**Advances in Applied Mathematics** 应用数学进展, **2024, 13(1), 392-400**
Published Online January 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.131040

Hans汉斯

# 基于$l_p-\alpha l_1$模型下的部分已知支集信号恢复的研究

**吴丽君***，**宋儒瑛**

太原师范学院数学与统计学院，山西 晋中

收稿日期：2023年12月25日；录用日期：2024年1月19日；发布日期：2024年1月25日

## 摘 要

**压缩感知通过少量非自适应的线性测量有效地获取稀疏信号，是一种新型的采样方法。它突破了传统的香农采样定理的局限性，以远低于香农采样率的数据实现原始信号的精确恢复。本文在$l_1$，$l_q(0<q<1)$，$l_1-l_2$，$l_1-\alpha l_2(0<\alpha\le 1)$等最小化模型基础下，考虑了新模型$l_p-\alpha l_1(0<p<1,0<\alpha\le 1)$最小化，对部分已知支集的信号重建提出了一个新的条件，得到了信号在$l_2$有界噪声、DS噪声及高斯噪声情形下的误差逼近。**

## 关键词

压缩感知，$l_p-\alpha l_1$最小化，限制等距性，误差估计

# Research on Partial Known Support Signal Recovery Based on $l_p-\alpha l_1$ Model

**Lijun Wu***, **Ruying Song**

School of Mathematics and Statistics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi

Received: Dec. 25th, 2023; accepted: Jan. 19th, 2024; published: Jan. 25th, 2024

## Abstract

**Compressed sensing is a new sampling method which can obtain sparse signals effectively by a small number of non-adaptive linear measurements. It breaks the limitation of the traditional**

*通讯作者。

文章引用：吴丽君，宋儒瑛．基于$l_p-\alpha l_1$模型下的部分已知支集信号恢复的研究[J]．应用数学进展，2024，13(1): 392-400. DOI: 10.12677/aam.2024.131040

**Xiangnong sampling theory and achieves the exact recovery of theoriginal signal with the data far below the Xiangnong sampling rate. In this paper, based on the $l_1$, $l_q(0<q<1)$, $l_1-l_2$, $l_1-\alpha l_2$ $(0<\alpha\le 1)$ minimization models, a new model called $l_p-\alpha l_1$ minimization and a new condition for signal reconstruction with partial known support is proposed, and the error approximation of the signal in the case of $l_2$ bounded noise and DS noise is obtained.**

## Keywords

**Compressed Sensing, $l_p-\alpha l_1$ Minimization, Restricted Isometry Property, Error Estimates**



## 1. 引言

压缩感知是由 Candès，Donoho 和 Tao 等提出的一种全新的基于稀疏信号的采样理论，被广泛应用于医学成像、光学成像、雷达探测等诸多领域，目的是从较少的测量 $y=Ax$ 中恢复一个较为稀疏的信号 $x\in R^n$，其中 $A\in R^{m\times n}(m\ll n)$ 是一个测量矩阵。实际应用中为了能够合理快速地重构信号，我们接触到的第一个方法是 $l_0$ 最小化方法[1]，即：

$$\min_{x\in R^n}\|x\|_0,\ \text{s.t. } y=Ax \tag{1}$$

然而这个方法是一个非确定多项式难度问题(NP-hard)，因为 $l_1$ 范数是一个凸函数，进而学者 Candès 等人想到用 $l_1$ 最小化法来对 $l_0$ 最小化进行凸松弛[2]，即：

$$\min_{x\in R^n}\|x\|_1,\ \text{s.t. } y=Ax \tag{2}$$

该模型灵活地将多个子问题的优化问题转化为凸优化问题，在理论研究的基础上，学者们得到了在测量矩阵满足限制等距性、相干性等特性的条件下，对稀疏信号进行稳定恢复和鲁棒恢复的充分条件。随后，Jacques 等人提出了更加一般的 $l_p$ 范数模型，用于处理含噪信号的重构[3]；在此基础上，Ince 等人对信号的部分已知支集已知进行研究[4]，提出了一种基于部分已知支集的稀疏重建方法，并给出了具有部分已知支撑的信号恢复条件，理论结果表明该最小化方法具有稳定性和鲁棒性。近年来，Yin 等人提出了 $l_1-l_2$ 范数模型[5]，即：

$$\min_{x\in R^n}\|x\|_1-\|x\|_2,\ \text{s.t. } y=Ax \tag{3}$$

文章中 Yin 等人给出了该模型下精确和稳定恢复稀疏信号的条件，实质性地证明了该模型优于上述提到的几种模型。文章[6] [7] [8] [9]中主要利用限制等距性和限制正交性，为 $l_1-l_2$ 最小化建立了一个改进的充分条件，以保证鲁棒的信号恢复，事实证明，该条件都比之前的条件要好得多。文章[10] [11] [12] [13]提出了部分已知支集下的信号恢复条件，给出了最小化方法本身也是非自适应的，在实际示例中可以得出信号最大误差的估计，因此部分已知先验信息对于恢复信号是非常有用的。受到前人研究成果的启发，自然而然地得到在 $l_p-\alpha l_1$ 最小化下，讨论信号恢复是有意义的。文章利用 $l_p-\alpha l_1$ $(0<p<1,0<\alpha\le 1)$ 最小化方法对部分支集已知的信号进行恢复，形成了一个新的信号鲁棒恢复的条件，并考虑噪声下的已

知部分支集的信号重建，得到误差估计的上界。

## 2. 预备知识

在给出文章的主要结论之前，首先介绍由 Candès 和 Tao 引入的两个概念[2]：限制等距性和限制正交性，以及两个重要的引理[14]。

定义 1 [2]对所有的 $s$ 稀疏信号 $x\in R^n$ (即最多有 $s$ 个非零项)，若存在一个最小的常数 $\delta_s\in(0,1)$ 使得：

$$(1-\delta_s)\|x\|_2^2\le\|Ax\|_2^2\le(1+\delta_s)\|x\|_2^2$$

成立，则称矩阵 $A\in R^{m\times n}$ 满足 $s$ 阶的限制等距性， $\delta_s$ 是 $s$ 阶的限制等距常数。

定义 2 [2]对每个 $s$ 稀疏信号 $x\in R^n$ 和 $t$ 稀疏信号 $y\in R^n$，若存在一个最小的常数 $\theta_{s,t}\ge 0$ 使得：

$$|\langle Ax,Ay\rangle|\le\theta_{s,t}\|x\|_2\|y\|_2$$

成立，则称矩阵 $A\in R^{m\times n}$ 满足 $(s,t)$ 阶的限制正交性， $\theta_{s,t}$ 是 $(s,t)$ 阶的限制正交常数。

引理 1 [14]令 $k_1\le\eta$，$k_2\le\eta$，$\eta\ge 0$ 假设 $x,y\in R^n$ 有不相交的支撑，且 $\|x\|_0\le k_1$，$\|y\|_1\le\eta k_2$，$\|y\|_\infty\le\eta$，则有：

$$|\langle Ax,Ay\rangle|\le\sqrt{k_2}\theta_{k_1,k_2}\eta\|x\|_2$$

引理 2 [14]假设 $l\le n$， $x_1\ge x_2\ge\cdots x_n\ge 0$， $\gamma\ge 0$， $\sum_{i=1}^{l}x_i+\gamma\ge\sum_{i=l+1}^{n}x_i$， 则对所有 $p\ge 1$有：

$$\sum_{i=l+1}^{n}x_i^p\le l\left(\sqrt[p]{\frac{\sum_{i=1}^{l}x_i^p}{l}}+\frac{\gamma}{l}\right)^p$$

## 3. 主要结论

### 3.1. 部分支集已知的信号重建

基于已知的几种模型的研究，我们在此基础上考虑以下无约束优化问题：

$$\min_{x\in R^n}\|x_{T^C}\|_p-\alpha\|x_{T^C}\|_1,\ \text{s.t. } \hat{b}-Ax\in B \tag{4}$$

其中 $B$ 取决于噪声的类型。特别地，在无噪声情形下 $(B=\{0\})$，特别地有：

$$\min_{x\in R^n}\|x_{T^C}\|_p-\alpha\|x_{T^C}\|_1,\ \text{s.t. } \hat{b}=Ax \tag{5}$$

其中 $T$ 为信号 $x$ 的部分已知支撑，且 $T^C=[1,2,\cdots,n]/T$

下面我们讨论在噪声 $B^{l_2}(\varepsilon)=\{e:\|e\|_2\le\varepsilon\}$ 和噪声 $\mathring{B}^{DS}(\varepsilon)=\{e:\|A^Te\|_\infty\le\varepsilon\}$ 的情况下，研究关于已知部分支集的信号重建。

**定理 1** 如果信号 $x$ 的部分已知支撑是 $T$，且 $|T|=s$，若矩阵 $A$ 满足：

$$k+s-\alpha\sqrt{k}>(k+s-\alpha\sqrt{k})\delta_{k+s}+\left(k+s+\alpha\left(\sqrt{2(k+s)}-\sqrt{k}\right)\right)\theta_{k+s,k} \tag{6}$$

则(4)式的解 $x^*(l_2)$ 和 $x^*(DS)$ 分别满足：

$$\|x^*(l_2)-x\|_2\le C_1\varepsilon+D_1\|r-r_{T0}\|_p \tag{7}$$

$$\left\|x^*\left(DS\right)-x\right\|_2\le C_2\varepsilon+D_2\left\|r-r_{T0}\right\|_p \tag{8}$$

其中 $T\cap T_0=\varnothing$，$\left\|r-r_{T_0}\right\|_p=\left\|x_{\overline{T_0^C}}\right\|_p$，$r$ 是残差 $r=x-x_T$，$T_0$ 是 $r$ 的绝对值中最大的 $k$ 个项的指标构成的一个指标集，即 $r_{T_0}$ 是 $r$ 的最佳 $k$-项逼近，常数：

$$C_1=\frac{2\sqrt{2\left(1+\delta_{k+s}\right)}\varepsilon}{\left(k+s-\alpha\sqrt{k}\right)\left(1-\delta_{k+s}\right)-\left(k+s-\alpha\left(\sqrt{k}-\sqrt{2\left(k+s\right)}\right)\right)\theta_{k+s,k}}$$

$$D_1=\frac{2\sqrt{\frac{2}{k}\left(k+s\right)}\theta_{k+s,k}+2\sqrt{k+s}\left(1-\delta_{k+s}-\theta_{k+s,k}\right)}{\left(k+s-\alpha\sqrt{k}\right)\left(1-\delta_{k+s}\right)-\left(k+s-\alpha\left(\sqrt{k}-\sqrt{2\left(k+s\right)}\right)\right)\theta_{k+s,k}}$$

$$C_2=\frac{2\sqrt{2\left(k+s\right)}\left(k+s\right)}{\left(k+s-\alpha\sqrt{k}\right)\left(1-\delta_{k+s}\right)-\left(k+s-\alpha\left(\sqrt{k}-\sqrt{2\left(k+s\right)}\right)\right)\theta_{k+s,k}}$$

$$D_2=\frac{2\sqrt{\frac{2}{k}}\left(k+s\right)\theta_{k+s,k}+2\sqrt{k+s}\left(1-\delta_{k+s}-\theta_{k+s,k}\right)}{\left(k+s-\alpha\sqrt{k}\right)\left(1-\delta_{k+s}\right)-\left(k+s-\alpha\left(\sqrt{k}-\sqrt{2\left(k+s\right)}\right)\right)\theta_{k+s,k}}$$

证明 1) $B^{l_2}\left(\varepsilon\right)=\left\{e:\left\|e\right\|_2\le\varepsilon\right\}$。

现设定(4)式的解 $x^*=x+h$，$T_1$ 是 $h_{T^c}$ 的绝对值中最大的 $k$ 个项的指标构成的一个指标集，$h_{T^c}$ 是保留 $h$ 在 $T^c$ 中指标所指引的元素，而令在 $T^c$ 之外的指标所指引的元素取 0 的向量，现假设 $\overline{T_0}=T\cup T_0$，$\overline{T_1}=T\cup T_1$，$\overline{T_0^c}=\left(T\cup T_0\right)^c$，$\overline{T_1^c}=\left(T\cup T_1\right)^c$。

因为 $x^*$ 是(4)式的解，所以有：

$$\left\|x_{T^c}^*\right\|_p-\alpha\left\|x_{T^c}^*\right\|_1=\left\|\left(x+h\right)_{T^c}\right\|_p-\alpha\left\|\left(x+h\right)_{T^c}\right\|_1\le\left\|x_{T^c}\right\|_p-\alpha\left\|x_{T^c}\right\|_1 \tag{9}$$

由于 $T^c=T_0^c\cup\overline{T_0^c}$，很容易得到：

$$\begin{aligned}\left\|\left(x+h\right)_{T^c}\right\|_p-\alpha\left\|\left(x+h\right)_{T^c}\right\|_1&=\left\|\left(x+h\right)_{T_0}\right\|_p+\left\|\left(x+h\right)_{\overline{T_0^c}}\right\|_p-\alpha\left\|\left(x+h\right)_{T^c}\right\|_1\\&\ge\left\|x_{T_0}\right\|_p-\left\|h_{T_0}\right\|_p+\left\|x_{\overline{T_0^c}}\right\|_p-\left\|h_{\overline{T_0^c}}\right\|_p-\alpha\left\|\left(x+h\right)_{T^c}\right\|_1\end{aligned} \tag{10}$$

结合式(9)和式(10)整理可得：

$$\left\|h_{\overline{T_0^c}}\right\|_p\le\left\|h_{T_0}\right\|_p+2\left\|x_{\overline{T_0^c}}\right\|_p+\alpha\left\|h_{T^c}\right\|_1 \tag{11}$$

由于 $\left\|h_{\overline{T_1^c}}\right\|_p\le\left\|h_{\overline{T_0^c}}\right\|_p$，$\left\|h_{T_0}\right\|_p\le\left\|h_{T_1}\right\|_p$，$\left\|h_{T_c}\right\|_1\le\sqrt{\frac{k}{k+s}}\left\|h\right\|_1$，式(11)可变为：

$$\left\|h_{\overline{T_1^c}}\right\|_p\le\left\|h_{T_1}\right\|_p+2\left\|x_{\overline{T_0^c}}\right\|_p+\alpha\sqrt{\frac{k}{k+s}}\left\|h\right\|_1 \tag{12}$$

因为 $\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_0\le k+s,\left\|h_{\overline{T_1^c}}\right\|_\infty\le\frac{\left\|h_{T_1}\right\|_1}{k}\le\frac{\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_p}{\sqrt{k}}+\frac{2\left\|x_{\overline{T_0^c}}\right\|_p+\alpha\sqrt{\frac{k}{k+s}}\left\|h\right\|_1}{k}$，

故 $\left\|h_{T_1^c}\right\|_1 \le k\left\|h_{\overline{T_1^c}}\right\|_\infty \le k\left(\frac{\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_p}{\sqrt{k}}+\frac{2\left\|x_{\overline{T_0^c}}\right\|_p+\alpha\sqrt{\frac{k}{k+s}}\|h\|_1}{k}\right)$。

再利用引理 1：令 $k_1=k+s$，$k_2=k$，$\eta=\frac{\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_p}{\sqrt{k}}+\frac{2\left\|x_{\overline{T_0^c}}\right\|_p+\alpha\sqrt{\frac{k}{k+s}}\|h\|_1}{k}$，则有：

$$\left|\left\langle Ah_{\overline{T_1}}, Ah_{\overline{T_1^c}}\right\rangle\right| \le \theta_{k+s,k}\sqrt{k}\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_p\left(\frac{\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_p}{\sqrt{k}}+\frac{2\left\|x_{\overline{T_0^c}}\right\|_p+\alpha\sqrt{\frac{k}{k+s}}\|h\|_1}{k}\right).$$

进而可以得到：

$$\begin{aligned}\left|\left\langle Ah_{\overline{T_1}}, Ah\right\rangle\right| &\ge \left\|Ah_{\overline{T_1}}\right\|_2^2-\left|\left\langle Ah_{\overline{T_1}}, Ah_{\overline{T_1^c}}\right\rangle\right| \\ &\ge \left\|Ah_{\overline{T_1}}\right\|_2^2-\theta_{k+s,k}\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_p\left(\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_p+\frac{2\left\|x_{\overline{T_0^c}}\right\|_p+\alpha\sqrt{\frac{k}{k+s}}\|h\|_1}{\sqrt{k}}\right) \\ &\ge \left(1-\delta_{k+s}\right)\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_2^2-\theta_{k+s,k}\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_p\left(\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_p+\frac{2\left\|x_{\overline{T_0^c}}\right\|_p+\alpha\sqrt{\frac{k}{k+s}}\|h\|_1}{\sqrt{k}}\right)\end{aligned} \tag{13}$$

由于

$$\begin{aligned}\|Ah\|_2\cdot\left|\left\langle Ah_{\overline{T_1}}, Ah\right\rangle\right| &\le \left\|Ah_{\overline{T_1}}\right\|_2\|Ah\|_2 \\ &\le \sqrt{1+\delta_{k+s}}\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_2\left(\left\|Ax^*-\hat{b}\right\|_2+\left\|Ax-\hat{b}\right\|_2\right) \\ &\le 2\varepsilon\sqrt{1+\delta_{k+s}}\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_2\end{aligned} \tag{14}$$

结合式(13)和式(14)，整理可得：

$$\begin{aligned}2\varepsilon\sqrt{1+\delta_{k+s}}\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_2 &\ge \left(1-\delta_{k+s}\right)\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_2^2-\theta_{k+s,k}\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_p\left(\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_p+\frac{2\left\|x_{\overline{T_0^c}}\right\|_p+\alpha\sqrt{\frac{k}{k+s}}\|h\|_1}{\sqrt{k}}\right) \\ &\ge \left(1-\delta_{k+s}\right)\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_2^2-\theta_{k+s,k}\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_2\left(\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_2+\frac{2\left\|x_{\overline{T_0^c}}\right\|_p+\alpha\sqrt{\frac{k}{k+s}}\|h\|_1}{\sqrt{k}}\right)\end{aligned}$$

两边同时处以 $\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_2$ 可得：$2\varepsilon\sqrt{1+\delta_{k+s}}+\frac{\theta_{k+s,k}\left(2\left\|x_{\overline{T_0^c}}\right\|_p+\alpha\sqrt{\frac{k}{k+s}}\|h\|_1\right)}{\sqrt{k}} \ge \left(1-\delta_{k+s}-\theta_{k+s,k}\right)\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_2$。

由于条件中的式(6)保证$1-\delta_{k+s}-\theta_{k+s,k}>0$，所以：

$$\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_2 \le \frac{2\varepsilon\sqrt{1+\delta_{k+s}}}{1-\delta_{k+s}-\theta_{k+s,k}}+\frac{\theta_{k+s,k}\left(2\left\|x_{\overline{T_0^c}}\right\|_p+\alpha\sqrt{\frac{k}{k+s}}\|h\|_1\right)}{\sqrt{k}\left(1-\delta_{k+s}-\theta_{k+s,k}\right)}$$

因为$\left\|h_{T_1}\right\|_p \le \left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_p$，则从式(12)可以得到：

$$\left\|h_{\overline{T_1^c}}\right\|_p \le \left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_p+2\left\|x_{\overline{T_0^c}}\right\|_p+\alpha\sqrt{\frac{k}{k+s}}\|h\|_1 \tag{15}$$

引用引理 2，其中令$l=k+s$，$\gamma=2\left\|x_{\overline{T_0^c}}\right\|_p+\alpha\sqrt{\frac{k}{k+s}}\|h\|_1$，进一步可以得到：

$$\left\|h_{\overline{T_1^c}}\right\|_2 \le \left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_p+\frac{2\left\|x_{\overline{T_0^c}}\right\|_p+\alpha\sqrt{\frac{k}{k+s}}\|h\|_1}{\sqrt{k+s}}.$$

因此：

$$\begin{aligned}\|h\|_2 &\le \sqrt{\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_2^2+\left\|h_{\overline{T_1^c}}\right\|_2^2} \le \sqrt{\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_2^2+\left(\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_p+\frac{2\left\|x_{\overline{T_0^c}}\right\|_p+\alpha\sqrt{\frac{k}{k+s}}\|h\|_1}{\sqrt{k+s}}\right)^2} \\ &\le \sqrt{2}\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_2+\frac{2\left\|x_{\overline{T_0^c}}\right\|_p+\alpha\sqrt{\frac{k}{k+s}}\|h\|_1}{\sqrt{k+s}}\end{aligned} \tag{16}$$

整理后得：

$$\begin{aligned}\|h\|_2 \le{}& \frac{2\sqrt{2\left(1+\delta_{k+s}\right)}\varepsilon}{\left(k+s-\alpha\sqrt{k}\right)\left(1-\delta_{k+s}\right)-\left(k+s-\alpha\left(\sqrt{k}-\sqrt{2(k+s)}\right)\right)\theta_{k+s,k}} \\ &+\frac{2\sqrt{2\left(1+\frac{s}{k}\right)}\theta_{k+s,k}+2\sqrt{k+s}\left(1-\delta_{k+s}-\theta_{k+s,k}\right)}{\left(k+s-\alpha\sqrt{k}\right)\left(1-\delta_{k+s}\right)-\left(k+s-\alpha\left(\sqrt{k}-\sqrt{2(k+s)}\right)\right)\theta_{k+s,k}}\left\|x_{\overline{T_0^c}}\right\|_p\end{aligned}$$

特别地，在无噪声情形下有：

$$\|h\|_2 \le \frac{2\sqrt{2\left(1+\frac{s}{k}\right)}\theta_{k+s,k}+2\sqrt{k+s}\left(1-\delta_{k+s}-\theta_{k+s,k}\right)}{\left(k+s-\alpha\sqrt{k}\right)\left(1-\delta_{k+s}\right)-\left(k+s-\alpha\left(\sqrt{k}-\sqrt{2(k+s)}\right)\right)\theta_{k+s,k}}\left\|x_{\overline{T_0^c}}\right\|_p$$

$B^{DS}(\varepsilon)=\left\{e:\left\|A^Te\right\|_\infty \le \varepsilon\right\}$。类似 1)的证明：

$$\begin{aligned}\left|\left\langle Ah_{\overline{T_1}},Ah\right\rangle\right| &= \left|\left\langle A_{\overline{T_1}}h_{\overline{T_1}},A\left(x^*-x\right)\right\rangle\right| \\ &= \left|\left\langle A_{\overline{T_1}}h_{\overline{T_1}},Ax^*-\hat{b}+e\right\rangle\right| \\ &= \left|\left\langle h_{\overline{T_1}},A_{\overline{T_1}}\left(Ax^*-\hat{b}+e\right)\right\rangle\right|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\le \left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_1 \left\|A_{\overline{T_1}}\left(Ax^* - \hat{b} + e\right)\right\|_\infty \\ &\le 2\varepsilon\sqrt{(k+s)}\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_2\end{aligned} \tag{17}$$

结合式(13)和式(16)可得：

$$\begin{aligned}2\varepsilon\sqrt{k+s}\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_2 &\ge \left(1-\delta_{k+s}\right)\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_2^2 - \theta_{k+s,k}\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_p\left(\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_p + \frac{2\left\|x_{\overline{T_0^c}}\right\|_p + \alpha\sqrt{\frac{k}{k+s}}\left\|h\right\|_1}{\sqrt{k}}\right) \\ &\ge \left(1-\delta_{k+s}\right)\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_2^2 - \theta_{k+s,k}\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_2\left(\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_2 + \frac{2\left\|x_{\overline{T_0^c}}\right\|_p + \alpha\sqrt{\frac{k}{k+s}}\left\|h\right\|_1}{\sqrt{k}}\right)\end{aligned}$$

整理后有：

$$\left\|h_{\overline{T_1}}\right\|_2 \le \frac{2\sqrt{k+s}\,\varepsilon}{1-\delta_{k+s}-\theta_{k+s,k}} + \frac{\theta_{k+s,k}\left(2\left\|x_{\overline{T_0^c}}\right\|_p + \alpha\sqrt{\frac{k}{k+s}}\left\|h\right\|_1\right)}{\sqrt{k}\left(1-\delta_{k+s}-\theta_{k+s,k}\right)} \tag{18}$$

式(16)和式(18)整理后可得：

$$\begin{aligned}\left\|h\right\|_2 \le& \frac{2\sqrt{2(k+s)}(k+s)\varepsilon}{\left(k+s-\alpha\sqrt{k}\right)\left(1-\delta_{k+s}\right)-\left(k+s-\alpha\left(\sqrt{k}-\sqrt{2(k+s)}\right)\right)\theta_{k+s,k}} \\ &+ \frac{2\sqrt{\frac{2}{k}}(k+s)\theta_{k+s,k} + 2\sqrt{k+s}\left(1-\delta_{k+s}-\theta_{k+s,k}\right)}{\left(k+s-\alpha\sqrt{k}\right)\left(1-\delta_{k+s}\right)-\left(k+s-\alpha\left(\sqrt{k}-\sqrt{2(k+s)}\right)\right)\theta_{k+s,k}}\left\|x_{\overline{T_0^c}}\right\|_p\end{aligned}$$

特别地，在无噪声情形下有：

$$\left\|h\right\|_2 \le \frac{2\sqrt{\frac{2}{k}}(k+s)\theta_{k+s,k} + 2\sqrt{k+s}\left(1-\delta_{k+s}-\theta_{k+s,k}\right)}{\left(k+s-\alpha\sqrt{k}\right)\left(1-\delta_{k+s}\right)-\left(k+s-\alpha\left(\sqrt{k}-\sqrt{2(k+s)}\right)\right)\theta_{k+s,k}}\left\|x_{\overline{T_0^c}}\right\|_p$$

定理 1 得证。

### 3.2. 高斯噪声

高斯噪声是众多噪声中一种较为特殊的噪声，其观察模型为：

$$y = Ax + e, e \sim N\left(0, \sigma^2 I_n\right).$$

假定 $\sigma$ 是已知的，矩阵 $A$ 中的列向量均为单位向量，则定义以下两种噪声类型：

$$B_1 = \left\{e : \left\|e\right\|_2 \le \sigma\sqrt{n + 2\sqrt{n \ln n}}\right\}; \quad B_2 = \left\{e : \left\|A^T e\right\|_\infty \le \sigma\sqrt{2\ln p}\right\}.$$

分别对应有[15]： $P\left(e \in B_1\right) \ge 1 - \frac{1}{n}$； $P\left(e \in B_2\right) \ge 1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi \ln p}}$ 。

可以看出高斯变量 $e$ 高概率地位于集合 $B_1$ 和 $B_2$ 中，根据定理 1 以下定理显然成立。

**定理 2** 若测量矩阵 $A\in R^{m\times n}$ 满足：

$$k+s-\alpha\sqrt{k}>\left(k+s-\alpha\sqrt{k}\right)\delta_{k+s}+\left(k+s+\alpha\left(\sqrt{2(k+s)}-\sqrt{k}\right)\right)\theta_{k+s,k},$$

对于无约束优化问题(4)有如下结论[15]：

1) $x^*(l_2)$ 至少以 $P(e\in B_1)\geq 1-\frac{1}{n}$ 的概率满足：

$$\begin{aligned}\left\|x^*(l_2)-x\right\|_2\leq&\frac{2\sqrt{2(1+\delta_{k+s})\left(n+2\sqrt{n\ln n}\right)}\sigma}{\left(k+s-\alpha\sqrt{k}\right)(1-\delta_{k+s})-\left(k+s-\alpha\left(\sqrt{k}-\sqrt{2(k+s)}\right)\right)\theta_{k+s,k}}\\&+\frac{2\sqrt{2\left(1+\frac{s}{k}\right)}\theta_{k+s,k}+2\sqrt{k+s}\left(1-\delta_{k+s}-\theta_{k+s,k}\right)}{\left(k+s-\alpha\sqrt{k}\right)(1-\delta_{k+s})-\left(k+s-\alpha\left(\sqrt{k}-\sqrt{2(k+s)}\right)\right)\theta_{k+s,k}}\left\|r-r_{T_0}\right\|_p\end{aligned}\tag{19}$$

2) $x^*(DS)$ 至少以 $P(e\in B_2)\geq 1-\frac{1}{2\sqrt{\pi\ln p}}$ 的概率满足：

$$\begin{aligned}\left\|x^*(DS)-x\right\|_2\leq&\frac{4\sqrt{\ln p}\,(k+s)^{\frac{3}{2}}\sigma}{\left(k+s-\alpha\sqrt{k}\right)(1-\delta_{k+s})-\left(k+s-\alpha\left(\sqrt{k}-\sqrt{2(k+s)}\right)\right)\theta_{k+s,k}}\\&+\frac{2\sqrt{\frac{2}{k}}(k+s)\theta_{k+s,k}+2\sqrt{k+s}\left(1-\delta_{k+s}-\theta_{k+s,k}\right)}{\left(k+s-\alpha\sqrt{k}\right)(1-\delta_{k+s})-\left(k+s-\alpha\left(\sqrt{k}-\sqrt{2(k+s)}\right)\right)\theta_{k+s,k}}\left\|r-r_{T_0}\right\|_p\end{aligned}.\tag{20}$$

## 4. 小结

文章通过 $l_p-\alpha l_1(0<p<1,0<\alpha\leq 1)$ 最小化的方法，将其与信号的部分已知支集结合起来，得到了该模型下信号恢复的一个更精确的条件，并且具体地给出了有界噪声、*DS* 噪声及高斯噪声下的误差估计，对我们以后研究有关 $l_p-\alpha l_1$ 最小化模型下测量矩阵的性质非常有意义。目前关于该模型的下测量矩阵的其他性质研究较少，有待学者们进一步研究。

## 参考文献


[1] Donoho, D.L. (2006) Compressed Sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, **52**, 1289-1306. https://doi.org/10.1109/TIT.2006.871582

[2] Candès, E.J. and Tao, T. (2005) Decoding by Linear Programming. *IEEE Transactions on Information Theory*, **51**, 4203-4215. https://doi.org/10.1109/TIT.2005.858979

[3] Jacques, L. (2010) A Short Note on Compressed Sensing with Partially Known Signal Support Signal Processing. *Signal Processing*, **90**, 3308-3312. https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2010.05.025

[4] Ince, T., Nacaroglu, A. and Watsuji, N. (2013) Nonconvex Compressed Sensing with Partially Known Signal Support. *Signal Processing*, **93**, 338-344. https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2012.07.011

[5] Yin, P.H., Lou, Y.F, He, Q. and Xin, J. (2015) Minimization of $l_1-l_2$ for Compressed Sensing. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **37**, A526-A563. https://doi.org/10.1137/140952363

[6] Wang, W.D. and Wang, J.J. (2019) An Improved Sufficient Condition of $l_1-l_2$ Minimization for Robust Signal Recovery. *Electronics Letters*, **55**, 1199-1201. https://doi.org/10.1049/el.2019.2205

[7] He, Z.H., He, H.Y. and Liu, X.L. (2022) An Improved Sufficient Condition for Sparse Signal Recovery with Minimization of $l_1-l_2$. *IEEE Signal Processing*, **29**, 907-911. https://doi.org/10.1109/LSP.2022.3158839

[8] Candès, E., Romberg, J. and Tao, T. (2006) Robust Uncertainty Principles: Exact Signal Reconstruction from Highly Incomplete Frequency Information. *IEEE Transactions on Information Theory*, **52**, 489-509. https://doi.org/10.1109/TIT.2005.862083

[9] Candes, E. (2008) The Restricted Isometry Property and Its Implications for Compressed Sensing. *Comptes Rendus Mathematique*, **346**, 589-592. https://doi.org/10.1016/j.crma.2008.03.014

[10] Vaswani, N., *et al*. (2010) Modified-CS: Modifying Compressive Sensing for Problems with Partially Known Support. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **58**, 4595-4607. https://doi.org/10.1109/TSP.2010.2051150

[11] Chen, W.G. and Li, Y.L. (2019) Recovery of Signals under the Condition on RIC and ROC via Prior Support Information. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **46**, 417-430. https://doi.org/10.1016/j.acha.2018.02.003

[12] 宋儒瑛，武思琪，关晋瑞．基于 $l_1-l_2$ 最小化的部分支集已知的信号重建[J]．湖北民族大学学报，2022，40(1): 81-85.

[13] 周珺．基于 $l_1-l_2$ 范数极小化的稀疏信号重建条件[J]．合肥工业大学学报(自然科学版), 2020, 43(1): 137-140.

[14] Cai, T.T., Wang, L. and Xu, GW.. (2010) Shifting Inequality and Recovery of Sparse Signals. *IEEE Transactions on Communications*, **58**, 1300-1308. https://doi.org/10.1109/TSP.2009.2034936

[15] 武思琪，宋儒瑛．基于 $l_1-\alpha l_2$ 最小化的部分支集已知的信号重建[J]．应用数学进展, 2022, 11(8): 6015-6028. https://doi.org/10.12677/aam.2022.118634