

N股Montesinos纽结的着色Jones多项式

马郡梓, 冷旭东*, 班子涵

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2023年12月10日; 录用日期: 2024年1月5日; 发布日期: 2024年1月12日

摘要

本文运用纽结三价图计算了当 $n \geq 4$ 时, n 股Montesinos纽结的着色Jones多项式。算法的关键是构造从 θ 图到 n 股Montesinos纽结的三价图变换过程, 该算法与 $n = 3$ 的情况有着本质不同。

关键词

着色Jones多项式, 纽结三价图, Montesinos纽结

The Colored Jones Polynomial of N-String Montesinos Knots

Junzi Ma, Xudong Leng*, Zihan Ban

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Dec. 10th, 2023; accepted: Jan. 5th, 2024; published: Jan. 12th, 2024

Abstract

In this paper we calculate the colored Jones polynomial of n -string Montesinos knots for $n \geq 4$ using knotted trivalent graphs. The key point of the algorithm is to construct the operations from a θ graph to a Montesinos knot, and the algorithm has essential difference with the case $n = 3$.

Keywords

Colored Jones Polynomial, Knotted Trivalent Graph, Montesinos Knot

*通讯作者。

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

纽结可看作 S^1 在 E^3 中的嵌入, 它的分类问题是三维流形中的重要课题, 而多项式不变量在这其中发挥了重要作用。1984 年, V. Jones [1] 在算子代数的研究中意外发现了著名的 Jones 多项式, 作为它的推广, 着色 Jones 多项式 (colored Jones polynomial) 在 1986 年 E. Witten [2] 运用拓扑量子场论率先发现, 后由 N. Reshetikhin 等人 [3] 给出其数学上严格的定义: 一般地, 对任一半单复李代数 g , 对其泛包络代数进行形变从而得到对应的量子群, 它上面存在一种特殊的 Hopf 代数结构使得人们能够通过表示论构造相应的纽结不变量。当 $g = sl_2$, 取 N 维表示时, 对应着色 Jones 多项式。这种由量子群构造不变量的方法具有重要理论意义, 但其具体计算往往复杂。对于着色 Jones 多项式, R. van der Veen 等人 [4] 率先采用纽结三价图 (knotted trivalent graph, 下文简称 KTG) 针对三股排叉结的情形进行了计算, 其算法大意如下: 着色 Jones 多项式可以推广到 KTG 上, 而纽结可看作是一种特殊的 KTG, 且任一 KTG 可由 θ 图经过三种基本变换得到, 所以只要利用着色 Jones 多项式在这三种 KTG 变换下的变换公式, 就能得到相应纽结的着色 Jones 多项式。本文的目的就是运用这种方法得到 n 股 Montesinos 纽结 ($n \geq 4$) 的着色 Jones 多项式, 而该算法的核心部分与 $n = 3$ 的情况 [5] 有着本质不同, 并不能看作后者的简单推广。

2. 预备知识

定义 2.1

1) 一个标价图是一个一维单纯复形 γ 连同其嵌入 $\gamma \rightarrow \Sigma$, 其中 Σ 是一个带边曲面, 且此嵌入的像是 Σ 的脊 (spine)。

2) 一个纽结三价图 (KTG) 是一个嵌入在 \mathbb{R}^3 里的三价标架图 (作为曲面)。

3) 设 Γ 是一个纽结三价图, $E(\Gamma)$ 是它的所有边组成的集合, V 是它所有顶点组成的集合。一个 Γ 的允许着色是一个映射 $\sigma: E(\Gamma) \rightarrow \mathbb{N}$, 其中 $\forall v \in V$, 其中 a_v, b_v, c_v 是顶点 v 相邻的三个着色满足如下两个条件:

① $a_v + b_v + c_v$ 是偶数。

② $a_v + b_v \geq c_v, b_v + c_v \geq a_v, c_v + a_v \geq b_v$ (三角不等式)。

纽结三价图的特点在于其上存在一些有用的变换。这里我们主要用到如下三种变换: 扭转 $F e_{\pm}$, 分裂 U^e 和三角变换 A^{ω} , 如图 1, 在边 e 上进行扭转 F 和分裂 U , 在顶点 ω 上进行三角形变换 A^{ω} 。

引理 2.1 [6] 任意一个纽结三价图都可以由 θ 图通过反复运用扭转, 分裂和三角变换而得到。

由此, 我们一旦定义了 θ 图的着色 Jones 多项式, 并且能描述它如何随着以上三个变换而变换, 那我们就能定义任意一个纽结三价图的着色 Jones 多项式。

定义 2.2 [4] 一个带有允许着色 σ 的纽结三价图 Γ 的着色 Jones 多项式 $\langle \Gamma, \sigma \rangle$ 是由如下关于 θ 图和 KTG 变换的公式定义的。

$$\langle \theta; a, b, c \rangle = o^{\frac{a+b+c}{2}} \begin{bmatrix} \frac{a+b+c}{2} \\ -\frac{a+b+c}{2} & \frac{a-b+c}{2} & \frac{a+b-c}{2} \end{bmatrix},$$

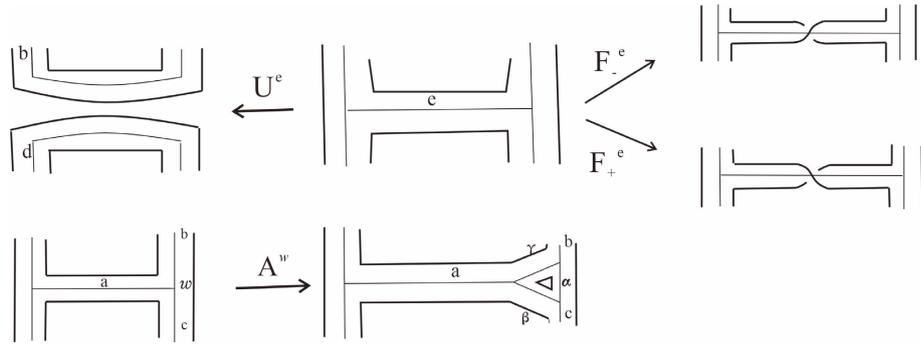


Figure 1. Operations on KTGs
图 1. 纽结三价图上的三种变换

$$\langle F_\pm^e(\Gamma), \sigma \rangle = f(\sigma(e))^{\pm 1} \langle \Gamma, \sigma \rangle,$$

$$\langle U^e(\Gamma), \sigma \rangle = \sum_{\sigma(e)} \frac{O^{\sigma(e)}}{\langle \theta; \sigma(e), \sigma(b), \sigma(d) \rangle} \langle \Gamma, \sigma \rangle,$$

$$\langle A^\nu(\Gamma), \sigma \rangle = \langle \Gamma, \sigma \rangle \Delta(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma).$$

其中对称多项式系数定义如下:

$$\begin{bmatrix} a_1 + a_2 + \dots + a_r \\ a_1, a_2, \dots, a_r \end{bmatrix} = \frac{[a_1 + a_2 + \dots + a_r]!}{[a_1]! \dots [a_r]!},$$

量子整数定义为

$$[k] = \frac{v^{2k} - v^{-2k}}{v^2 - v^{-2}}, [k]! = [k][k-1] \dots [1].$$

k -着色的平凡结的 Jones 多项式定义如下:

$$O^k = (-1)^k [k+1] = \langle O, k \rangle.$$

扭转变换 f 定义如下:

$$f(a) = (\sqrt{-1})^{-a} v^{\frac{1}{2}a(a+2)}.$$

在分裂变换的公式中, 求和的范围是取尽被分裂的边 e 的所有可能的允许着色(由 $(\sigma(e), \sigma(b), \sigma(d))$ 之间的三角不等式推出)。

$$\Delta(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma) = \sum_z \frac{(-1)^z}{(-1)^{\frac{a+b+c}{2}}} \begin{bmatrix} z+1 \\ \frac{a+b+c}{2} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-a+b+c}{2} \\ z - \frac{a+\beta+\gamma}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a-b+c}{2} \\ z - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a+b-c}{2} \\ z - \frac{\alpha+\beta+c}{2} \end{bmatrix},$$

其中, 求和指标 z 的取值范围由二项式系数给出, 且有

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]![n-k]}.$$

特别地, 一个纽结是一个没有顶点的 0-标架(0-framed)纽结三价图。这里我们将纽结 K 的着色 Jones 多项式重新定义为 $J_K(n+1) = (-1)^n \langle K, n \rangle$, 其中 n 是纽结 K 的单独边上的着色, 且 $(-1)^n$ 是用来将平凡结

的值规范成 $J_o(n)=[n]$ 。

3. Montesinos 纽结的着色 Jones 多项式

Montesinos 纽结是一类具有代表性的纽结，它由若干个有理缠结(rational tangle)排成一圈相连生成，本文我们研究 n 股 Montesinos 纽结 $K = M\left(\left[r_1^0, \dots, r_1^{m_1}\right], \left[r_2^0, \dots, r_2^{m_2}\right], \dots, \left[r_n^0, \dots, r_n^{m_n}\right]\right)$ ，如图 2。

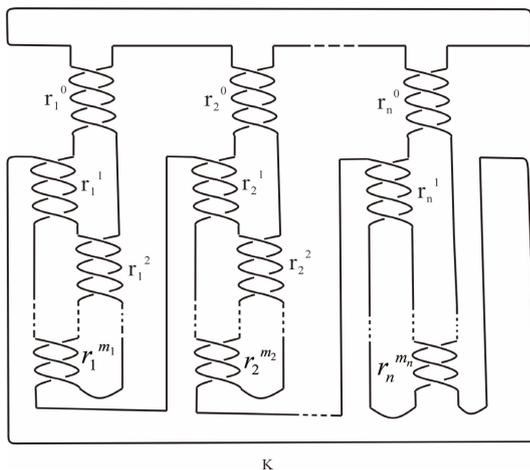


Figure 2. Montesinos knot
图 2. Montesinos 纽结

定理 3.1 设 K 是 Montesinos 纽结 $M\left(\left[r_1^0, \dots, r_1^{m_1}\right], \left[r_2^0, \dots, r_2^{m_2}\right], \dots, \left[r_n^0, \dots, r_n^{m_n}\right]\right)$ ，其中 $n \geq 4$ ， $m_1, m_2, \dots, m_n \geq 1$ ，则 K 的着色 Jones 多项式为

$$\begin{aligned}
 J_K(n+1) &= (-1)^n f(n)^{-2\left(\sum_{i=0}^{m_1} i^i + \sum_{j=0}^{m_2} j^j + \dots + \sum_{k=0}^{m_n} k^k\right) - 2\left(\sum_{i=0}^{m_1} (-1)^{i+1} r_1^i + \sum_{j=0}^{m_2} (-1)^{j+1} r_2^j + \dots + \sum_{k=0}^{m_n} (-1)^{k+1} r_n^k\right)} \\
 &\sum_{\alpha_{n-1}^0} \frac{O^{\alpha_{n-1}^0}}{\langle \theta; \alpha_{n-1}^0, a_{n-1}^0, a_n^0 \rangle} \Delta^2(\alpha_{n-1}^0, n, n, n, a_{n-1}^0, a_n^0) \sum_{\alpha_{n-2}^0} \frac{O^{\alpha_{n-2}^0}}{\langle \theta; \alpha_{n-2}^0, a_{n-2}^0, a_{n-1}^0 \rangle} \Delta^2(\alpha_{n-2}^0, n, n, n, a_{n-2}^0, \alpha_{n-1}^0) \dots \\
 &\dots \sum_{\alpha_3^0} \frac{O^{\alpha_3^0}}{\langle \theta; \alpha_3^0, a_3^0, \alpha_4^0 \rangle} \Delta^2(\alpha_3^0, n, n, n, a_3^0, \alpha_4^0) \Delta^2(a_1^0, a_2^0, \alpha_3^0, n, n, n) \langle \theta; a_1^0, a_2^0, \alpha_3^0 \rangle \\
 &\prod_{i=0}^{m_1-1} \Delta(a_1^i, n, n, a_1^{i+1}, n, n) \prod_{j=0}^{m_2-1} \Delta(a_2^j, n, n, a_2^{j+1}, n, n) \dots \prod_{k=0}^{m_n-1} \Delta(a_n^k, n, n, a_n^{k+1}, n, n) \\
 &\prod_{i=0}^{m_1} f^{r_1^i}(a_1^i) \prod_{j=0}^{m_2} f^{r_2^j}(a_2^j) \dots \prod_{k=0}^{m_n} f^{r_n^k}(a_n^k) \prod_{i=0}^{m_1} \sum_{a_1^i} \frac{O^{a_1^i}}{\langle \theta; a_1^i, n, n \rangle} \prod_{j=0}^{m_2} \sum_{a_2^j} \frac{O^{a_2^j}}{\langle \theta; a_2^j, n, n \rangle} \dots \prod_{k=0}^{m_n} \sum_{a_n^k} \frac{O^{a_n^k}}{\langle \theta; a_n^k, n, n \rangle}
 \end{aligned}$$

其中 a_i^j ， α_i^0 都是偶数且满足：

$$\begin{aligned}
 |a_i^0 - \alpha_{i+1}^0| &< \alpha_i^0 < a_i^0 + \alpha_{i+1}^0 \quad (i = 3, 5, \dots, n-2), \\
 |a_{n-1}^0 - a_n^0| &< \alpha_{n-1}^0 < a_{n-1}^0 + a_n^0, \quad 0 < a_i^j < 2n \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, r^{m_i}).
 \end{aligned}$$

证明：如图 3，注意，图中没有被标记着色的边默认用 n 着色。从 θ 图开始，我们先在两个顶点处各做一个三角变换得到图 Γ_2 ，且有

$$\langle \Gamma_2 \rangle = \Delta^2(a_1^0, a_2^0, \alpha_3^0, n, n, n) \langle \theta; a_1^0, a_2^0, \alpha_3^0 \rangle.$$

在 Γ_2 的两个三角形的右侧顶点分别做一次三角变换得到图 Γ_3 ，再对 α_3^0 进行分裂得到图 Γ_4 ，且有 $\langle \Gamma_3 \rangle = \Delta^2(\alpha_3^0, n, n, n, \alpha_3^0, \alpha_4^0) \langle \Gamma_2 \rangle$ 。

$$\langle \Gamma_4 \rangle = \sum_{\alpha_3^0} \frac{O^{\alpha_3^0}}{\langle \theta; \alpha_3^0, \alpha_3^0, \alpha_4^0 \rangle} \langle \Gamma_3 \rangle$$

然后对最右侧的两个顶点做三角变换，再对 α_4^0 进行分裂，依次做下去得到图 Γ_n ，则有

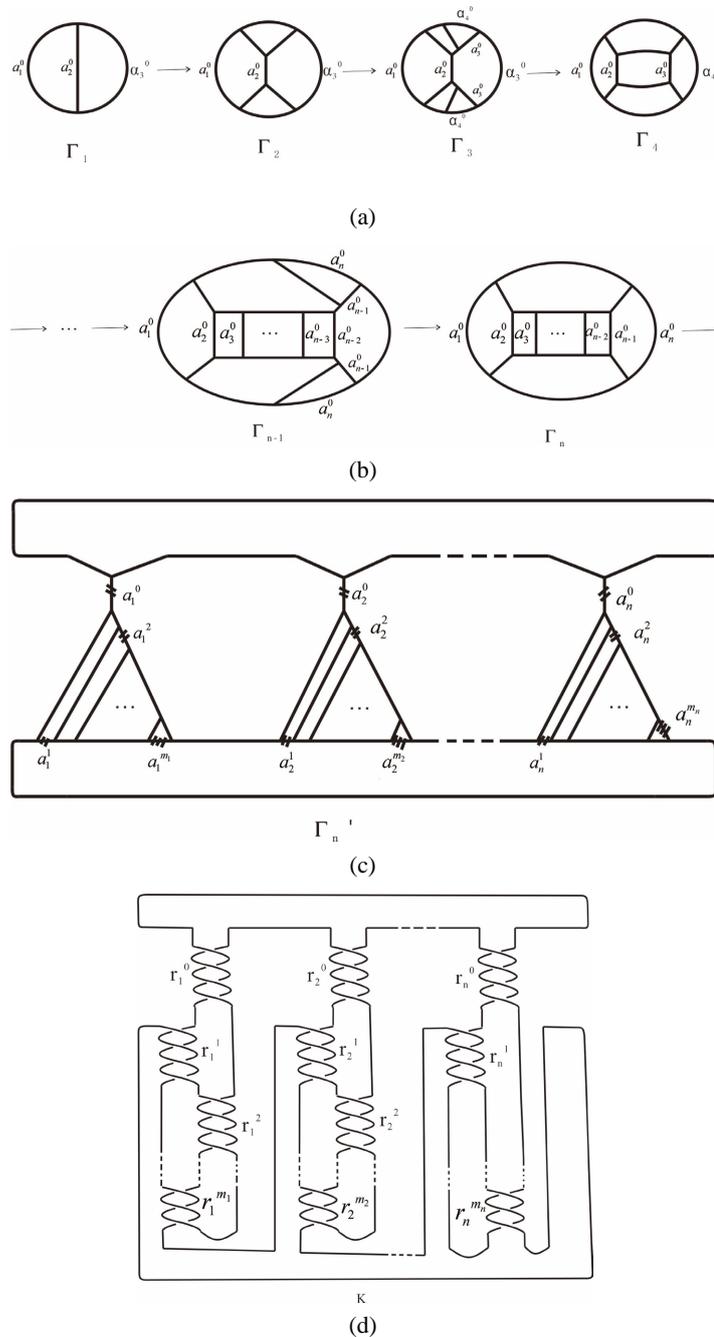


Figure 3. Operations from a θ graph to a Montesinos knot
图 3. 从 θ 图到 Montesinos 纽结的变换

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_n \rangle &= \sum_{\alpha_{n-1}^0} \frac{O^{\alpha_{n-1}^0}}{\langle \theta; \alpha_{n-1}^0, a_{n-1}^0, a_n^0 \rangle} \Delta^2(\alpha_{n-1}^0, n, n, n, a_{n-1}^0, a_n^0) \sum_{\alpha_{n-2}^0} \frac{O^{\alpha_{n-2}^0}}{\langle \theta; \alpha_{n-2}^0, a_{n-2}^0, \alpha_{n-1}^0 \rangle} \\ &\Delta^2(\alpha_{n-2}^0, n, n, n, a_{n-2}^0, \alpha_{n-1}^0) \cdots \sum_{\alpha_3^0} \frac{O^{\alpha_3^0}}{\langle \theta; \alpha_3^0, a_3^0, \alpha_4^0 \rangle} \Delta^2(\alpha_3^0, n, n, n, a_3^0, \alpha_4^0) \\ &\Delta^2(a_1^0, a_2^0, \alpha_3^0, n, n, n) \langle \theta; a_1^0, a_2^0, \alpha_3^0 \rangle \end{aligned}$$

在 Γ_n 中每个 a_i^0 所在边的下顶点进行 r_{m_i} 次三角变换得到图 Γ'_n ，同时有

$$\langle \Gamma'_n \rangle = \prod_{i=0}^{m_1-1} \Delta(a_1^i, n, n, a_1^{i+1}, n, n) \prod_{j=0}^{m_2-1} \Delta(a_2^j, n, n, a_2^{j+1}, n, n) \cdots \prod_{k=0}^{m_n-1} \Delta(a_n^k, n, n, a_n^{k+1}, n, n) \langle \Gamma_n \rangle.$$

然后在 Γ'_n 中对对每个被标记的边做相应的扭转，最后对这些扭转的边做分裂变换就得到了纽结 K 。注意对一个扭转的边做一个分裂变换会生成两个扭转的边，且两个边保持相同的扭转数。需要注意的是，为了得到 Montesinos 纽结的着色 Jones 多项式，我们需要消去由变换产生的标架 $F(K)$ 和由拧数产生的标架 $writhe(K)$ 。

$$\begin{aligned} F(K) &= \sum_{i=0}^{m_1} r_1^i + \sum_{j=0}^{m_2} r_2^j + \cdots + \sum_{k=0}^{m_n} r_n^k, \\ writhe(K) &= \sum_{i=0}^{m_1} (-1)^{i+1} r_1^i + \sum_{j=0}^{m_2} (-1)^{j+1} r_2^j + \cdots + \sum_{k=0}^{m_n} (-1)^{k+1} r_n^k. \end{aligned}$$

所以最终的结果应该乘上因子 $f(n)^{-2F(K)-2writhe(K)}$ 。□

我们看到，在 $n \geq 4$ 的情形中，运用纽结三价图计算着色 Jones 多项式需要通过更多的三角和分裂变换引入一类新的指标 α_i^0 ，这与 $n = 3$ 的情形有着本质不同，故这一算法的计算效率有待进一步研究。此外，我们注意到 S. Garoufalidis 等人[7]为了处理此类 $n \geq 4$ 的情形采用了聚变(fusion)和拆接(skein)理论的方法。

基金项目

国家自然科学基金项目(12001255)。

参考文献

- [1] Jones, V.F. (1985) A Polynomial Invariant for Knots via Von Neumann Algebras. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **12**, 103-111. <https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1985-15304-2>
- [2] Witten, E. (1989) Quantumfield Theory and the Jones Polynomial. *Communications in Mathematical Physics*, **121**, 351-399. <https://doi.org/10.1007/BF01217730>
- [3] Reshetikhin, N. and Turaev, V.G. (1991) Invariants of 3-Manifolds via Link Polynomials and Quantum Groups. *Inventiones Mathematicae*, **103**, 547-597. <https://doi.org/10.1007/BF01239527>
- [4] Lee, C.R.S. and van der Veen, R. (2016) Slopes for Pretzel Knots. *The New York Journal of Mathematics*, **22**, 1339-1364.
- [5] Leng, X., Yang, Z. and Liu, X. (2019) The Slope Conjectures for 3-String Montesinos Knots. *The New York Journal of Mathematics*, **25**, 45-70.
- [6] Thurston, D.P. (2002) The Algebra of Knotted Trivalent Graphs and Turaev's Shadow World. *Geometry & Topology Monographs*, **4**, 337-362.
- [7] Garoufalidis, S., Lee, C.R.S. and Roland, V.D.V. (2018) The Slope Conjecture for Montesinos Knots. ar-Xiv.1807.00957.