Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2023, 12(10), 4177-4182
Published Online October 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2023.1210410

Hans汉斯

随机环境中两性分枝过程的偏差不等式

高梦娇*，李　瑞，邓　琳

长沙理工大学数学与统计学院，湖南　长沙

收稿日期：2023年9月11日；录用日期：2023年10月4日；发布日期：2023年10月11日

摘　要

考虑到自然界中种群繁衍法则，引入雌雄配对机制，从而将随机环境中分枝过程推广到随机环境中两性分枝过程。令 $\{Z_n, n \geq 0\}$ 为独立同分布环境 $\xi = (\xi_n)_{n\geq 0}$ 中的一个上临界两性分枝过程，本文给出 $\log \frac{Z_{n_0+n}}{Z_{n_0}}$ 在Bernstein条件下的一个偏差不等式。

关键词

两性分枝过程，随机环境，Bernstein条件，偏差不等式

Deviation Inequalitie for a Supercritical Bisexual Branching Process in a Random Environment

Mengjiao Gao*, Rui Li, Lin Deng

College of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: Sep. 11th, 2023; accepted: Oct. 4th, 2023; published: Oct. 11th, 2023

Abstract

We consider the law of population reproduction in nature and introduce the male-female pairing mechanism, so as to generalize the branching process in a random environment (BPRE) to the bisexual branching process in a random environment (BBPRE). Set $\{Z_n, n \geq 0\}$ is a supercritical bisexual branching process in a independent and identically distributed (i.i.d.) random environment

*通讯作者。

文章引用：高梦娇，李瑞，邓琳．随机环境中两性分枝过程的偏差不等式[J]．应用数学进展, 2023, 12(10): 4177-4182.
DOI: 10.12677/aam.2023.1210410

$\xi=(\xi_n)_{n\geq 0}$, **and we will give a deviation inequalitie for** $\log\frac{Z_{n_0+n}}{Z_{n_0}}$ **under Bernstein condition.**

Keywords

Bisexual Branching Processes, Random Environment, Bernstein Condition, Deviation Inequalitie

1. 引言

分枝过程是一种常用的随机过程，用于描述个体的繁殖和扩散过程，而雌雄配对是自然界中生物繁殖的基本机制之一。因此，将这两个概念结合起来，引入两性分枝过程来研究生物群体的繁殖过程是非常自然的。对于两性分枝过程的研究是从 1968 年 Daley [1]首次引入其概念开始的，相对于传统的分枝过程，两性分枝过程更加符合生物繁殖的真实情况。1986 年 Daley [2]讨论了几类特殊的配对函数解决了两性分枝过程的分类问题，并对两类特殊的配对函数 $L(x,y)=x\min(1,y)$ 和 $L(x,y)=\min(x,y)$ 给出必然灭绝的条件。在此之后，越来越多的学者开始关注到两性分枝过程这一领域。1997 年 Molina [3] [4]研究了两性分枝过程的规范化后的极限性质，包括雌性和雄性规范化序列的极限问题。1998 年 Molina 等人[5] [6] [7]研究了两性分枝过程的收敛问题。在 2006 年 Ma [8]首次提出了随环境中两性分枝过程这一概念，并讨论了其几乎必然灭绝的充要条件；2008 年 Ma [9]将随机环境弱化，在平稳遍历环境中讨论了其必然灭绝问题。在解决了随机环境中两性分枝过程的必然灭绝问题后，学者们开始研究随机环境中两性分枝过程的一些其他性质。2010 年李应求等[10]在此基础上给出了随机环境中两性分枝过程和马氏链的关系；2020 年李应求、肖胜等[11]给出了规范化后的种群数量 $L^{\alpha}-(\alpha>1)$ 收敛的充要条件。

偏差不等式在许多数学和统计学领域中都有应用。在随机环境中的两性分枝过程中，我们可以使用偏差不等式来描述繁殖过程中可能存在的误差。在本文中，我们考虑了 Bernstein 条件下的偏差不等式。这个条件指的是一个随机变量的范围被有限地限制住，并且它的期望值和方差可以估计出来。在这种情况下，我们可以使用 Bernstein 条件下的偏差不等式来估计随机变量与其期望值之间的偏差程度。

2. 模型描述

令 $\xi=(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\cdots)$ 为独立同分布的环境序列。假设每个定义在 $\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$ 上的 ξ_n 对应一个概率分布 $p(\xi_n)=\{p_i(\xi_n):i\in\mathbb{N}\}$，其中

$$p_i(\xi_n)\geq 0,\ \sum_i p_i(\xi_n)=1 \text{ 及 } \sum_i ip_i(\xi_n)\in(0,\infty).$$

随机环境中两性分枝过程(Z_n)可以通过下列关系来定义：

$$Z_0=1,\left(F_{n+1},M_{n+1}\right)=\sum_{i=1}^{Z_n}\left(f_{ni},m_{ni}\right),Z_{n+1}=L\left(F_{n+1},M_{n+1}\right),n\in\mathbb{N}, \tag{1}$$

给定环境 ξ，$(f_{ni},m_{ni})(n\geq 0,i\geq 1)$ 是独立同分布的随机向量；$p(\xi_n)$ 是每一个 $f_{ni}+m_{ni}$ 的分布。定义

中的(f_{ni}, m_{ni})表示第 n 代的第 i 个配对单元产生的雌性和雄性后代个体数；(F_n, M_n)表示第 n 代所有的雌性和雄性个体数。

记 r_k 为配对单元的均值增长率，有：

$$r_k(\xi_n) = k^{-1} E_{\xi}(Z_{n+1} \mid Z_n = k), k \ge 1, n \ge 0, \tag{2}$$

$$r_1(\xi_n) = \inf_{k>0} r_k(\xi_n), r(\xi_n) := \lim_{k\to\infty} r_k(\xi_n) = \sup_{k>0} r_k(\xi_n),\ n \ge 0. \tag{3}$$

令 $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}(\xi) = \sigma(\xi)$， $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n(\xi) = \sigma(\xi; f_{ki}, m_{ki}, 0 \le k \le n-1, i = 1, 2, \cdots), n \ge 1$，因此 Z_n 是 $\mathcal{F}_n$ 可测的。对 $n \ge 0$，设

$$I_n = \prod_{i=0}^{n-1} r_1(\xi_i),\ S_n = \prod_{i=0}^{n-1} r(\xi_i),\ \bar{W}_n = \frac{Z_n}{I_n},\ \hat{W}_n = \frac{Z_n}{S_n},$$

约定 $\prod_{i=0}^{-1} = 1$。标准化种群数量($\bar{W}_n$)是一个非负下鞅，如果有

$$\prod_{k=0}^{\infty} E\left[r_1^{-1}(\xi_k) r(\xi_k)\right] < \infty, \tag{4}$$

那么我们就有 $\sup_{n\ge0} E\bar{W}_n < \infty$ ([12]定理 4.2)。因此我们总是假设(4)式成立。

在本文中我们考虑 $\mu := E\log r_1(\xi_0) > 0$，这代表分枝过程($Z_n$)会以一个正的概率存活下来。

3. 基本结果及证明

为方便起见，我们记

$$Z_{n_0,n} := \frac{\log\left(\frac{Z_{n_0+n}}{Z_{n_0}}\right) - n\mu}{\sigma\sqrt{n}},\ n_0, n \in \mathbb{N}.$$

本节主要讨论 $Z_{n_0,n}$ 在 Bernstein 条件下的偏差不等式。

由 $\bar{W}_n = \frac{Z_n}{I_n}$ 可得到分解式

$$\log Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i + \log \bar{W}_n,$$

其中 $X_i = \log r_1(\xi_{i-1})(i \ge 1)$。 X_i 为独立同分布的随机变量序列且只依赖于环境。反过来， $\log Z_n$ 的渐进性为会受到随机游动 $Q_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = \log I_n, n \in \mathbb{N}$ 的影响。因此，我们记

$$\eta_{n,i} = \frac{X_i - \mu}{\sigma\sqrt{n}}, i = 1, \cdots, n_0 + n,\quad \bar{W}_{n_0,n} = \frac{\bar{W}_{n_0+n}}{\bar{W}_{n_0}} \text{ 和 } \hat{W}_{n_0,n} = \frac{\hat{W}_{n_0+n}}{\hat{W}_{n_0}}.$$

可以得到 $E\eta_{n,i} = 0$， $Var\left(\sum_{i=1}^{n} \eta_{n,n_0+i}\right) = \sum_{i=1}^{n} E\eta_{n,n_0+i}^2 = 1$。基于以上定义，我们有

$$Z_{n_0,n} = \frac{\sum_{i=n_0+1}^{n_0+n} X_i + \log \bar{W}_{n_0,n} - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \sum_{i=1}^{n} \eta_{n,n_0+i} + \frac{\log \bar{W}_{n_0,n}}{\sigma\sqrt{n}}. \tag{5}$$

为得到定理 1，我们给出下面两个引理。

引理 1：([13]定理 1.1)令 X_i 为一列随机变量序列，$S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$，$EX_j=0$，$EX_j^2<\infty$，$\sigma_n^2=\sum_{j=1}^{n}EX_j^2$，进一步假设 $EX_j^k\le\frac{k!}{2}EX_j^2H^{k-2}$，$k>2$，$H>0$，$0<c<\infty$。则对所有的 $x>0$ 有

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\ge x\right)\le\exp\left\{-\frac{x^2}{2\left(\sigma_n^2+Hx\right)}\right\}.$$

引理 2：如果(4)式成立，则 $\sup_{n\ge0}E\bar{W}_{n_0,n}<\infty$.

证明：由(2)和(3)可知

$$\begin{aligned}E_\xi\left(\hat{W}_{n_0,n+1}\mid\mathcal{F}_{n_0+n}\right)&=E_\xi\left(\frac{Z_{n_0+n+1}}{S_{n_0+n+1}\hat{W}_{n_0}}\mid\mathcal{F}_{n_0+n}\right)=\frac{1}{S_{n_0+n+1}\hat{W}_{n_0}}r_{Z_{n_0+n}}\left(\xi_{n_0+n}\right)Z_{n_0+n}\\&\le\frac{1}{S_{n_0+n+1}\hat{W}_{n_0}}r\left(\xi_{n_0+n}\right)Z_{n_0+n}=\frac{Z_{n_0+n}}{S_{n_0+n}\hat{W}_{n_0}}=\hat{W}_{n_0,n}.\end{aligned}\tag{6}$$

对(6)式两边取条件期望有 $E_\xi\left(\hat{W}_{n_0,n}\right)\le E_\xi\left(\hat{W}_{n_0,0}\right)=1$ 几乎必然成立，则 $E\left(\hat{W}_{n_0,n}\right)\le1$，通过计算可得

$$E_\xi\left(\bar{W}_{n_0,n}\right)=E_\xi\left(\frac{Z_{n_0+n}}{S_{n_0+n}}\frac{S_{n_0+n}}{I_{n_0+n}}\frac{S_{n_0}}{Z_{n_0}}\frac{I_{n_0}}{S_{n_0}}\right)\le E_\xi\left(\frac{\hat{W}_{n_0+n}}{\hat{W}_{n_0}}\frac{S_{n_0+n}}{I_{n_0+n}}\right)=\frac{S_{n_0+n}}{I_{n_0+n}}E_\xi\left(\hat{W}_{n_0,n}\right)\le\frac{S_{n_0+n}}{I_{n_0+n}}.\tag{7}$$

因为 ξ 是独立的，对(7)式两边取期望，我们有

$$E\left(\bar{W}_{n_0,n}\right)\le E\left(\prod_{i=0}^{n_0+n-1}\frac{r\left(\xi_i\right)}{r_1\left(\xi_i\right)}\right)=\prod_{i=0}^{n_0+n-1}E\frac{r\left(\xi_i\right)}{r_1\left(\xi_i\right)}\le\prod_{i=0}^{\infty}E\frac{r\left(\xi_i\right)}{r_1\left(\xi_i\right)}.$$

在假设(4)的条件下我们就有 $\sup_{n\ge0}E\bar{W}_{n_0,n}<\infty$ 成立。

定理 1：假设存在一个常数 $H>0$，使得对所有的 $k\ge2$ 有

$$E\left(X-\mu\right)^k\le\frac{1}{2}k!H^{k-2}E\left(X-\mu\right)^2,$$

则对任意 $x>0$ 有

$$P\left(Z_{n_0,n}\ge x\right)\le C\exp\left\{-\frac{x^2}{2\left(1+6\left(1+H\right)\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}\right)}\right\}.$$

证明：我们先对 $0\le x<\frac{\sigma\sqrt{n}}{2}$ 进行讨论。由(5)知，对所有的 $x\ge0$ 有

$$P\left(Z_{n_0,n}\ge x\right)=P\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_{n,n_0+i}+\frac{\log\bar{W}_{n_0,n}}{\sigma\sqrt{n}}\ge x\right)\le I_1+I_2,\tag{8}$$

其中

$$I_1=P\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_{n,n_0+i}\ge x-\frac{x^2}{\sigma\sqrt{n}}\right),\quad I_2=P\left(\frac{\log\bar{W}_{n_0,n}}{\sigma\sqrt{n}}\ge\frac{x^2}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

因为 $E\left(\sum_{i=n_0+1}^{n_0+n} X_i - n\mu\right)^k \le \frac{1}{2}k!H^{k-2}E\left(\sum_{i=n_0+1}^{n_0+n} X_i - n\mu\right)^2$，即

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_{n,n_0+i}\right)^k \le \frac{1}{2}k!\left(\frac{H}{\sigma\sqrt{n}}\right)^{k-2} E\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_{n,n_0+i}\right)^2,$$

由引理 1 及 $Var\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_{n,n_0+i}\right)=1$ 有

$$I_1 = P\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_{n,n_0+i} \ge \left(x-\frac{x^2}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right) \le \exp\left\{-\frac{x^2\left(1-\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2}{2\left(1+\frac{H}{\sigma\sqrt{n}}x\left(1-\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)}\right\} \le \exp\left\{-\frac{x^2}{2\left(1+6(1+H)\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}\right)}\right\}. \quad (9)$$

由马尔可夫不等式及引理 2，对 $0 \le x < \frac{\sigma\sqrt{n}}{2}$，我们有

$$I_2 = P\left(\bar{W}_{n_0,n} \ge \exp\left\{x^2\right\}\right) \le \exp\left\{-x^2\right\}E\bar{W}_{n_0,n} \le C\exp\left\{-x^2\right\} \le C\exp\left\{-\frac{x^2}{2\left(1+6(1+H)\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}\right)}\right\}. \quad (10)$$

将(8)、(9)、(10)合起来我们可以得到对 $0 \le x < \frac{\sigma\sqrt{n}}{2}$，有

$$P\left(Z_{n_0,n} \ge x\right) \le C\exp\left\{-\frac{x^2}{2\left(1+6(1+H)\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}\right)}\right\}.$$

当 $x \ge \frac{\sigma\sqrt{n}}{2}$ 时，有

$$P\left(Z_{n_0,n} \ge x\right) \le I_3 + I_4,$$

其中

$$I_3 = P\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_{n,n_0+i} \ge \frac{x}{2}\right),\ I_4 = P\left(\frac{\log\bar{W}_{n_0,n}}{\sigma\sqrt{n}} \ge \frac{x}{2}\right).$$

再由引理 1，对所有 $x \ge \frac{\sigma\sqrt{n}}{2}$ 我们有

$$I_3 \le \exp\left\{-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2\left(1+\frac{H}{\sigma\sqrt{n}}\frac{x}{2}\right)}\right\} \le \exp\left\{-\frac{x^2}{2\left(1+6(1+H)\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}\right)}\right\}.$$

由马尔可夫不等式及引理 2，对 $x \ge \frac{\sigma\sqrt{n}}{2}$，我们有

$$I_4 = P\left(W_{n_0,n} \ge \exp\left\{\frac{x\sigma\sqrt{n}}{2}\right\}\right) \le \exp\left\{-\frac{x\sigma\sqrt{n}}{2}\right\} EW_{n_0,n}$$

$$\le C\exp\left\{-\frac{x\sigma\sqrt{n}}{2}\right\} \le C\exp\left\{-\frac{x^2}{2\left(1+6(1+H)\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}\right)}\right\}.$$

因此对于 $x \ge \frac{\sigma\sqrt{n}}{2}$，有

$$P\left(Z_{n_0,n} \ge x\right) \le C\exp\left\{-\frac{x^2}{2\left(1+6(1+H)\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}\right)}\right\}.$$

这就完成了定理 1 的证明。

基金项目

国家自然科学基金面上项目“随机矩阵乘积与随机环境中多型分枝过程”(12271062)。

参考文献

[1] Daley, D.J. (1968) Extinction Conditions for Certain Bisexual Galton-Watson Branching Processes. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, **9**, 315-322. https://doi.org/10.1007/BF00531755

[2] Daley, D.J., Hull, D.M. and Taylor, J.M. (1986) Bisexual Galton-Watson Branching Processes with Superadditive Mating Functions. *Journal of Applied Probability*, **23**, 585-600. https://doi.org/10.2307/3213999

[3] González, M. and Molina, M. (1997) Some Theoretical Results on the Progeny of a Bisexual Galton-Watson Branching Process. *Serdica Mathematical Journal*, **23**, 15-24.

[4] González, M. and Molina, M. (1997) On the Partial and Total Progeny of a Bisexual Galton-Watson Branching Process. *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, **13**, 225-232. https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-0747(199709/12)13:3/4<225::AID-ASM316>3.0.CO;2-9

[5] González, M. and Molina, M. (1996) On the Limit Behaviour of a Superadditive Bisexual Galton-Watson Branching Process. *Journal of Applied Probability*, **33**, 960-967. https://doi.org/10.2307/3214977

[6] González, M. and Molina, M. (1998) A Note on the L1-Convergence of a Superadditive Bisexual Galton-Watson Process. *Extracta Mathematicae*, **13**, 69-72.

[7] González, M. and Molina, M. (1997) On the L2-Convergence of a Superadditive Bisexual Galton-Watson Branching Process. *Journal of Applied Probability*, **34**, 575-582. https://doi.org/10.2307/3215085

[8] Ma, S. (2006) Bisexual Galton-Watson Branching Processes in Random Environments. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, **22**, 419-428. https://doi.org/10.1007/s10255-006-0317-4

[9] 马世霞. 随机环境中的两性 Galton-Watson 分枝过程[J]. 河北工业大学学报, 2008, 37(1): 68-72.

[10] 李应求, 胡杨利, 张影. 随机环境中两性分枝过程的马氏性与灭绝[J]. 应用数学学报, 2010, 33(3): 490-499.

[11] 李应求, 肖胜, 彭朝晖. 随机环境中两性分枝过程的矩收敛准则[J]. 应用数学学报, 2020, 43(4): 639-653.

[12] 李应求, 胡杨利, 张影. 随机环境中两性分枝过程的极限性质[J]. 中国科学(数学), 2015(5): 611-622.

[13] de la Pena, V.H. (1997) A General Class of Exponential Inequalities for Martingales and Ratios. *The Annals of Probability*, **27**, 537-564. https://doi.org/10.1214/aop/1022677271