Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(8), 3619-3630
Published Online August 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.128360

广义S-α_1型块对角占优矩阵的判定及其谱分析

朱开心，庹　清*，黄　琦

吉首大学数学与统计学院，湖南　吉首

收稿日期：2023年7月18日；录用日期：2023年8月8日；发布日期：2023年8月17日

摘　要

利用G-函数的性质研究了一类新的广义块对角占优矩阵及其判定方法。同时，利用该判定方法给出了分块矩阵特征值新的包含域。最后，用数值算例说明了该判定方法的优越性。

关键词

块H-矩阵，G-函数，特征值，广义S-α_1型块对角占优矩阵

The Determination and Spectrum of Generalized S-α_1 Block Diagonally Dominant Matrices

Kaixin Zhu, Qing Tuo*, Qi Hung

College of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou Hunan

Received: Jul. 18th, 2023; accepted: Aug. 8th, 2023; published: Aug. 17th, 2023

Abstract

A new class of generalized block diagonally dominant matrix and its determination method are studied by using the properties of G-function. At the same time, a new bound for eigenvalues of block matrices was given and some examples are given to show the advantages of this new result.

Keywords

Block H-Matrix, G-Function, Eigenvalue, Generalized S-α_1 Block Diagonally Dominant Matrix

*通讯作者。

文章引用：朱开心，庹清，黄琦．广义 S-α_1 型块对角占优矩阵的判定及其谱分析[J]．应用数学进展，2023，12(8): 3619-3630. DOI: 10.12677/aam.2023.128360

1. 引言

在矩阵理论的研究中，矩阵分块技术有着广泛的应用。1962 年，*Feingold* 和 *Varga* [1]首次提出了分块矩阵的对角占优性，吸引众多学者对此进行了颇有价值的推广与改进。文献[2]-[9]，主要利用了 *G*-函数的性质研究了 *I*-型块对角占优矩阵和 *II*-型块对角占优矩阵的对角占优性，并对块 *H*-矩阵的特征值包含域进行了分析，说明了分块矩阵与原矩阵之间联系密切，通过矩阵分块对原矩阵进行降阶处理，降低计算的难度。文献[10]-[14]，研究了块 *H*-矩阵的多种等价条件，对块 *H*-矩阵的判定作了更进一步的改进和推广。其中文献[10] [11] [12]，给出了严格 α-型块对角占优矩阵的等价条件，文献[13]和[14]更是给出了严格 α-双块对角占优矩阵的等价条件，从而得到了块 *H*-矩阵新的判据。

文献[2]改进了文献[3]的主要结论，并给出了 *S*-型块对角占优矩阵的特征值包含域。通过数值算例说明了 *S*-型块对角占优矩阵比双块对角占优矩阵的特征值包含域更小。文献[6]叙述了多种 *H*-矩阵与其等价的特征值包集合的等价关系，并且说明了 *H*-矩阵的判定范围越广，与其等价的特征值包含范围越小。同样，这种关系也普遍存在于块 *H*-矩阵与其特征值包含域之间。本文在文献[2]的基础上，结合文献[6]和[15]中描述的等价关系，讨论了一类块 *H*-矩阵新的判定方法以及等价的特征值包含域。最后，通过数值算例说明了新判定条件的有效性和广泛性。

2. 记号与相关定理定义

为叙述方便，引入记号：设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$，且分块如下

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

其中 $A_{ij}\in M_{n_i}(C)$ 且非奇异，$\sum_{i=1}^{m} n_i = n$，$i\in M=\{1,2,\cdots,m\}$。对 $\forall i,j\in M$ 给出定义 $R_i(A)=\sum_{j\neq i}\|A_{ij}\|=R_i$ 和 $C_i(A)=\sum_{j\neq i}\|A_{ji}\|=C_i$，记 $\sigma(A)$ 为矩阵 A 的谱，$\|\cdot\|$ 为任意的矩阵诱导范数。定义分块矩阵 A 的块比较矩阵 $T(A)=(t_{ij})_{m\times m}\in R^{m\times m}$，其中

$$t_{ij}=\begin{cases} \|A_{ii}^{-1}\|^{-1}, i=j \\ -\|A_{ij}\|, \ i\neq j \end{cases}, \ \forall i,j\in M .$$

故可定义其范数矩阵为

$$A'=\begin{pmatrix} \|A_{11}^{-1}\|^{-1} & \|A_{12}\| & \cdots & \|A_{1m}\| \\ \|A_{21}\| & \|A_{22}^{-1}\|^{-1} & \cdots & \|A_{2m}\| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \|A_{m1}\| & \|A_{m2}\| & \cdots & \|A_{mm}^{-1}\|^{-1} \end{pmatrix}.$$

记 S 是 M 的任意非空子集，$\bar{S}$ 是 M 中 S 的补集，即 $S,\bar{S}\subset M$，$S\cap\bar{S}=\varnothing$，$S\cup\bar{S}=M$。对 $\forall i\in S$，设 $R_i^S(A)=\sum_{t\in S,t\neq i}\|A_{it}\|=R_i^S$，$R_i^{\bar{S}}(A)=\sum_{t\in\bar{S}}\|A_{it}\|=R_i^{\bar{S}}$，$C_i^S(A)=\sum_{t\in S,t\neq i}\|A_{ti}\|=C_i^S$，$C_i^{\bar{S}}(A)=\sum_{t\in\bar{S}}\|A_{ti}\|=C_i^{\bar{S}}$，故有 $R_i=R_i^S+R_i^{\bar{S}}$，$C_i=C_i^S+C_i^{\bar{S}}$。另设 $r_i^S(A)=\sum_{t\in S,t\neq i}|a_{it}|$，$r_i^{\bar{S}}(A)=\sum_{t\in\bar{S}}|a_{it}|$，$c_i^S(A)=\sum_{t\in S,t\neq i}|a_{ti}|$，$c_i^{\bar{S}}(A)=\sum_{t\in\bar{S}}|a_{ti}|$，同样有 $r_i(A)=r_i^S(A)+r_i^{\bar{S}}(A)$，$c_i(A)=c_i^S(A)+c_i^{\bar{S}}(A)$。

定义 1 [1]设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$ 且分块如式(1)，若有

$$\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}\geq(>)R_i,$$

则称 A 为(严格)块对角占优矩阵，记为 $A\in BD(BSD)$。如果存在一个 m 阶正对角矩阵 X 使得 $AX\in BSD$，即若存在 $X=diag(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，$\forall i\in M$，$x_i>0$ 使得

$$x_i\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}>\sum_j x_j\|A_{ij}\|,\ \forall i,j\in M,$$

则称 A 为块 H-矩阵，记为 $A\in BH$。

定义 2 [5]记 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$ 为 n 维实函数集，其中 $f_i(A):M_n(C)\to R^+$ (其中 R^+ 为非负实数集)且仅依赖于矩阵 A 的非对角元的模。若任意满足 $|a_{ii}|>f_i(A)$，$i=1,2,\cdots,n$ 的 $A\in M_n(C)$ 非奇异，则称 f 是一个 G-函数，记为 $f\in g_n$。

显然，若 $f_i(A)$ 为下列之一，则 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_n)\in g_n$：

$$f_i(A)=\sum_{j\neq i}|a_{ij}|;$$

$$f_i(A)=\frac{x_j}{x_i}\sum_{j\neq i}|a_{ij}|,\quad x_1,x_2,\cdots,x_n>0;$$

$$f_i(A)=\alpha\sum_{j\neq i}|a_{ij}|+(1-\alpha)\sum_{i\neq j}|a_{ji}|,\quad \alpha\in[0,1];$$

$$f_i(A)=\left(\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\right)^{\alpha}\left(\sum_{i\neq j}|a_{ji}|\right)^{1-\alpha},\quad \alpha\in[0,1].$$

定义 3 [7]设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$ 且分块如式(1)，若存在 $f\in g_n$，使得

$$\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}>f_i(T(A)),\ \forall i\in M,$$

则称 $A\in BGD$；若存在 $f\in g_n$，使得

$$\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}\left\|A_{jj}^{-1}\right\|^{-1}>f_i(T(A))f_j(T(A)),\ \forall i,j\in M,$$

则称 $A\in BLGD$。

定义 4 [8]设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$ 且分块如式(1)，若存在 $\alpha\in[0,1]$，使得

$$\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}>\alpha R_i+(1-\alpha)C_i,\ \forall i\in M,$$

则称 A 为严格 α_1 型块对角占优矩阵，记为 $A\in\alpha_1$-BSD。

定义 5 [8]设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$ 且分块如式(1)，若存在 $\alpha\in[0,1]$，使得

$$\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}>(R_i)^{\alpha}(C_i)^{(1-\alpha)},\ \forall i\in M,$$

则称 A 为严格 α_2 型块对角占优矩阵，记为 $A \in \alpha_2\text{-}BSD$。

引理 1 [8]设 $A=\left(a_{ij}\right)\in M_n\left(C\right)$ 且分块如式(1)，若矩阵 A 满足 $A\in\alpha_1\text{-}BSD$ 或 $A\in\alpha_2\text{-}BSD$，则 A 是一个块 H-矩阵。

引理 2 [2]设 $A=\left(a_{ij}\right)\in M_n\left(C\right)$ 且分块如式(1)，若 $S,\bar{S}\subset M$，$S\cap\bar{S}=\varnothing$，$S\cup\bar{S}=M$，$\exists i\in S$ 有 $\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}>R_i^S$ 成立(或 $\exists j\in\bar{S}$，有 $\left\|A_{jj}^{-1}\right\|^{-1}>R_j^{\bar{S}}$ 成立)，使得

$$\left[\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-R_i^S\right]\left[\left\|A_{jj}^{-1}\right\|^{-1}-R_j^{\bar{S}}\right]>R_i^{\bar{S}}R_j^S,\ \forall i\in S,\ \forall j\in\bar{S},$$

则称矩阵 A 为严格 S-型块对角占优矩阵，记为 $A\in S\text{-}BSD$。

引理 3 [2]设 $A=\left(a_{ij}\right)\in M_n\left(C\right)$ 且分块如式(1)，若矩阵 A 为满足 $A\in S\text{-}BSD$，则 A 是一个块 H-矩阵。

引理 4 [2]设 $A=\left(a_{ij}\right)\in M_n\left(C\right)$ 且分块如式(1)，若 $S,\bar{S}\subset M$，$S\cap\bar{S}=\varnothing$，$S\cup\bar{S}=M$，则 A 的所有特征值均位于如下区域之中：

$$G^{(3)}=\bigcup_{i=1}^{m}\sigma\left(A_{ii}\right)\cup G_S\cup G_{\bar{S}}\cup G_{S\bar{S}},$$

其中

$$G_S=\bigcup_{i\in S}\left\{z\in C\left\|\left(A_{ii}-zI_{n_i}\right)^{-1}\right\|^{-1}\le R_i^S\right\},$$

$$G_{\bar{S}}=\bigcup_{j\in\bar{S}}\left\{z\in C\left\|\left(A_{jj}-zI_{n_j}\right)^{-1}\right\|^{-1}\le R_j^{\bar{S}}\right\},$$

$$G_{S\bar{S}}=\bigcup_{i\in S,j\in\bar{S}}\left\{z\in C\left[\left\|\left(A_{ii}-zI_{n_i}\right)^{-1}\right\|^{-1}-R_i^S\right]\left[\left\|\left(A_{jj}-zI_{n_j}\right)^{-1}\right\|^{-1}-R_j^{\bar{S}}\right]\le R_i^{\bar{S}}R_j^S\right\}.$$

引理 3 至引理 5 为文献[2]的主要结果，本文在此基础上，利用不等式的放缩技巧使得块 H-矩阵的可判定范围进一步扩大，相反的，与其对应的矩阵特征值所在区域会更加精确。从而对文献[2]的主要结果进行了推广和改进。

3. 主要结果

3.1. 定理 1

设 $A=\left(a_{ij}\right)\in M_n\left(C\right)$ 且分块如式(1)，若存在 $S,\bar{S}\subset M$，$S\cap\bar{S}=\varnothing$，$S\cup\bar{S}=M$。$\exists i\in S$，有 $\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}>R_i^S$ (或 $\exists j\in\bar{S}$，有 $\left\|A_{jj}^{-1}\right\|^{-1}>R_j^{\bar{S}}$)且 $\exists\alpha\in\left[0,1\right]$，对 $\forall i\in S$，$\forall j\in\bar{S}$ 有

$$\left[\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-R_i^S\right]\left[\left\|A_{jj}^{-1}\right\|^{-1}-R_j^{\bar{S}}\right]>\left[\alpha R_i^{\bar{S}}+\left(1-\alpha\right)C_j^S\right]\left[\alpha R_j^S+\left(1-\alpha\right)C_i^{\bar{S}}\right],\tag{2}$$

则称矩阵 A 为严格 S-α_1 型块对角占优矩阵，记为 $A\in S\text{-}\alpha_1\text{-}BSD$，且 $A\in BH$。

证明 当 $\alpha=1$ 时，显然有

$$\left[\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-R_i^S\right]\left[\left\|A_{jj}^{-1}\right\|^{-1}-R_j^{\bar{S}}\right]>R_i^{\bar{S}}R_j^S,$$

即为引理 3。

当 $\alpha \neq 1$ 时，假设定理成立，即存在 $i_0 \in S$ 有

$$\left\|A_{i_0 i_0}^{-1}\right\|^{-1} > R_{i_0}^{S},$$

则对 $\forall j \in \bar{S}$，由式(2)不难得出

$$\begin{aligned}&\left[\left\|A_{i_0 i_0}^{-1}\right\|^{-1} - R_{i_0}^{S}\right]\left[\left\|A_{jj}^{-1}\right\|^{-1} - R_{j}^{\bar{S}}\right]\\&>\left[\alpha R_{i_0}^{\bar{S}} + (1-\alpha) C_j^{S}\right]\left[\alpha R_j^{S} + (1-\alpha) C_{i_0}^{\bar{S}}\right]\\&\geq 0,\end{aligned}$$

即有

$$\left\|A_{jj}^{-1}\right\|^{-1} - R_j^{\bar{S}} > 0,\ \forall j \in \bar{S}, \tag{3}$$

则对 $\forall i \in S$，$\forall j \in \bar{S}$，有

$$\begin{aligned}&\left[\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1} - R_{i}^{S}\right]\left[\left\|A_{jj}^{-1}\right\|^{-1} - R_{j}^{\bar{S}}\right]\\&>\left[\alpha R_{i}^{\bar{S}} + (1-\alpha) C_j^{S}\right]\left[\alpha R_j^{S} + (1-\alpha) C_{i}^{\bar{S}}\right]\\&\geq 0,\end{aligned}$$

由式(2)可知，以下结论成立

$$\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1} - R_i^{S} > 0,\ \forall i \in S. \tag{4}$$

同理，若存在 $\exists j_0 \in \bar{S}$ 有 $\left\|A_{j_0 j_0}^{-1}\right\|^{-1} > R_{j_0}^{\bar{S}}$，同样可证得式(3)和式(4)成立。

取 d 满足

$$+\infty \geq Q \geq \min_{i\in S} \frac{\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1} - R_i^{S}}{\alpha R_i^{\bar{S}} + (1-\alpha) C_j^{S}} > d > \max_{j\in \bar{S}} \frac{\alpha R_j^{S} + (1-\alpha) C_i^{\bar{S}}}{\left\|A_{jj}^{-1}\right\|^{-1} - R_j^{\bar{S}}} \geq 0, \tag{5}$$

故 $d \neq +\infty$，构造 $D = diag\{d_1, d_2, \cdots, d_m\}$，其中

$$d_i = \begin{cases}1, & \forall i \in S\\ d, & \forall i \in \bar{S}\end{cases}$$

且由式(3)~(5)可知 D 为正对角矩阵，则令 $B = T(A)D = (b_{ij})_{m\times m}$。

当 $\forall i \in S$ 时，有

$$\begin{aligned}\left|b_{ii}\right| - r_i^{S}(B) &= \left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1} - R_i^{S}(A)\\&> d\left[\alpha R_i^{\bar{S}} + (1-\alpha) C_j^{S}\right]\\&= \alpha d R_i^{\bar{S}} + (1-\alpha) d C_j^{S}\\&= \alpha r_i^{\bar{S}}(B) + (1-\alpha) c_j^{S}(B)\\&\geq 0,\end{aligned}$$

对于矩阵 B 满足对 $\forall i \in S$，且 $\left|b_{ii}\right| > r_i^{S}(B)$ 有

$$\left|b_{ii}\right| - r_i^{S}(B) > \alpha r_i^{\bar{S}}(B) + (1-\alpha) c_j^{S}(B). \tag{6}$$

假设矩阵 B 是奇异矩阵，即存在非零向量 $x\in C^m$，使得 $Bx=0$ 或满足

$$-b_{ii}x_i=\sum_{t\in M/\{i\}}b_{it}x_t,\ \forall i\in M,$$

显然 $\exists S\subset M$，有

$$|x_i|\ge\max|x_t|,\ \forall i\in S,\ \forall t\in M,$$

即有

$$|b_{ii}||x_i|\le\sum_{t\in S,t\ne i}|b_{it}||x_t|+\sum_{j\in\bar{S}}|b_{ij}||x_j|,\ \forall i\in S,\ \forall j\in\bar{S},$$

对 $\forall i\in S$，可变形为

$$|b_{ii}||x_i|\le r_i^S(B)|x_i|+\sum_{j\in\bar{S}}|b_{ij}||x_j|,$$

$$\left(|b_{ii}|-r_i^S(B)\right)|x_i|\le\sum_{j\in\bar{S}}|b_{ij}||x_j|,$$

利用 Holder 不等式，可以得到

$$\begin{aligned}\left(|b_{ii}|-r_i^S(B)\right)|x_i|&\le\sum_{j\in\bar{S}}|b_{ij}|^{\alpha}\left(|b_{ij}||x_j|^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha}\\&\le\left(\sum_{j\in\bar{S}}|b_{ij}|\right)^{\alpha}\left(\sum_{j\in\bar{S}}|b_{ij}||x_j|^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha}\\&=\left(r_i^{\bar{S}}(B)\right)^{\alpha}\left(\sum_{j\in\bar{S}}|b_{ij}||x_j|^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha}.\end{aligned}\tag{7}$$

(i) 假设 $\exists i\in S$，使得 $r_i^{\bar{S}}(B)=0$，则式(7)恒有

$$\left(|b_{ii}|-r_i^S(B)\right)|x_i|\le 0,$$

成立，这与式(6)相矛盾。故在此情况下，矩阵 B 是非奇异的。

(ii) 对 $\forall i\in S$，$r_i^{\bar{S}}(B)\ne 0$，均有

$$\frac{\left(|b_{ii}|-r_i^S(B)\right)|x_i|}{\left(r_i^{\bar{S}}(B)\right)^{\alpha}}\le\left(\sum_{j\in\bar{S}}|b_{ij}||x_j|^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha},$$

等价地有

$$\frac{\left(|b_{ii}|-r_i^S(B)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\left(r_i^{\bar{S}}(B)\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}|x_i|^{\frac{1}{1-\alpha}}\le\sum_{j\in\bar{S}}|b_{ij}||x_j|^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

不等式两边对所有的 $i\in S$ 求和，得到

$$\sum_{i\in S}\frac{\left(|b_{ii}|-r_i^S(B)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\left(r_i^{\bar{S}}(B)\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}|x_i|^{\frac{1}{1-\alpha}}\le\sum_{i\in S}\sum_{j\in\bar{S}}|b_{ij}||x_j|^{\frac{1}{1-\alpha}}=\sum_{j\in\bar{S}}c_j^S(B)|x_j|^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

因此，至少存在一个 $i_0\in S$ 使得

$$\frac{\left(\left|b_{i_0i_0}\right|-r_{i_0}^{S}\left(B\right)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\left(r_{i_0}^{\bar{S}}\left(B\right)\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\le c_j^{S}\left(B\right),$$

成立。再由 Young 不等式可以得出

$$\left|b_{i_0i_0}\right|-r_{i_0}^{S}\left(B\right)\le\left(r_{i_0}^{\bar{S}}\left(B\right)\right)^{\alpha}\left(c_j^{S}\left(B\right)\right)^{(1-\alpha)}\le\alpha r_{i_0}^{\bar{S}}\left(B\right)+\left(1-\alpha\right)c_j^{S}\left(B\right),$$

但这与式(6)相矛盾，因此矩阵 B 是非奇异的。

为了证明矩阵 B 为 H-矩阵，设 $\langle B\rangle=D_1-B_1$，其中 $D_1=diag\left\{\left|b_{11}\right|,\left|b_{22}\right|,\cdots,\left|b_{mm}\right|\right\}$，现只需证 $\rho\left(D_1^{-1}B_1\right)<1$。不妨设矩阵 $D_1^{-1}B_1$ 存在一个特征值 λ，满足 $|\lambda|\ge1$，那么矩阵 $D_1\left(\lambda I-D_1^{-1}B_1\right)=\lambda D_1-B_1$ 将满足式(6)，因此 B 为非奇异矩阵。但是这与 λ 是矩阵 $D_1^{-1}B_1$ 的一个特征值相矛盾。由 $\rho\left(D_1^{-1}B_1\right)<1$，可以得出

$$\langle B\rangle^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(D_1^{-1}B_1\right)^{k}D_1^{-1},$$

以上可证得对 $\forall i\in S$，矩阵 B 是非奇异 H-矩阵。

当 $\forall j\in\bar{S}$ 时，有

$$\left|b_{jj}\right|-r_j^{\bar{S}}\left(B\right)=d\left\|A_{jj}^{-1}\right\|^{-1}-dR_j^{\bar{S}}\left(A\right)>\alpha R_j^{S}+\left(1-\alpha\right)C_i^{\bar{S}}=\alpha r_j^{S}\left(B\right)+\left(1-\alpha\right)c_i^{\bar{S}}\left(B\right)\ge0.$$

同理可证得对 $\forall j\in\bar{S}$，矩阵 B 是非奇异 H-矩阵。

综上，$B=T\left(A\right)D$ 为广义 S-α_1 型对角占优矩阵，且为非奇异 H-矩阵，故存在一个正对角矩阵 $D'=diag\left\{d_1',d_2',\cdots,d_m'\right\}$，使得 BD' 为严格对角占优矩阵。

令 $I=diag\left\{I_{r_1},I_{r_2},\cdots,I_{r_m}\right\}$，$D''=DD'I=diag\left\{d_1d_1'I_{r_1},d_2d_2'I_{r_2},\cdots,d_md_m'I_{r_m}\right\}$，则 AD'' 为严格块对角占优矩阵，从而 $A\in BH$。

3.2. 定理 2

设 $A=\left(a_{ij}\right)\in M_n\left(C\right)$ 且分块如式(1)，若存在 $S,\bar{S}\subset M$，$S\cap\bar{S}=\varnothing$，$S\cup\bar{S}=M$。满足 $A\in S$-α_1-BSD，则矩阵 A 中所有特征值包含域可以用以下集合表示

$$G\left(A\right)=\bigcap_{0\le\alpha\le1}\bigcup_{i=1}^{m}\sigma\left(A_{ii}\right)\cup G_S\cup G_{\bar{S}}\cup G_M,$$

其中

$$G_S=\bigcup_{i\in S}\left\{z\in C\left|\left\|\left(A_{ii}-zI_{n_i}\right)^{-1}\right\|^{-1}\le R_i^{S}\left(A\right)\right.\right\},$$

$$G_{\bar{S}}=\bigcup_{j\in\bar{S}}\left\{z\in C\left|\left\|\left(A_{jj}-zI_{n_j}\right)^{-1}\right\|^{-1}\le R_j^{\bar{S}}\left(A\right)\right.\right\},$$

$$G_M=\bigcup_{i\in S,j\in\bar{S}}\left\{z\in C\left|\left[\left\|\left(A_{ii}-zI_{n_i}\right)^{-1}\right\|^{-1}-R_i^{S}\left(A\right)\right]\left[\left\|\left(A_{jj}-zI_{n_j}\right)^{-1}\right\|^{-1}-R_j^{\bar{S}}\left(A\right)\right]\right.\right.$$
$$\left.\le\left[\alpha R_i^{\bar{S}}+\left(1-\alpha\right)C_j^{S}\right]\left[\alpha R_j^{S}+\left(1-\alpha\right)C_i^{\bar{S}}\right]\right\}.$$

证明 假设 A 的特征值 $\lambda \notin G(A)$，则 $\forall i \in S$，$\forall j \in \bar{S}$，有

$$\left\|\left(A_{ii}-\lambda I_{n_i}\right)^{-1}\right\|^{-1} > R_i^S,$$

$$\left\|\left(A_{jj}-\lambda I_{n_j}\right)^{-1}\right\|^{-1} > R_j^{\bar{S}},$$

且有

$$\begin{aligned}&\left[\left\|\left(A_{ii}-\lambda I_{n_i}\right)^{-1}\right\|^{-1}-R_i^S\right]\left[\left\|\left(A_{jj}-\lambda I_{n_j}\right)^{-1}\right\|^{-1}-R_j^{\bar{S}}\right]\\&>\left[\alpha R_i^{\bar{S}}+(1-\alpha)C_j^S\right]\left[\alpha R_j^S+(1-\alpha)C_i^{\bar{S}}\right].\end{aligned}$$

由定理 1 知 $A-\lambda I_n \in BH$，又由文献[1]的引理 1 可知 $A-\lambda I_n$ 是非奇异的，即 λ 不是 A 的特征值，与假设矛盾。故定理 2 成立。

4. 数值算例

4.1. 算例 1

考虑矩阵 A

$$A=\begin{pmatrix}15 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 14 & -1 & 1 & 4 & 2 & -1 & 1 & 5 & 2\\ 1 & -1 & 20 & 5 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 7 & 19 & 4 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2\\ 5 & 1 & 1 & 2 & 25 & 3 & -1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 9 & 23 & 2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 1 & 4 & 3 & 17 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 2 & 19 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & -1 & 5 & 25 & 8\\ -1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 & 21\end{pmatrix}.$$

将矩阵 A 作如下分块，并得其范数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35}\\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45}\\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55}\end{pmatrix},\quad A'=\begin{pmatrix}\left\|A_{11}^{-1}\right\|^{-1} & \|A_{12}\| & \|A_{13}\| & \|A_{14}\| & \|A_{15}\|\\ \|A_{21}\| & \left\|A_{22}^{-1}\right\|^{-1} & \|A_{23}\| & \|A_{24}\| & \|A_{25}\|\\ \|A_{31}\| & \|A_{32}\| & \left\|A_{33}^{-1}\right\|^{-1} & \|A_{34}\| & \|A_{35}\|\\ \|A_{41}\| & \|A_{42}\| & \|A_{43}\| & \left\|A_{44}^{-1}\right\|^{-1} & \|A_{45}\|\\ \|A_{51}\| & \|A_{52}\| & \|A_{53}\| & \|A_{54}\| & \left\|A_{55}^{-1}\right\|^{-1}\end{pmatrix}.$$

即将矩阵 A 划分成每个子块均为 2×2 阶的分块矩阵。令 $f_i(T(A))=R_i^S+\alpha R_i^{\bar{S}}+(1-\alpha)C_j^S$，$i,j \in M=\{1,2,3,4,5\}$。令 $S=\{1,2,4\}$，$\bar{S}=\{3,5\}$，取范数为矩阵的 2-范数。

通过计算可以得

$$\sigma(A_{11})=\{16,13\},\ \sigma(A_{22})=\{25.4372,13.5628\},\ \sigma(A_{33})=\{29.2915,18.7085\},$$

$$\sigma(A_{44})=\{16.2679,19.7321\},\ \sigma(A_{55})=\{27.4721,18.5279\}.$$

$$\left\|A_{11}^{-1}\right\|^{-1}=12.9275,\ \left\|A_{12}\right\|=1.4142,\ \left\|A_{13}\right\|=4.7016,\ \left\|A_{14}\right\|=1.4142,\ \left\|A_{15}\right\|=6.2361;$$

$$\left\|A_{21}\right\|=1.4142,\ \left\|A_{22}^{-1}\right\|^{-1}=13.5048,\ \left\|A_{23}\right\|=4.1623,\ \left\|A_{24}\right\|=2.6180,\ \left\|A_{25}\right\|=3.6180;$$

$$\left\|A_{31}\right\|=5.3028,\ \left\|A_{32}\right\|=5.4650,\ \left\|A_{33}^{-1}\right\|^{-1}=15.9586,\ \left\|A_{34}\right\|=2.2361,\ \left\|A_{35}\right\|=1.4142;$$

$$\left\|A_{41}\right\|=2.3028,\ \left\|A_{42}\right\|=3.5616,\ \left\|A_{43}\right\|=5.7016,\ \left\|A_{44}^{-1}\right\|^{-1}=16.2042,\ \left\|A_{45}\right\|=5.3983;$$

$$\left\|A_{51}\right\|=3.6180,\ \left\|A_{52}\right\|=3.4142,\ \left\|A_{53}\right\|=3.8643,\ \left\|A_{54}\right\|=5.1098,\ \left\|A_{55}^{-1}\right\|^{-1}=17.8097.$$

由此可得，矩阵 A 满足引理 2，且在 $[0.3,1]$ 的区间内任取一个 α 都满足定理 1 为非奇异块 H-矩阵。通过引理 4 与定理 2 分别计算其特征值包含域可得：

当 $\alpha=1$ 时，矩阵 A 同时满足引理 2 和定理 1，通过引理 4 和定理 2 可求得

$$\begin{aligned}
G^{(3)}&=\bigcup_{i=1}^{m}\sigma(A_{ii})\cup G_S\cup G_{\bar S}\cup G_{S\bar S}\\
&=\bigcup_{i=1}^{5}\sigma(A_{ii})\cup\left\{\bigcup_{i=1,2,4}\left\{z\in C\left|\left\|(A_{ii}-zI_{n_i})^{-1}\right\|^{-1}\le R_i^S\right.\right\}\right\}\cup\left\{\bigcup_{j=3,5}\left\{z\in C\left|\left\|(A_{jj}-zI_{n_j})^{-1}\right\|^{-1}\le R_j^{\bar S}\right.\right\}\right\}\\
&\quad\cup\left\{\bigcup_{\substack{i=1,2,4;\\ j=3,5}}\left\{z\in C\left|\left[\left\|(A_{ii}-zI_{n_i})^{-1}\right\|^{-1}-R_i^S\right]\left[\left\|(A_{jj}-zI_{n_j})^{-1}\right\|^{-1}-R_j^{\bar S}\right]\le R_i^{\bar S}R_j^S\right.\right\}\right\}\\
&=\bigcup_{i=1}^{5}\sigma(A_{ii})\cup\left\{\bigcup_{i=1,2,4}\left\{z\in C\left|\left\|(A_{ii}-zI_{n_i})^{-1}\right\|^{-1}\le 5.8644\right.\right\}\right\}\cup\left\{\bigcup_{j=3,5}\left\{z\in C\left|\left\|(A_{jj}-zI_{n_j})^{-1}\right\|^{-1}\le 3.8643\right.\right\}\right\}\\
&\quad\cup\left\{\bigcup_{\substack{i=1,2,4;\\ j=3,5}}\left\{z\in C\left|\left[\left\|(A_{ii}-zI_{n_i})^{-1}\right\|^{-1}-R_i^S\right]\left[\left\|(A_{jj}-zI_{n_j})^{-1}\right\|^{-1}-R_j^{\bar S}\right]\le 144.3420\right.\right\}\right\},
\end{aligned}$$

为引理 4 中的结果，而对于定理 2，当 $\alpha=1$ 时，可求得其与引理 4 中结果相同，即有

$$G'=\bigcup_{i=1}^{m}\sigma(A_{ii})\cup G_S\cup G_{\bar S}\cup G_M=G^{(3)}.$$

当 $\alpha=0.3$ 时，矩阵 A 仅满足定理 1，故结合定理 2 有

$$\begin{aligned}
G''&=\bigcup_{i=1}^{m}\sigma(A_{ii})\cup G_S\cup G_{\bar S}\cup G_{S\bar S}\\
&=\bigcup_{i=1}^{5}\sigma(A_{ii})\cup\left\{\bigcup_{i=1,2,4}\left\{z\in C\left|\left\|(A_{ii}-zI_{n_i})^{-1}\right\|^{-1}\le 5.8644\right.\right\}\right\}\cup\left\{\bigcup_{j=3,5}\left\{z\in C\left|\left\|(A_{jj}-zI_{n_j})^{-1}\right\|^{-1}\le 3.8643\right.\right\}\right\}\\
&\quad\cup\left\{\bigcup_{\substack{i=1,2,4;\\ j=3,5}}\left\{z\in C\left|\left[\left\|(A_{ii}-zI_{n_i})^{-1}\right\|^{-1}-R_i^S\right]\left[\left\|(A_{jj}-zI_{n_j})^{-1}\right\|^{-1}-R_j^{\bar S}\right]\le 138.0049\right.\right\}\right\}.
\end{aligned}$$

当 $\alpha=0$ 时，矩阵 A 对引理 2 和定理 1 均不成立，故不考虑。

$$G(A)=\bigcap_{0\le\alpha\le1}\bigcup_{i=1}^{m}\sigma(A_{ii})\cup G_S\cup G_{\bar{S}}\cup G_M,$$

即在可考虑的 α 的范围内，取交集。故有

$$G(A)\subset G''\subset G'=G^{(3)}.$$

4.2. 算例 2

考虑矩阵 A

$$A=\begin{pmatrix} I & O & O & 0.02E & O & 0.05E\\ O & I & 0.03E & O & 0.01E & 0.02E\\ O & 0.01E & I & O & 0.06E & O\\ 0.02E & O & O & I & 0.04E & O\\ 0.02E & O & 0.05E & 0.01E & 4.3I & O\\ O & 0.03E & 0.01E & 0.02E & O & 4.3I \end{pmatrix}_{120\times120},$$

$$I=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}_{20\times20},\quad E=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}_{20\times20},\quad O=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}_{20\times20}.$$

将矩阵 A 再作如下分块，并得其范数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{pmatrix},\quad A'=\begin{pmatrix}\|A_{11}^{-1}\|^{-1}&\|A_{12}\|&\|A_{13}\|\\\|A_{21}\|&\|A_{22}^{-1}\|^{-1}&\|A_{23}\|\\\|A_{31}\|&\|A_{32}\|&\|A_{33}^{-1}\|^{-1}\end{pmatrix}.$$

即将矩阵 A 划分成每个子块均为 40×40 阶的分块矩阵。令 $f_i(T(A))=R_i^S+\alpha R_i^{\bar{S}}+(1-\alpha)C_j^S$，$i,j\in M=\{1,2,3\}$。令 $S=\{1,2\}$，$\bar{S}=\{3\}$，取范数为矩阵的 2-范数。

通过计算可以得出

$$\sigma(A_{11})=\{1\},\ \sigma(A_{22})=\{1\},\ \sigma(A_{33})=\{4.3\}.$$

$$\|A_{11}\|^{-1}=1,\ \|A_{12}\|=0.6,\ \|A_{13}\|=1.0797;$$

$$\|A_{21}\|=0.4,\ \|A_{22}^{-1}\|^{-1}=1,\ \|A_{23}\|=1.2806;$$

$$\|A_{31}\|=0.6,\ \|A_{32}\|=1.0606,\ \|A_{33}^{-1}\|^{-1}=4.3.$$

当 $i=1$，$j=3$ 时，有 $\forall\alpha\in[0,0.2]$ 使得

$$\begin{aligned}&(1-0.6)(4.3)\\&>[\alpha1.0797+(1-\alpha)(1.0797+1.2806)][\alpha(0.6+1.0606)+(1-\alpha)0.6].\end{aligned}$$

当 $i=2$，$j=3$ 时，有 $\forall\alpha\in[0,1]$ 使得

$$\begin{aligned}&(1-0.4)(4.3)\\&>[\alpha1.2806+(1-\alpha)(1.0797+1.2806)][\alpha(0.6+1.0606)+(1-\alpha)1.0606].\end{aligned}$$

可得当 α 取 $[0,0.2]$ 之间的数时，才能使以上不等式全部成立。取 $\alpha=0.2$，由定理 1 中式(5)可得 $D=diag\{1,1,0.2790\}$，再令 $D'=diag\{0.73,0.69,1\}$。

此时 $D''=diag\{0.73I_{40},0.69I_{40},0.2790I_{40}\}$，其中 I_{40} 为 40×40 阶单位矩阵。经计算范数矩阵 $A'DD'$

$$A'DD'=\begin{pmatrix}0.7300 & 0.4140 & 0.3012\\ 0.2920 & 0.6900 & 0.3573\\ 0.4380 & 0.7318 & 1.1997\end{pmatrix},$$

为严格块对角占优矩阵，故 $A\in BH$。

综上，在判定矩阵 A 是否为非奇异块 H-矩阵时，由 α 的可取范围为 $[0,0.2]$，取不到 $\alpha=1$，故引理 3 的条件无法判定，即文献[2]的结果无法判定，而由定理 1 可以直接判定矩阵 A 为非奇异块 H-矩阵。

同时，矩阵 AD''：

$$AD''=\begin{pmatrix}0.7I & O & O & 0.138E & O & 0.014E\\ O & 0.7I & 0.0207E & O & 0.0028E & 0.0056E\\ O & 0.007E & 0.69I & O & 0.0167E & O\\ 0.014E & O & O & 0.69I & 0.0112E & O\\ 0.014E & O & 0.0345E & 0.069E & 1.1997I & O\\ O & 0.021E & 0.069E & 0.0138E & O & 1.1997I\end{pmatrix},$$

为对角占优矩阵。

5. 总结

本文证明了严格 S-α_1 型块对角占优矩阵为非奇异块 H-矩阵并提供了一种新的判定方法，并通过数值算例验证了结果的优越性。从数值算例 1 中可以看出与其等价的特征值包含域包含于文献[2]中给出的特征值包含域，从数值算例 2 可以看出其判定范围相比于文献[2]中的结果是更加广泛的。因此，本文结果在 S 类的块 H-矩阵中可判定范围更加广泛，特征值包含域也更加精确，其部分线性可加模型，拓展了研究的思路。

致　谢

感谢庹清老师对本项目的悉心指导和帮助，在此对老师表示由衷的感谢！

基金项目

国家自然科学基金项目(11461027)；湖南省研究生科研创新项目(CX20231071)。

参考文献

[1] Feingold, D. and Varga, R. (1962) Block Diagonally Dominant Matrices and Generalizations of the Gerschgorin Circle Theorem. *Pacific Journal of Mathematics*, **12**, 1241-1250. https://doi.org/10.2140/pjm.1962.12.1241

[2] Liu, J.Z. and Huang, Z.J. (2008) A Note on “Block H-Matrices and Spectrum of Block Matrices”. *Applied Mathematics and Mechanics*, **29**, 953-960. https://doi.org/10.1007/s10483-008-0714-y

[3] 黄廷祝, 黎稳. 块 H-矩阵与块矩阵的谱[J]. 应用数学和力学, 2002, 23(2): 217-220.

[4] Robert, F. (1969) Blocs-H-matrices et convergence des methodes iteratives classiques par blocs. *Linear Algebra and Its Applications*, **2**, 223-265. https://doi.org/10.1016/0024-3795(69)90029-9

[5] Carlson, D.H. and Varga, R.S. (1973) Minimal G-Functions. *Linear Algebra and Its Applications*, **6**, 97-117. https://doi.org/10.1016/0024-3795(73)90009-8

[6] Cvetkovic, L. (2006) H-Matrix Theory vs. Eigenvalue Localization. *Numerical Algorithms*, **42**, 229-245.

https://doi.org/10.1007/s11075-006-9029-3

[7] 黄廷祝, 游兆永. 矩阵的 G-分块对角占优性[J]. 工程数学学报, 1993, 10(3): 75-80.

[8] Sun, Y. (1997) Sufficient Conditions for Generalized Diagonally Dominant Matrices. *Numerical Mathematies*: *A Journal of Chinese Universities*, **19**, 216-223.

[9] 黄廷祝, 白中治, 游兆永. 块对角占优性的推广与特征值分布[J]. 应用数学学报, 1998(2): 277-281.

[10] 贾明辉. 块 α-对角占优矩阵与非奇异块 H-矩阵的判定条件研究[J]. 长江大学学报(自然科学版), 2014, 11(2): 6-7.

[11] 高会双. 块 H-矩阵的判定和应用[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2015, 32(2): 99-103.

[12] Gao, H.S., Han, G.C., Sun, Y.H., Sun, F. and Ren, Y. (2020) Block H-Matrices and Spectrum of Block Matrices. *Journal of Physics*: *Conference Series*, **1575**, Article ID: 012114. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1575/1/012114

[13] 高会双, 韩贵春, 肖丽霞. 块 α-对角占优矩阵的讨论[J]. 纯粹数学与应用数学, 2014(1): 53-59.

[14] 孙德淑, 徐玉梅. 块严格 α-双对角占优矩阵的等价表征及应用[J]. 湖北民族学院学报(自然科学版), 2019, 37(1): 70-73.

[15] 齐雅茹, 寇虹, 孔艺慧. 分块矩阵特征值估计的 Ostrowski-Brauer 定理[J]. 内蒙古工业大学学报(自然科学版), 2023, 42(3): 200-205.