Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2023, 12(5), 2402-2409**
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.125242

模糊赋范线性空间的1-范数

——模糊1-范数

蒋 浩

西华大学理学院，四川 成都

收稿日期：2023年4月28日；录用日期：2023年5月21日；发布日期：2023年5月30日

摘 要

本文的主要内容是基于T. Bag和S. K. Samanta于2003年建立的模糊赋范线性空间；我们根据α-范数是上升集簇的性质，选取确界逼近的方式，定义了1-范数的概念，并研究其连续性、收敛性等相关性质。

关键词

模糊赋范线性空间，1-范数，1-范收敛，1-闭集

1-Norm of Fuzzy Normed Linear Space

—Fuzzy 1-Norm

Hao Jiang

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan

Received: Apr. 28th, 2023; accepted: May 21st, 2023; published: May 30th, 2023

Abstract

The main content of this paper is based on the fuzzy normed linear space established by T. Bag and S. K. Samanta in 2003; Based on the property that α-norm is an ascending cluster, we select the way of approximation to define the concept of 1-norm, study continuity, convergence and its related properties.

Keywords

Fuzzy Normed Linear Space, 1-Norm, Convergence of 1-Norm, 1-Closed Set

文章引用: 蒋浩. 模糊赋范线性空间的 1-范数[J]. 应用数学进展, 2023, 12(5): 2402-2409.
DOI: 10.12677/aam.2023.125242

1. 引言

2003 年，T. Bag 和 S. K. Samanta [1]建立了一类模糊赋范线性空间，模糊赋范线性空间中的模糊范数可以导出 α -范数($\alpha \in (0,1)$)。它们研究了模糊范数与 α -范数之间关系，得到了模糊收敛与 α -范数收敛等价的结论。随后，T. Bag 和 S. K. Samanta [2]给出模糊赋范空间中线性算子连续性的诸多概念并研究了这些概念之间关系。同时它们又研究了泛函分析中的模糊概念，把泛函分析中的四大基本定理(如一致有界定理、开映射定理)推广到更加一般的模糊环境中，形成了模糊泛函分析。随后，许多学者研究了模糊赋范线性空间中的拓扑性质如模糊不动点问题、模糊连续映射等，进一步丰富发展了模糊泛函分析。模糊赋范空间的拓扑性质可参考文献[3] [4] [5] [6]。在 T. Bag 和 S. K. Samanta 建立的模糊赋范线性空间中，由模糊范数导出的 1-范数可能是不存在的。因此，我们根据 α -范数是上升集簇的性质，选取确界逼近的方式定义了 1-范数的概念，并研究 1-范数是否是经典范数、1-范数的连续性质、点列依 1-范数收敛与点列模糊收敛之间关系、1-闭集和模糊闭集之间关系。

2. 预备知识

模糊赋范线性空间

定义 2.1 [1]：(模糊范数的定义)设 X 是线性空间，θ 为其零元，N 为 $X \times R$ 上的模糊子集。如果对 $\forall x, y \in X$，$c \in R$，有

(N1) $\forall t \le 0$，有 $N(x,t) = 0$；

(N2) $\forall t \in R$ 且 $t > 0$，有 $N(x,t) = 1$ 当且仅当 $x = \theta$；

(N3) $\forall t \in R$ 且 $t > 0$，如果 $c \ne 0$，有 $N(|c| x, t) = N(x, t/|c|)$；

(N4) $\forall s, t \in R$，有 $N(x+y, s+t) \ge \min\{N(x,s), N(y,t)\}$；

(N5) $N(x,\cdot)$ 为 R 上的不减函数且 $\lim\limits_{t \to +\infty} N(x,t) = 1$.

则称 N 为 X 上的模糊范数，(X, N) 为模糊赋范线性空间。

注[2]：$N(x,t)$ 表示 x 的范数是实数 t 的真值。

例子 2.2 [1]设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间，对 $\forall x \in X$，$\forall t \in R$，定义：

$$N(x,t) = \begin{cases} 0, & t \le \|x\| \\ 1, & t > \|x\| \end{cases},$$

则 (X, N) 是模糊赋范线性空间。

例子 2.3 [1]设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间，对 $\forall x \in X$，$\forall t \in R$，定义：

$$N(x,t) = \begin{cases} \dfrac{t}{t + \|x\|}, & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases},$$

则 (X, N) 是模糊赋范线性空间。

定义 2.4 [1]设 (X, N) 为模糊赋范线性空间，$\{x_n\}$ 是 X 中的点列，如果 $\exists x \in X$，使得

$$\lim_{n \to \infty} N(x_n - x, t) = 1, \quad \forall t > 0,$$

则称 $\{x_n\}$ 模糊收敛且模糊收敛到 x，记为 $x_n \xrightarrow{N} x$。x 称为 $\{x_n\}$ 的模糊极限。

注[1]：模糊极限如果存在，那么极限唯一。

定义 2.5 设 (X, N) 为模糊赋范线性空间，A 为 X 的子集。

1) A 中所有模糊收敛点列的模糊极限所成之集称为 A 的导集，记为 A'。

2) 若 $A' \subseteq A$，则称 A 为模糊闭集。

3) 称 $A \cup A'$ 为 A 的模糊闭包，记为 $\overline{A}$。

定理 2.6 [1]在 (X, N) 是模糊赋范线性空间，(N6)：若 $\forall t > 0$，有 $N(x,t) > 0$，则 $x = \theta$。对 $x \in \mathrm{X}$，$\alpha \in (0,1)$，令

$$\|x\|_\alpha = \wedge\left\{t > 0 \middle| N(x,t) \geq \alpha\right\},$$

则 $\|\cdot\|_\alpha$ 为 X 上的范数,且 $\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta$，$0 < \alpha \leq \beta < 1$。

(N7)：$\forall x \in X\ (x \neq \theta)$，$N(x,\cdot)$ 关于 t 连续且在 $\{t : 0 < N(x,t) < 1\}$ 上严格递增。

定理 2.7 [1]设 (X, N) 是模糊赋范线性空间，模糊范数 N 满足条件(N6)和(N7)，X 中的点列模糊收敛当且仅当该点列依 α 范数收敛 $(\forall 0 < \alpha < 1)$。

(N8)：在模糊赋范线性空间 (X, N) 中，对 $\forall x \in X$，有 $\sup\limits_{\alpha \in (0,1)} \|x\|_\alpha < \infty$。

定义 2.8 设 (X, N) 是模糊赋范线性空间，模糊范数满足(N8)：对 $x \in \mathrm{X}$，$\alpha \in (0,1]$，令 $\|x\|_\alpha$：

$$\|x\|_\alpha = \begin{cases} \inf\limits_{t \in R}\{t : N(x,t) \geq \alpha\} & \alpha \in (0,1) \\ \sup\limits_{\alpha \in (0,1)} \|x\|_\alpha & \alpha = 1 \end{cases}$$，称 $\|\cdot\|_\alpha$ 为 X 上的 α -范数。

定义 2.9 设 (X, N) 为模糊赋范线性空间，$\{x_n\}$ 是 X 中的点列，如果 $\exists x \in \mathrm{X}$，使得

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\|_1 = 0.$$

则称 $\{x_n\}$ 依 1-范收敛且 1-范收敛到 x，记为 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x$，$x$ 称为 $\{x_n\}$ 的 1-极限。

定义 2.10 设 (X, N) 为模糊赋范线性空间，A 是 X 的子集，

1) A 中所有依 1-范收敛点列的 1-极限所成之集称为 A 的 1-导集，记为 A'_α。

2) 若 $A'_1 \subseteq A$，则称 A 为 1-闭集。

3) 称 $A \cup A'_1$ 为 A 的 1-闭包，记为 $\overline{A_1}$。

3. 模糊赋范线性空间的 1-范数

本节，我们讨论了 1-范数与 M-范数的关系、1-范数的连续性以及 1-范数的收敛性。

在模糊赋范线性空间 (X, N) 中，我们在提出(N8-1)条件，如果模糊范数满足(N7)条件，那么(N8)条件与(N8-1)条件是等价的。

(N8-1)：$\forall x \in X$，存在 $t_x > 0$，使得 $N(x, t_x) = 1$。

性质 3.1 在模糊赋范线性空间 (X, N) 中，模糊范数满足(N7)条件，那么

(i) 对 $\forall x \in X\ (x \neq \theta)$，$\left\{\|x\|_\alpha : \alpha \in (0,1)\right\}$ 是 X 上的严格上升集簇。

(ii) (N8)条件与(N8-1)条件等价。

证：(i) 在模糊赋范线性空间中，任意选取的 $x \in X\ (x \neq \theta)$，

对 $\forall 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$，我们令 $A_1 = \{t : N(x,t) \geq \alpha_1\}$，$A_2 = \{t : N(x,t) \geq \alpha_2\}$，那么，

$$A_1 \supseteq A_2$$

由(N7)知，

$$\exists t_0 \in A_1,\ t_0 < \inf_{t\in R} A_2 \Rightarrow \inf_{t\in R} A_1 < \inf_{t\in R} A_2$$

即，$\|x\|_{\alpha_1} < \|x\|_{\alpha_2}$。

(ii) 必要性：当 $x=\theta$ 时，显然。

设 $\{\alpha_n\}$ 是 $(0,1)$ 内一严格单增数列且 $\alpha_n \to 1(n\to\infty)$，由(i)知，对 $\forall x\in X\,(x\neq\theta)$ 有，$\|x\|_{\alpha_n} < \|x\|_{\alpha_{n+1}}$

令 $t_n = \|x\|_{\alpha_n}$，则 $\{t_n\}$ 严格单增且 $t_n \to \|x\|_1\,(n\to\infty)$，那么，

$$N(x,t_{n+1}) \geq \alpha_n$$

因为 $N(x,\cdot)$ 关于 t 连续，当 $n\to\infty$ 时，

$$N(x,\|x\|_1)=1$$

充分性：对 $\forall 0<\alpha<1$，$x\in X$，

$$\|x\|_\alpha = \inf_{t\in R}\{t:N(x,t)\geq\alpha\} \leq \inf_{t\in R}\{t:N(x,t)\geq 1\} = \inf_{t\in R}\{t:N(x,t)=1\} < \infty$$

所以，

$$\|x\|_1 = \sup_{\alpha\in(0,1)} \|x\|_\alpha < \infty\text{，即证。}$$

定理 3.2：在模糊赋范线性空间 (X,N) 中，模糊范数 N 满足(N7) (N8)条件，令 M_x：$M_x = \inf_{t\in R}\{t:N(x,t)=1\}$ $\forall x\in X$，那么 $N(x,M_x)=1$（称 M_x 为 x 在 X 中的 M-范数)。

证：因为对 $\forall 0<\alpha<1$，$x\in X$，

$$\|x\|_\alpha = \inf_{t\in R}\{t:N(x,t)\geq\alpha\} \leq \inf_{t\in R}\{t:N(x,t)\geq 1\} = \inf_{t\in R}\{t:N(x,t)=1\} = M_x$$

所以，

$$\|x\|_\alpha \leq M_x \quad (1),$$

若 $N(x,M_x)<\alpha$，由(N7)知

$$\exists m_x \in R,\ M_x < m_x,$$

$$N(x,M_x) < N(x,m_x) < \alpha$$

所以，

$$M_x < m_x \leq \|x\|_\alpha\text{，与(1)式矛盾，}$$

因此，

$$N(x,M_x)\geq\alpha, \forall\alpha\in(0,1)$$

即，

对 $\forall x\in X$，$N(x,M_x) \geq \sup\{\alpha:\alpha\in(0,1)\} = 1$。

定理 3.3：如果模糊赋范线性空间 (X,N) 满足(N7) (N8)条件，那么 $\|x\|_1 = M_x$。即：$\sup_{\alpha\in(0,1)} \inf_{t\in R}\{t:N(x,t)\geq\alpha\} = \inf_{t\in R}\{t:N(x,t)=1\}$。

证：因为对 $\forall 0<\alpha<1$，

$$\|x\|_\alpha = \inf_{t\in R}\{t:N(x,t)\geq\alpha\} \leq \inf_{t\in R}\{t:N(x,t)\geq 1\} = \inf_{t\in R}\{t:N(x,t)=1\} = M_x$$

所以，M_x 是 $\left\{\|x\|_\alpha : 0<\alpha<1\right\}$ 的上界，因此，$\|x\|_1 \le M_x$。

下证 $\|x\|_1 < M_x$ 不成立，

如果 $\|x\|_1 < M_x = \inf\limits_{t\in R}\left\{t : N(x,t)=1\right\}$，那么 $N\left(x,\|x\|_1\right)<1$。

则存在 $\alpha_0 \in (0,1)$，$N\left(x,\|x\|_1\right)<\alpha_0$

由 α -范数的定义知，$\|x\|_{\alpha_0} = \inf\limits_{t\in R}\left\{t : N(x,t)\ge \alpha_0\right\}$，

对 $\forall t \in \left\{t : N(x,t)\ge \alpha_0\right\}$，有

$$\|x\|_1 \le t$$

因此，$\|x\|_1$ 是集合 $\left\{t : N(x,t)\ge \alpha_0\right\}$ 的下界，那么 $\|x\|_1 \le \inf\limits_{t\in R}\left\{t : N(x,t)\ge \alpha_0\right\} = \|x\|_{\alpha_0}$

由性质 3.1(i)知，$\exists \alpha_1 \in (\alpha_0,1)$，使得

$$\|x\|_1 \le \|x\|_{\alpha_0} < \|x\|_{\alpha_1}$$

这与 $\|x\|_1 = \sup\limits_{\alpha\in(0,1)} \|x\|_\alpha$ 矛盾，因此 $\|x\|_1 = M_x$。

例 3.4 设 $(\mathrm{X},\|\cdot\|)$ 为赋范线性空间，对 $\forall x\in \mathrm{X}$，$\forall t\in R$，令

$$N(x,t)=\begin{cases} 1, & t>\|x\| \\ \dfrac{2t}{t+\|x\|}, & 0<t\le \|x\| \\ 0, & t\le 0 \end{cases}$$

则 N 为 X 上模糊范数，并且模糊范数 N 满足(N7) (N8)条件。

证：验证 N 为模糊范数：

(N1) 易见，当 $t\le 0$ 时，有 $N(x,t)=0$，$\forall x\in \mathrm{X}$。

(N2) 对 $\forall t>0$，如果 $N(x,t)=1$，则从 N 的定义知：$\|x\|=0$，即 $x=\theta$。反之，从 N 的定义知：若 $x=\theta$，则 $\forall t>0$，有 $N(x,t)=1$。

(N3) 由于 $\|cx\|\le t \Leftrightarrow \|x\|\le \dfrac{t}{|c|}$，$\|cx\|\ge t \Leftrightarrow \|x\|\ge \dfrac{t}{|c|}$，所以

$$N(cx,t)=N\left(x,t\frac{t}{|c|}\right).$$

(N4) (a) $s+t<0$,不妨设 $s\le t$，那么 $s\le 0$，显然有

$$N(x+y,s+t)\ge \min\left\{N(x,s),N(y,t)\right\};$$

(b) $s=t=0$，显然有 $N(x+y,s+t)\ge \min\left\{N(x,s),N(y,t)\right\}$；

(c) $s+t>0$：$s>0$，$t<0$；$s<0$，$t>0$ 以上两种情况显然满足 $N(x+y,s+t)\ge \min\left\{N(x,s),N(y,t)\right\}$；

(d) $0<s+t<\|x+y\|$，$0<s<\|x\|$，$0<t<\|y\|$。不妨设 $N(x,s)\le N(y,t)$，则有

$$\frac{2s}{s+\|x\|}\le \frac{2t}{t+\|y\|} \Rightarrow t\|x\|\ge s\|y\|.$$

$$\Rightarrow (t+s)\|x\|\ge s\left(\|x\|+\|y\|\right)\ge s\|x+y\|$$

$$\Rightarrow \frac{\|x\|}{s}\ge \frac{\|x+y\|}{s+t}$$

故

$$N(x+y,s+t)-N(x,s)=\frac{2}{1+\frac{\|x+y\|}{s+t}}-\frac{2}{1+\frac{\|x\|}{s}}\geq 0.$$

则

$$N(x+y,s+t)\geq\min\{N(x,s),N(y,t)\}.$$

(e) $0<s+t<\|x+y\|$，$0<s<\|x\|$，$t>\|y\|$，则有 $N(x,s)\leq N(y,t)$ 且 $\frac{2t}{t+\|y\|}>1>N(x,s)$，所以，$s\|y\|-t\|x\|\leq 0$。同上可得：$N(x+y,s+t)\geq\min\{N(x,s),N(y,t)\}$。

(f) $s+t>\|x+y\|$，$s>\|x\|$，$t>\|y\|$，则有 $N(x+y,s+t)=1=N(x,s)=N(y,t)$ 满足(N4)。

(N5) 从定义易得：$N(x,\cdot)$ 为 R 上的不减函数且 $\lim\limits_{t\to+\infty}N(x,t)=1$。

(N7)显然，$\forall x\in X\,(x\neq\theta)$，$N(x,\cdot)$ 关于 t 连续且在 $\{t:0<N(x,t)<1\}$ 上严格递增。

(N8) $\forall x\in X$，$t_x>\|x\|$ 时，$N(x,t_x)=1$。

在例子 2.2 [1]中，虽然 $\|x\|_1=M_x$，但模糊范数却不满足(N7)条件。因此，在模糊赋范线性空间中，模糊范数满足(N7) (N8)是 $\|x\|_1=M_x$ 的充分不必要条件。

定理 3.5 如果模糊赋范线性空间 (X,N) 满足(N7) (N8)条件，那么 1-范数为 X 上的范数。

证：(i) 对 $\forall x\in X$，$\|x\|_1=\sup\limits_{\alpha\in(0,1)}\|x\|_\alpha$，当 $t<0$ 时，$N(x,t)=0$

$$\inf_{t\in R}\{t:N(x,t)\geq\alpha\}\geq 0,\alpha\in(0,1)\Rightarrow\|x\|_\alpha\geq 0,\alpha\in(0,1)$$

则 $\|x\|_1=\sup\limits_{\alpha\in(0,1)}\|x\|_\alpha\geq 0$。

(ii) 由定理 3.3 得 $\|x\|_1=M_x=\inf\limits_{t\in R}\{t:N(x,t)=1\}$

若 $\|x\|_1=\inf\limits_{t\in R}\{t:N(x,t)=1\}=0$，那么 $\forall t>0$，$N(x,t)=1\overset{(\mathrm{N2})}{\Rightarrow}x=\theta$.

若 $x=\theta$，那么 $\forall t>0$，$N(x,t)=1\Rightarrow\inf\limits_{t\in R}\{t:N(x,t)=1\}=0$

因此，

$$\|x\|_1=0\Leftrightarrow x=\theta.$$

(iii) 如果 $c\neq 0$，那么

$$\begin{aligned}\|cx\|_1&=\sup_{\alpha\in(0,1)}\inf_{t\in R}\{t:N(cx,t)\geq\alpha\}=\sup_{\alpha\in(0,1)}\inf_{t\in R}\{t:N(x,t/|c|)\geq\alpha\}\\&=\sup_{\alpha\in(0,1)}\inf_{t\in R}\{|c|t:N(x,t)\geq\alpha\}=|c|\sup_{\alpha\in(0,1)}\inf_{t\in R}\{t:N(x,t)\geq\alpha\}=|c|\|x\|_1\end{aligned}$$

如果 $c=0$，

$$\|cx\|_1=\|0\|_1=0=0\|x\|_1=c\|x\|_1$$

(iv) 对 $\alpha\in(0,1)$，

$$\begin{aligned}\|x\|_\alpha+\|y\|_\alpha&=\inf_{t\in R}\{t:N(x,t)\geq\alpha\}+\inf_{s\in R}\{s:N(y,s)\geq\alpha\}\\&=\inf_{t,s\in R}\{t+s:N(x,t)\geq\alpha,N(y,s)\geq\alpha\}\\&\overset{\text{由(N4)得}}{\geq}\inf_{t+s\in R}\{t+s:N(x+y,t+s)\geq\alpha\}\\&=\inf_{t\in R}\{t:N(x+y,t)\geq\alpha\}=\|x+y\|_\alpha\end{aligned}$$

因为对，

$$\forall\alpha\in(0,1),\quad \sup_{\alpha\in(0,1)}\left(\|x\|_\alpha+\|y\|_\alpha\right)\ge\|x\|_\alpha+\|y\|_\alpha\ge\|x+y\|_\alpha$$

所以，

$$\sup_{\alpha\in(0,1)}\left(\|x\|_\alpha+\|y\|_\alpha\right)\ge\sup_{\alpha\in(0,1)}\|x+y\|_\alpha$$

又因为，

$$\forall\alpha\in(0,1)\quad \sup_{\alpha\in(0,1)}\|x\|_\alpha\ge\|x\|_\alpha,\ \sup_{\alpha\in(0,1)}\|y\|_\alpha\ge\|y\|_\alpha\Rightarrow\sup_{\alpha\in(0,1)}\|x\|_\alpha+\sup_{\alpha\in(0,1)}\|y\|_\alpha\ge\|x\|_\alpha+\|y\|_\alpha$$

所以，

$$\sup_{\alpha\in(0,1)}\|x\|_\alpha+\sup_{\alpha\in(0,1)}\|y\|_\alpha\ge\sup_{\alpha\in(0,1)}\left(\|x\|_\alpha+\|y\|_\alpha\right)$$

则 $\sup_{\alpha\in(0,1)}\|x\|_\alpha+\sup_{\alpha\in(0,1)}\|y\|_\alpha\ge\sup_{\alpha\in(0,1)}\|x+y\|_\alpha$，因此，$\|x\|_1+\|y\|_1\ge\|x+y\|_1$

综上，$\|x\|_1$ 为 X 上的范数。

定理 3.6 如果模糊赋范线性空间 (X,N) 满足(N8)条件，那么对 $\forall x\in X$，$\|x\|_\alpha$ 在 $\alpha=1$ 处连续，即 $\lim_{\alpha\to1}\|x\|_\alpha=\|x\|_1\,(\forall x\in X)$。

证：任意给定的 $x\in X$，$\|x\|_\alpha$ 在 $\alpha\in U_-^0(1,\delta)$ 上有定义，$\|x\|_1$ 是 $\left\{\|x\|_\alpha:\alpha\in(0,1)\right\}$ 的上确界，

所以，

对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\alpha_0\in(0,1)$，使得 $\|x\|_1-\varepsilon<\|x\|_{\alpha_0}<\|x\|_1+\varepsilon$

对 $\forall\alpha_n\uparrow1(\alpha_n>0,n=1,2,\cdots)$，$\exists n_0\in N^+$，当 $n>n_0$ 时，$\|x\|_{\alpha_0}\le\|x\|_{\alpha_n}$

因此，

$$\|x\|_1-\varepsilon<\|x\|_{\alpha_n}<\|x\|_1+\varepsilon$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\|x\|_{\alpha_n}=\|x\|_1\Rightarrow\lim_{\alpha\to1}\|x\|_\alpha=\|x\|_1\quad\text{(归结原则)。}$$

定理 3.7 如果模糊赋范线性空间 (X,N) 满足(N8)条件，对点 $\{x_n\}$ $\exists x_0\in X$，$\{x_n\}$ 依 1-范数收敛到 x_0，那么 $\{x_n\}$ 依模糊范收敛到 x_0。$x_n\xrightarrow{\|\cdot\|_1}x_0\Rightarrow x_n\xrightarrow{N}x_0$.

证：对 $\forall t>0$，$\forall\alpha\in(0,1)$，由于 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|_1=0$，故 $\exists n_0=n_0(t)$，对 $\forall n\ge n_0$，有，

$$\inf_{s\in R}\left\{s:N(x_n-x_0,s)\ge\alpha\right\}\le\sup_{\alpha\in(0,1)}\inf_{s\in R}\left\{s:N(x_n-x_0,s)\ge\alpha\right\}=\|x_n-x_0\|_1<t.$$

即：对 $\forall n\ge n_0$，有

$$\|x_n-x_0\|_\alpha=\inf_{s\in R}\left\{s>0\,\middle|\,N(x_n-x_0,s)\ge\alpha\right\}<t.$$

如果 $N(x_n-x_0,t)<\alpha$，那么由(N5)易知 t 是 $\left\{s:N(x_n-x_0,s)\ge\alpha\right\}$ 的一个下界，这与 $\|x_n-x_0\|_\alpha$ 是 $\left\{s:N(x_n-x_0,s)\ge\alpha\right\}$ 的下确界矛盾，则 $N(x_n-x_0,t)\ge\alpha$

因此，对 $\forall n\ge n_0$，有

$$N(x_n-x_0,t)\ge\alpha$$

由 α 的任意性知

$$\lim_{n\to\infty} N\left(x_n - x_0, t\right) = 1$$

故

$$x_n \xrightarrow{N} x_0$$

推论 3.8：在 (X, N) 是模糊赋范线性空间，模糊范数 N 满足(N8)条件，那么模糊闭集是 1-闭集。

证：集合 A 是 (X, N) 的任意模糊闭集，则对

$$\forall \{u_n\} \subset A, \text{若 } u_n \xrightarrow{N} u \text{ 则 } u \in A.$$

在模糊赋范线性空间中，若 $x \in A_1'$，则 $\exists \{x_n\} \subset A$。

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x$$

由定理 3.7 知

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} N\left(x_n - x, t\right) = 1\left(\forall t > 0\right)$$

所以，

$$x_n \xrightarrow{N} x$$

因此 $x \in A$。由 x 的任意性知 $A_1' \subset A$,所以 A 是 1-闭集。

推论 2.9：在是模糊赋范线性空间 (X, N) 中，模糊范数 N 满足(N8)条件，如果 1-范极限存在，那么极限唯一。

证：由([1]，注 2.1)知，如果模糊极限如果存在那么极限唯一，结合定理 3.7，显然。

4. 结论

本文以T. Bag和S. K. Samanta于2003年提出的模糊范数为研究对象，定义了1-范数的概念，讨论了1-范数的连续性、收敛性等性质；得到了点列依1-范收敛的极限点是唯一的，以及如果模糊范数满足(N7) (N8)条件那么1-范数等于M-范数并且1-范数是经典范数等结论。下一步，我们将结合函数逼近理论，在模糊赋范线性空间中，引入1-最佳逼近的概念，讨论把模糊赋范线性空间(X, N)的逼近问题转化成经典赋范线性空间$(X, \|\cdot\|)$的逼近问题。

致　谢

我要感谢我的导师，从本文的撰写到定稿，都给予了我极大的支持。再次向您致以最崇高的谢意。

参考文献

[1] Bag, T. and Samanta, S.K. (2003) Finite Dimensional Fuzzy Normed Linear Spaces. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, **11**, 687-705.

[2] Bag, T. and Samanta, S.K. (2005) Fuzzy Bounded Linear Operators. *Fuzzy Sets and Systems*, **151**, 513-547. https://doi.org/10.1016/j.fss.2004.05.004

[3] Sadeqi, I. and Solaty Kia, F. (2009) Fuzzy Normed Linear Space and Its Topological Structure. *Chaos, Solitons and Fractals*, **40**, 2576-2589. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2007.10.051

[4] Sadeqi, I. and Solaty Kia, F. (2009) Some Fixed Point Theorems in Fuzzy Reflexive Banaach Spaces. *Chaos, Solitons and Fractals*, **41**, 2606-2612. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2008.09.050

[5] Ji, P., Qi, W.Q. and Wei, R.H. (2014) Completeness of Fuzzy Normed Linear Space of All Weakly Fuzzy Bounded Linear Operators. *Fuzzy Sets and Systems*, **251**, 94-100. https://doi.org/10.1016/j.fss.2013.11.003

[6] Nădăban, S. (2015) Fuzzy Continuous Mappings in Fuzzy Normed Linear Spaces. *Special Issue on Fuzzy Sets and Applications*, **10**, 834-842. https://doi.org/10.15837/ijccc.2015.6.2074