha}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}T(t)dt,$$

其中Γ 表示Gamma 函数

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-\alpha t}dt.$$

对于分数幂算子A^{α} 和其逆算子$A^{-\alpha}$，其中$0<\alpha<1$, 我们有如下性质：

引理3.1. *[22] 设$0<\alpha<1$ 且(H_1) 成立, 则*

(*i*) 在范数$|x|_{\alpha}=|A^{\alpha}x|, x\in D(A^{\alpha})$ 下，$D(A^{\alpha})$ 为*Banach* 空间. 下文中, 我们用X_{α} 表示*Banach* 空间$(D(A^{\alpha}),|\cdot|_{\alpha})$.

(*ii*) $T(t):X\to D(A^{\alpha})$ 对所有的$t>0$ 成立.

(*iii*) 对所有的$x\in D(A^{\alpha})$ 且$t\geq 0$, 有$T(t)A^{\alpha}x=A^{\alpha}T(t)x$.

(*iv*) 对所有的$t>0$, $A^{\alpha}T(t)$ 在X 上有界, 且

$$|A^{\alpha}T(t)|\leq M_{\alpha}t^{-\alpha}e^{\omega t},\qquad x\in X,\ t>0, \tag{3.2}$$

其中$M_{\alpha}>0$ 是正常数, $\omega\in\mathbb{R}$ 且由(H_1) 给出.

(*v*) $A^{-\alpha}$ 是X 上有界线性算子, 且$D(A^{\alpha})$=*Im*$(A^{-\alpha})$.

接下来, 我们介绍 [16] 中首次引入的相空间$\mathcal{B}$ 的公理化定义. 假设$\mathcal{B}$ 是函数从$(-\infty,0]$ 映射到X 的赋范空间且满足如下基本公理:

(A) 存在正常数N, $[0,+\infty)$ 上局部有界函数$M(\cdot)$ 以及在$[0,+\infty)$ 上连续函数$K(\cdot)$, 使得$x:(-\infty,a]\to X$ 在$[\sigma,a]$ 连续且$x_{\sigma}\in\mathcal{B}$, $\sigma<a$ 成立, 则对于所有的$t\in[\sigma,a]$, 有:

(*i*) $x_t\in\mathcal{B}$,

(*ii*) 在区间$[\sigma,a]$ 上, $t\to x_t$ 关于$\|\cdot\|$ 连续,

(*iii*) $N|x|\leq\|x_t\|\leq K(t-\sigma)\sup\limits_{\sigma\leq s\leq t}|x(s)|+M(t-\sigma)\|x_{\sigma}\|$.

(B) $\mathcal{B}$ 是Banach 空间.

从而我们可以得到

引理3.2. *[23] 设C_{00} 是具有紧支撑的将连续函数从$(-\infty,0]$ 映射到X 的空间, 取C_{00}^{a} 为$[-a,0]$ 中具有函数支撑的子空间且保持范数拓扑一致，则有$C_{00}^{a}\hookrightarrow\mathfrak{B}$.*

命题3.1. *[2] 假设(H_1), (H_2) 成立, 若$\mathcal{B}$ 满足公理(A)-(B), 则$\mathcal{B}_{\alpha}$ 满足如下公理$(\widetilde{A})$-$(\widetilde{B})$:*

$(\widetilde{A})$ 若$x:(-\infty,a]\to X_{\alpha}$ 在$[\sigma,a]$ 上连续且$x_{\sigma}\in\mathcal{B}_{\alpha}$, $\sigma<a$, 则对于所有的$t\in[\sigma,a]$, 有:

(*i*) $x_t\in\mathcal{B}_{\alpha}$,

(*ii*) 在区间$[\sigma,a]$ 上, $t\to x_t$ 关于$\|\cdot\|_{\alpha}$ 连续,

(iii) $N|x|_\alpha \le \|x_t\|_\alpha \le K(t-\sigma)\sup_{\sigma\le s\le t}|x(s)|_\alpha + M(t-\sigma)\|x_\sigma\|_\alpha$.

$(\widetilde{B})$ $\mathcal{B}_\alpha$ 是$Banach$ 空间.

定义3.1. [2] 称函数$u:(-\infty,a]\to X_\alpha$ 为(3.1) 的解, 若其满足

(i) u 在$[\sigma,a]$ 上连续.

(ii) $u(t)=T(t-\sigma)\varphi(0)+\int_\sigma^t T(t-s)[L(u_s)+f(s)]ds$ 对$t\in[\sigma,a]$ 成立.

(iii) $u_\sigma=\varphi$.

定理3.1. *[15] 假设(H_1), (H_2) 成立, 则对于$\varphi\in\mathcal{B}_\alpha$, 在$t\ge 0$ 时, (3.1) 存在唯一的解.*

对于$t\ge 0$, 我们在$\mathcal{B}_\alpha$ 上定义算子$\mathcal{U}(t)$:

$$\mathcal{U}(t)(\varphi)=u_t(\cdot,\sigma,\varphi,0),$$

其中$u(\cdot,\sigma,\varphi,0)$ 是(3.1) 中$f=0,\sigma=0$ 时的解.

命题3.2. *[15] $(\mathcal{U}(t))_{t\ge 0}$ 族是$\mathcal{B}_\alpha$ 上的强连续算子半群, 其无穷小生产元记为$\mathcal{A}_\mathcal{U}$.*

对于$\phi\in\mathcal{B}$, $t\ge 0$ 且$\theta\le 0$, 我们定义线性算子$W(t)$:

$$[W(t)\phi](\theta)=\begin{cases}\phi(0), & \text{如果 } t+\theta\ge 0,\\ \phi(t+\theta) & \text{如果 } t+\theta<0,\end{cases}$$

则$W(t)$ 是满足下式的解半群

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}u(t)=0,\\ u_0=\varphi.\end{cases}$$

取$W_0(t)=W(t)|_{\widetilde{\mathcal{B}}}$, 其中$\widetilde{\mathcal{B}}:=\{\phi\in\mathcal{B}:\phi(0)=0\}$, 再假设$\mathcal{B}$ 满足公理:

(C) 若$(\varphi_n)_{n\ge 0}$ 是$\mathcal{B}$ 内的Cauchy 列并且在$(-\infty,0]$ 上紧收敛到φ, 则$\varphi\in\mathcal{B}$ 且$\|\varphi_n-\varphi\|\to 0$.

定义3.2. 若$\mathcal{B}$ 满足公理(A), (B), (C) 且当$t\to+\infty$ 时$\|W_0(t)\|\to 0$, 则称其为衰减记忆空间.

定义3.3. 若$\sigma(\mathcal{A}_\mathcal{U})\cap i\mathbb{R}=\emptyset$, 则称半群$(\mathcal{U}(t))_{t\ge 0}$ 是双曲的.

定理3.2. *[2] 假设(H_1)-(H_3) 成立. 再假设$\mathcal{B}$ 为衰减记忆空间且半群$(\mathcal{U}(t))_{t\ge 0}$ 是双曲的, 则空间$\mathcal{B}_\alpha$ 可以被分解为两个$\mathcal{U}$-不变闭子空间S 和U 的直和, 使得在U 上限制的半群是一个群且存在正常数N_0,ϱ 满足*

$$\|\mathcal{U}(t)\varphi\|_\alpha\le N_0e^{-\varrho t}\|\varphi\|_\alpha,\qquad t\ge 0,\varphi\in S,$$
$$\|\mathcal{U}(t)\varphi\|_\alpha\le N_0e^{\varrho t}\|\varphi\|_\alpha,\qquad t\le 0,\varphi\in U,$$

其中S 和U 分别被称作是稳定空间和不稳定空间.

对于$n > \omega$, $x \in X$, 定义如下由X 映射到$\mathcal{B}$ 的线性算子Θ^n,

$$(\Theta^n x)(\theta) = \begin{cases} n(n\theta+1)R(n,A)x, & -\dfrac{1}{n} \le \theta \le 0, \\ 0, & \theta < -\dfrac{1}{n}, \end{cases}$$

其中$R(n,-A) = (nI+A)^{-1}$. 对于$x \in X$, 函数$\Theta^n x \in C_{00}((-\infty,0],X_\alpha)$ 在$[-1,0]$ 内有支撑, 则$\Theta^n x \in \mathcal{B}_\alpha$. 此外, 对于$x \in X$, 有

$$\|\Theta^n x\|_\alpha \le \frac{n}{(n-\omega)^{1-\alpha}} K(1) M_\alpha \Gamma(1-\alpha)|x|. \tag{3.3}$$

具体证明可参见文献 [2].

由双曲性的条件, 我们得到如下定理:

定理3.3. *[2] 假设(H_1)-(H_3) 成立. 再假设$\mathcal{B}$ 为衰减记忆空间且半群$(\mathcal{U}(t))_{t\ge0}$ 是双曲的. 若f 在$\mathbb{R}$ 上有界, 则(3.1) 在$\mathbb{R}$ 上有唯一的有界解u, 并有如下表达式:*

$$u_t = \lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} \mathcal{U}^s(t-s)\Pi^s(\Theta^n f(s))ds - \lim_{n\to+\infty}\int_{t}^{+\infty} \mathcal{U}^u(t-s)\Pi^u(\Theta^n f(s))ds \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.4}$$

其中$\mathcal{U}^s(t), \mathcal{U}^u(t)$ 分别为$\mathcal{U}(t)$ 在S 和U 上的限制, Π^s, Π^u 分别为$\mathcal{B}_\alpha$ 到S 和U 上的投影.

定理3.4. *假设(M_1), (M_2), (H_1)-(H_3) 成立并且$f \in \mathcal{P}(\mathbb{R},X,\mu,\nu)$. 再假设$\mathcal{B}$ 为衰减记忆空间且半群$(\mathcal{U}(t))_{t\ge0}$ 是双曲的. 则(3.1) 有唯一的解$u \in \mathcal{P}(\mathbb{R},X_\alpha,\mu,\nu)$, 且由(3.4) 式给出.*

证明. 根据定理3.3, (3.1) 有唯一有界解且u 的表达式由(3.4) 给出的, 设

$$u_t = (\Gamma^s f)(t) - (\Gamma^u f)(t),$$

其中

$$(\Gamma^s f)(t) = \lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} \mathcal{U}^s(t-s)\Pi^s(\Theta^n f(s))ds,$$

$$(\Gamma^u f)(t) = \lim_{n\to+\infty}\int_{t}^{+\infty} \mathcal{U}^u(t-s)\Pi^u(\Theta^n f(s))ds.$$

因为$f \in \mathcal{P}(\mathbb{R},X,\mu,\nu)$, 从而可取$f = g+\varphi$, 其中$g \in \mathcal{A}(\mathbb{R},X)$, $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R},X,\mu,\nu)$, 则$(\Gamma^s f)(t) = \mathcal{F}_1(t)+\mathcal{F}_2(t)$, 其中

$$\mathcal{F}_1(t) = \lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} \mathcal{U}^s(t-s)\Pi^s(\Theta^n g(s))ds,$$

$$\mathcal{F}_2(t) = \lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} \mathcal{U}^s(t-s)\Pi^s(\Theta^n \varphi(s))ds.$$

(i) $\mathcal{F}_1 \in \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathcal{B}_\alpha)$.

对于$g \in P_{\omega,\rho(t)}(\mathbb{R}, X)$, 不难证明

$$\mathcal{F}_1(t+\omega) = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{t} \mathcal{U}^s(t-s)\Pi^s(\Theta^n g(s+\omega))ds = \rho(t)\mathcal{F}_1(t),$$

则$\mathcal{F}_1 \in P_{\omega,\rho(t)}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\alpha)$. 类似的, 若$g \in P_{\omega ap}(\mathbb{R}, X)$, $g \in P_\omega(\mathbb{R}, X)$, $g \in P_{\omega,k}(\mathbb{R}, X)$, 分别可以得到$\mathcal{F}_1 \in P_{\omega ap}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\alpha)$, $\mathcal{F}_1 \in P_\omega(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\alpha)$, $\mathcal{F}_1 \in P_{\omega,k}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\alpha)$.

对于$g \in AP(\mathbb{R}, X)$, 根据定理3.2, 存在常数$\widetilde{M} > 0$ 满足

$$\|\mathcal{F}_1(t+\tau) - \mathcal{F}_1(\tau)\|_\alpha \le \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{t} N_0 e^{-\varrho(t-s)} \|\Pi^s(\Theta^n(g(s+\tau) - g(s)))\|_\alpha ds \le \widetilde{M}\varepsilon,$$

则$\mathcal{F}_1 \in AP(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\alpha)$. 类似的结论对于$AA(\mathbb{R}, X)$ 也成立.

因此, 若$g \in \mathcal{A}((\mathbb{R}, X)$, 可得$\mathcal{F}_1 \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\alpha)$.

(ii) $\mathcal{F}_2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\alpha, \mu, \nu)$.

由(H_1) 和(3.3) 可得, 存在常数$\widetilde{K} > 0$ 满足

$$\|\mathcal{F}_2(t)\|_\alpha \le \widetilde{K} \int_{-\infty}^{t} e^{-\varrho(t-s)} |\varphi(s)| ds. \tag{3.5}$$

定义分段函数G : 当$t \ge 0$ 时$G(t) = e^{-\varrho t}$, 当$t < 0$ 时$G(t) = 0$, 所以

$$\int_{-\infty}^{t} e^{-\varrho(t-s)} |\varphi(s)| ds = \int_{0}^{+\infty} e^{-\varrho s} |\varphi(t-s)| ds = \int_{-\infty}^{+\infty} G(s) |\varphi(t-s)| ds.$$

由于$t \to |\varphi(t)| \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mu, \nu)$, 根据引理2.3 可得$t \to \int_{-\infty}^{t} e^{-\varrho(t-s)} |\varphi(s)| ds \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mu, \nu)$, 根据(3.5) 可得$\mathcal{F}_2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\alpha, \mu, \nu)$, 因此$\Gamma^s f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\alpha, \mu, \nu)$. 类似地, 我们有$\Gamma^u f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\alpha, \mu, \nu)$. 定理得证. ■

4. 例子

考虑一类广泛研究的生物数学模型 [2,3,10]，即如下具有无穷时滞的偏微分方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \dfrac{\partial}{\partial x_j} u(t,x) \right) - a_0 u(t,x) + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i} u(t-r,x) \\ \qquad\qquad + \int_{-\infty}^{0} \beta(\theta) u(t+\theta,x) d\theta + \Theta(t,x) \qquad t \ge \sigma,\ x \in \Omega, \\ u(t,x) = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t \ge \sigma,\ x \in \partial\Omega, \\ u(\sigma+\theta,x) = \varphi_0(\theta,x) \qquad\qquad\qquad\qquad -\infty < \theta \le 0, x \in \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

其中$\sigma \in \mathbb{R}$, a_0, r 和ε 为正常数, Ω 为$\mathbb{R}^n$ 内有界开集且具有光滑边界$\partial\Omega$, $\beta : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ 为正函数, $\Theta : [\sigma, +\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ 为连续函数, $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ 是对称的且存在$\eta > 0$ 对$x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$

DOI: 10.12677/aam.2023.125250

有 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \eta|\xi|^2$.

取$X = L^2(\Omega)$, 再定义线性算子$A : D(A) \subset X \to X$:

$$\begin{cases} D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ A = -\sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right). \end{cases}$$

引理4.1. *[22]* $-A$ 是X 上紧解析半群$(T(t))_{\geq 0}$ 的无穷小生成元. 此外, 谱$\sigma(-A)$ 是离散谱且$\sigma(-A) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$, 其中$\cdots < \lambda_{n+1} < \lambda_n < \cdots < \lambda_0 < 0$.

引理4.2. *[24]* $|\nabla|$ 和$\|\cdot\|_{\frac{1}{2}}$ 在$D(A^{\frac{1}{2}})$ 上等价. 此外, 我们有

$$\sqrt{\eta}|\nabla\psi| \leq \|\psi\|_{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{n \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|_{L^\infty}}|\nabla\psi|,$$

其中∇ 表示梯度向量.

对于$\gamma > 0$, 定义

$$\mathcal{B} = C_\gamma = \{\varphi \in C((-\infty, 0], X) : \lim_{\theta\to-\infty} e^{\gamma\theta}\varphi(\theta) \ \text{在} \ X \ \text{上存在}\}$$

对于$\varphi \in C_\gamma$, 定义范数$|\varphi| = \sup\limits_{\theta\leq 0} e^{\gamma\theta}\varphi(\theta)$.

引理4.3. *[23]* $\mathcal{B}$ 满足(A), (B), (C) 且为衰减记忆空间.

定义线性算子$L : \mathcal{B}_{\frac{1}{2}} \to X$:

$$L(\phi) = -a_0\phi(0) + \varepsilon\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\phi(-r) + \int_{-\infty}^{0}\beta(\theta)\phi(\theta)d\theta,$$

在$\mathcal{B}_{\frac{1}{2}}$ 上定义范数$\|\varphi\|_{\frac{1}{2}} = \sup\limits_{\theta\leq 0} e^{\gamma\theta}|A^{\frac{1}{2}}\varphi(\theta)|$.

下面我们假设:

(A_1) $e^{-2\gamma}\beta \in L^2(\mathbb{R}^-)$.

(A_2) $\int_{-\infty}^{0}|\beta(\theta)|d\theta < a_0$.

引理4.4. *[2]* 设(A_1) 成立, 则L 是由$\mathcal{B}_{\frac{1}{2}}$ 映射到X 的有界线性算子.

定义$f : \mathbb{R} \to X$ 为$f(t)(x) = \Theta(t, x)$, 其中$t \in \mathbb{R}, x \in \Omega$ 且

$$\begin{cases} u(t)(x) = u(t, x) & t \geq \sigma, x \in \Omega, \\ \varphi(\theta)(x) = \varphi_0(\theta, x) & \theta \leq 0, x \in \Omega, \end{cases}$$

则(4.1) 可重新表达为如下抽象微分方程的形式：

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = -Au(t) + L(u_t) + f(t), & t \geq 0, \\ u_0 = \varphi. \end{cases} \tag{4.2}$$

取$\varphi \in \mathcal{B}_{\frac{1}{2}}$, 根据定理3.1, 则(4.2) 在$(-\infty, +\infty)$ 上存在唯一的解u.

设$(\mathcal{U}(t))_{t\geq 0}$ 是(4.2) 在$\mathcal{B}_{\frac{1}{2}}$ 上的解半群, 且$\mathcal{A}_{\mathcal{U}}$ 是其无穷小生成元. 根据$(\mathcal{U}(t))_{t\geq 0}$ 双曲性, 我们可以得到

引理4.5. *[2] 若(A_1), (A_2) 成立, 则对于$\varepsilon < \frac{1}{nM_{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{-\lambda_0\eta}{\pi}}$, 有$\sigma(\mathcal{A}_{\mathcal{U}}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda) < 0\}$.*

设$\mu = \nu$ 并假设其Radon-Nikodym 导数为

$$\rho(t) = \begin{cases} e^t, & t \leq 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

由 [25] 可知, $\mu, \nu \in \mathcal{M}$ 满足(M_1) 和(M_2), 再根据定理3.4, 可以得到

定理4.1. *在以上假设下, 且若$f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}, X, \mu, \nu)$, 则(4.1) 有唯一的有界解$u \in \mathcal{P}(\mathbb{R}, X_{\frac{1}{2}}, \mu, \nu)$.*

注4.1. 本文利用分数幂算子理论和算子半群理论证明了PFDEs 测度伪型解的存在唯一性，通过引入测度，定义了一类测度伪型函数，证明了其构成的空间具有完备性，对反周期，周期，概周期，几乎自守，伪概周期，伪几乎自守等动力学性质进行了统一地研究，从而形式和结论更加简洁。同时另外一方面，我们也注意到，在条件(H_3) 中, 要求解析半群$T(t)$ 在X 上是紧的, 而这是一个比较强的条件，具体应用中也不便于验证，如何去掉或者减弱条件(H_3) 是值得探讨的一个问题，也是我们今后的研究方向。

参考文献

[1] Adimy, M., Ezzinbi, K. and Ouhinou, A. (2006) Variation of Constants Formula and Almost Periodic Solutions for Some Partial Functional Differential Equations with Infinite Delay. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **317**, 668-689. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.07.002

[2] Elazzouzi, A. and Ouhinou, A. (2010) Variation of Constants Formula and Reduction Principle for a Class of Partial Functional Differential Equations with Infinite Delay. *Nonlinear Analysis*, **73**, 1980-2000. https://doi.org/10.1016/j.na.2010.05.028

[3] Ezzinbi, K., Kyelem, B.A. and Ouaro, S. (2014) Periodicity in the α-Norm for Partial Functional Differential Equations in Fading Memory Spaces. *Nonlinear Analysis*, **97**, 30-54. https://doi.org/10.1016/j.na.2013.10.026

[4] Adimy, M., Ezzinbi, K. and Marquet, C. (2014) Ergodic and Weighted Pseudo-Almost Periodic Solutions for Partial Functional Differential Equations in Fading Memory Spaces. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **44**, 147-165. https://doi.org/10.1007/s12190-013-0686-9

[5] Ezzinbi, K., Fatajou, S. and N'Guérékata, G.M. (2008) Massera-Type Theorem for the Existence of $C^{(n)}$-Almost-Periodic Solutions for Partial Functional Differential Equations with Infinite Delay. *Nonlinear Analysis*, **69**, 1413-1424. https://doi.org/10.1016/j.na.2007.06.041

[6] Ezzinbi, K. and Zabsonre, I. (2013) Pseudo Almost Periodic Solutions of Infinite Class for Some Functional Differential Equations. *Applicable Analysis*, **92**, 1627-1642. https://doi.org/10.1080/00036811.2012.698003

[7] Ezzinbi, K., Fatajou, S. and N'Guérékata, G.M. (2008) Pseudo Almost Automorphic Solutions for Some Partial Functional Differential Equations with Infinite Delay. *Applicable Analysis*, **87**, 591-605. https://doi.org/10.1080/00036810802140681

[8] Ezzinbi, K. and N'Guérékata, G.M. (2007) Almost Automorphic Solutions for Partial Functional Differential Equations with Infinite Delay. *Semigroup Forum*, **75**, 95-115. https://doi.org/10.1007/s00233-006-0659-5

[9] Ezzinbi, K. and Miraoui, M. (2015) μ-Pseudo Almost Periodic and Automorphic Solutions in the α-Norm for Some Partial Functional Differential Equations. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **36**, 991-1012. https://doi.org/10.1080/01630563.2015.1042273

[10] Ezzinbi, K., Miraoui, M. and Rebey, A. (2016) Measure Pseudo-Almost Periodic Solutions in the α-Norm to Some Neutral Partial Differential Equations with Delay. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **13**, 3417-3431. https://doi.org/10.1007/s00009-016-0694-8

[11] Bouzahir, H. (2006) Existence and Regularity of Local Solutions to Partial Neutral Functional Differential Equations with Infinite Delay. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2006**, Paper No. 88.

[12] Elazzouzi, A. and Ouhinou, A. (2011) Optimal Regularity and Stability Analysis in the α-Norm for a Class of Partial Functional Differential Equations with Infinite Delay. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **30**, 115-135. https://doi.org/10.3934/dcds.2011.30.115

[13] Ezzinbi, K., Ghnimi, S. and Taoudi, M.A. (2010) Existence and Regularity of Solutions for Neutral Partial Functional Integrodifferential Equations with Infinite Delay. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, **4**, 54-64. https://doi.org/10.1016/j.nahs.2009.07.006

[14] Adimy, M., Bouzahir, H. and Ezzinbi, K. (2004) Existence and Stability for Some Partial Neutral Functional Differential Equations with Infinite Delay. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **294**, 438-461. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.02.033

[15] Benkhalti, R. and Ezzinbi, K. (2006) Existence and Stability in the α-Norm for Some Partial Functional Differential Equations with Infinite Delay. *Differential and Integral Equations*, **19**, 545-572. https://doi.org/10.57262/die/1356050442

[16] Hale, J. and Kato, J. (1978) Phase Space for Retarded Equations with Unbounded Delay. *Funkcialaj Ekvacioj*, **21**, 11-41.

[17] Hasler, M.F. and N'Guérékata, G.M. (2014) Bloch-Periodic Functions and Some Applications. *Nonlinear Studies*, **21**, 21-30.

[18] Wang, J.L. and Li, H.F. (2006) The Weighted Periodic Function and Its Properties. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis*, **13**, 1179-1183.

[19] Fink, A.M. (1974) Almost Periodic Differential Equations. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/BFb0070324

[20] Bochner, S. (1962) A New Approach to Almost Periodicity. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **48**, 2039-2043. https://doi.org/10.1073/pnas.48.12.2039

[21] Diagana, T., Ezzinbi, K. and Miraoui, M. (2014) Pseudo-Almost Periodic and Pseudo-Almost Automorphic Solutions to Some Evolution Equations Involving Theoretical Measure Theory. *Cubo*, **16**, 1-31. https://doi.org/10.4067/S0719-06462014000200001

[22] Pazy, A. (1983) Semigroup of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5561-1

[23] Hino, Y., Murakami, S. and Naito, T. (1991) Functional Differential Equations with Unbounded Delay. In: *Lectures Notes*, Vol. 1473, Springer Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/BFb0084432

[24] Adimy, M., Elazzouzi, A. and Ezzinbi, K. (2009) Reduction Principle and Dynamic Behaviors for a Class of Partial Functional Differential Equations. *Nonlinear Analysis*, **71**, 1709-1727. https://doi.org/10.1016/j.na.2009.01.008

[25] Blot, J., Cieutat, P. and Ezzinbi, K. (2013) New Approach for Weighted Pseudo-Almost Periodic Functions under the Light of Measure Theory, Basic Results and Applications. *Applicable Analysis*, **92**, 493-526. https://doi.org/10.1080/00036811.2011.628941