

基于Pythagorean Hodograph T-曲线的过渡曲线的构造

杨 雪, 彭兴璇*

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2023年12月19日; 录用日期: 2024年1月13日; 发布日期: 2024年1月22日

摘 要

本文基于平面三次T-Bézier曲线, 定义了三次T-PH曲线, 研究了T-PH曲线的代数和几何特征, 进而利用三次T-PH曲线构造了两圆互不包含的情况下的C型过渡曲线, 给出圆心距的取值范围, 并证明了过渡曲线的唯一性。最后给出数值实例, 验证了方法的可行性。

关键词

三次T-PH曲线, 几何特征, 过渡曲线

Construction of Transition Curve Based on Pythagorean Hodograph T-Curve

Xue Yang, Xingxuan Peng*

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Dec. 19th, 2023; accepted: Jan. 13th, 2024; published: Jan. 22nd, 2024

Abstract

In this paper, we define the cubic T-PH curve and study the algebra and geometric characteristic of T-PH curve. In addition, a non-circle transition curve is constructed as a C-type transition curve using cubic T-PH curve, giving the value range of the center distance, and proving the uniqueness of transition curve. Finally, numerical examples are given to verify the feasibility of the method.

*通讯作者。

文章引用: 杨雪, 彭兴璇. 基于 Pythagorean Hodograph T-曲线的过渡曲线的构造[J]. 应用数学进展, 2024, 13(1): 234-243. DOI: 10.12677/aam.2024.131026

Keywords

Cubic T-PH Curve, Geometric Characteristic, Transition Curve

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

Pythagorean-Hodograph (PH)曲线是 Farouki [1]提出的一种特殊的多项式参数曲线。由于 PH 曲线的曲率和等距曲线是有理形式的, 因此被广泛应用在计算机辅助设计、机器人行走路线、数控机器加工等领域中。

到目前为止, 基于一元多项式空间 $\{1, t, \dots, t^{n-2}, t^{n-1}, t^n\}$ 中的 PH 曲线已经有了比较深入的研究。文献[1]给出了在边角分离的条件下, 三次 PH 曲线的控制多边形的几何特征。但是有理式 Bézier 模型不能准确地表示超越曲线, 因此, 许多学者提出了三角空间和代数双曲混合空间。文献[2]定义了空间 $\{1, t, \dots, t^{n-2}, \sin t, \cos t\}$ 上的 C-Bézier 曲线, 并给出三次 C-Bézier 曲线成为 PH 曲线的充要条件; 文献[3]以三次 PH-C 曲线的代数结构为基础, 给出三次 PH-C 曲线的几何特征及构造方法。文献[4]定义了 $\{1, t, \dots, t^{n-2}, \sinh t, \cosh t\}$ 上的 AH-Bézier 曲线, 文献[5]在文献[4]的基础上, 通过两种基底推导出三次 PH-H 曲线的充要条件, 并给出 PH-H 曲线的几何构造方法; 文献[6]定义了三角多项式空间 $\{1, \sin t, \cos t, \dots, \sin nt, \cos nt\}$ 上的 T-Bézier 曲线。目前三角多项式空间上的 PH 曲线尚无研究。

在曲线曲面的几何造型设计中, 经常涉及到 2 条曲线间的光滑拼接, 即过渡曲线的构造。由于过渡曲线要求在端点处满足几何连续性, 并且曲线的曲率单调变化, 因此文献[7]定义了用积分表示的 Clothoid 曲线, 并将其用于公路铁路设计中。后来发现 Clothoid 曲线的表达式中含有 Fresnel 积分, 计算复杂, 许多学者开始对文献[8]提出了用三次 Bézier 曲线构造过渡曲线, 但 Bézier 曲线的弧长和等距线不能表示为有理形式, 在实际的几何设计中存在新的难题, 为解决这一问题, 文献[9] [10] [11]提出了利用五次 PH 曲线构造过渡曲线, 五次 PH 曲线的内部不含奇点和拐点, 其曲率单调, 并且曲率和等距曲线是有理形式的, 因此更适用于构造过渡曲线。为了使过渡曲线构造更为简单高效, 文献[12]利用放缩法得到了类三次 Bézier 螺线, 并构造了半径比例不受限制的两圆弧间 S 型和 C 型 G^2 连续过渡曲线; 文献[13] [14] [15]分别构造了 C-Bézier 螺线、H-Bézier 螺线和 T-Bézier 螺线, 并利用这些螺线作两圆之间的过渡曲线。为了避免求解复杂的非线性方程组, 文献[16]采用次数较低的三次 PH 曲线构造相互包含的两圆弧间 G^2 连续过渡曲线, 文献[17]基于三次 PH 曲线, 构造了两圆不相互包含的情况下的 C 型过渡曲线。

本文主要研究了 T-PH 曲线的代数和几何特征, 并用来解决过渡曲线的构造问题。结构安排如下: 首先, 给出 T-PH 曲线的定义, 并应用平面参数曲线的复数表示法, 讨论 T-PH 曲线的代数结构和几何特征; 其次, 基于三次 T-PH 曲线来构造不互相包含的两圆之间的 C 型过渡曲线, 并证明了过渡曲线的唯一性; 最后, 给出数值实例。

2. T-PH 曲线

在三角多项式空间 $\Gamma = \text{span}\{1, \sin t, \cos t, \cos 2t\}$ 中可以生成一类特殊曲线 T-Bézier 曲线。

定义 1 [7]给定平面上一组控制顶点 $P_i (i = 0, 1, 2, 3) \in R^2$, 对于任意的 $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 三次 T-Bézier 曲线表

示为

$$P(t) = \sum_{i=0}^3 P_i Z_{i,3}(t) \quad (1)$$

其中 $Z_{i,3}(t)$ 为 T-Bézier 曲线的基函数。其矩阵表示形式为

$$P(t) = \begin{pmatrix} 1 & \sin t & \cos t & \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & -1 & \frac{3}{2} \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}$$

显然

$$Z_{0,3}(t) = \frac{3}{2} - 2\sin t - \frac{1}{2}\cos 2t$$

$$Z_{1,3}(t) = -1 + 2\sin t + \cos 2t$$

$$Z_{2,3}(t) = -1 + 2\cos t - \cos 2t$$

$$Z_{3,3}(t) = \frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t$$

则有

$$P(t) = P_0 + \sum_{i=0}^2 \Delta P_i \sum_{j=i+1}^3 Z_{j,3}(t)$$

从而

$$P'(t) = \Delta P_0 w_0 + \Delta P_1 w_1 + \Delta P_2 w_2, \quad (2)$$

其中

$$w_i = \sum_{j=i+1}^3 Z'_{j,3}(t), i=0,1,2$$

$$\text{记 } w = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos t(1-\sin t) \\ 2\sin t(1-\cos t) \\ 2\sin t \cos t \end{pmatrix}.$$

定义 2 平面 T-Bézier 曲线 $P(t) = (x(t), y(t)) \in \Gamma_n$, 若存在 $\sigma(t) \in \Gamma_{n-1}$ 使得其导数分量 $x'(t), y'(t)$ 满足 $x'^2(t) + y'^2(t) = \sigma^2(t)$, 则称该曲线为 Pythagorean Hodograph T-曲线, 简称 T-PH 曲线。

3. 三次 T-PH 曲线的代数与几何特征

定理 1 若参数曲线 $P(t) = (x(t), y(t))$ 满足:

$$\begin{cases} x'(t) = w(t)[u^2(t) - v^2(t)] \\ y'(t) = 2w(t)u(t)v(t) \end{cases}$$

其中 $w(t), u(t), v(t)$ 分别为实系数多项式, 且不等于零, 则 $P(t)$ 为 PH 曲线。

根据定义 2 和定理 1, 可以得到

定理 2 式(1)中的三次 T-Bézier 曲线 $P(t)$ 是 PH 曲线的充要条件是存在实数 u_0, v_0, u_1, v_1 , 使得其控制顶点满足如下关系式

$$\begin{cases} P_1 = P_0 + \left(\frac{u_1^2 - v_1^2}{2}, u_1 v_1 \right) \\ P_2 = P_1 + \left(\frac{u_1^2 - v_1^2 + u_0 u_1 - v_0 v_1}{2}, \frac{2u_1 v_1 + u_0 v_1 + u_1 v_0}{2} \right) \\ P_3 = P_2 + \left(\frac{u_0 u_1 - v_0 v_1}{2}, \frac{u_0 v_1 + u_1 v_0}{2} \right) \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$\begin{cases} u_0^2 + u_1^2 = v_0^2 + v_1^2 \\ u_0 v_0 + u_1 v_1 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

证明: 令

$$\begin{cases} u(t) = u_0 \sin \frac{t}{2} + u_1 \cos \frac{t}{2} \\ v(t) = v_0 \sin \frac{t}{2} + v_1 \cos \frac{t}{2} \end{cases}$$

由 T-Bézier 曲线的基函数得

$$\begin{aligned} u^2(t) - v^2(t) &= \left(\frac{u_1^2 - u_0^2}{2} - \frac{v_1^2 - v_0^2}{2} \right) \cos t + (u_0 u_1 - v_0 v_1) \sin t + \left(\frac{u_0^2 + u_1^2}{2} - \frac{v_0^2 + v_1^2}{2} \right) \\ 2u(t)v(t) &= (u_1 v_1 - u_0 v_0) \cos t + (u_0 v_1 + u_1 v_0) \sin t + (u_0 v_1 + u_1 v_1) \end{aligned}$$

三次 T-Bézier 曲线的导数可写为

$$P'(t) = 2(P_1 - P_0) \cos t + (P_0 - 2P_1 + 2P_2 - P_3) \sin 2t + 2(P_3 - P_2) \sin t$$

因此得到 T-PH 曲线的控制顶点:

$$\begin{cases} P_0 = (x_0, y_0) \\ P_1 = P_0 + \left(\frac{u_1^2 - u_0^2 - v_1^2 + v_0^2}{4}, \frac{u_1 v_1 - u_0 v_0}{2} \right) \\ P_2 = P_1 + \left(\frac{u_1^2 - u_0^2 - v_1^2 + v_0^2 + 2u_0 u_1 - 2v_0 v_1}{4}, \frac{u_1 v_1 - u_0 v_0 + u_0 v_1 + u_1 v_0}{2} \right) \\ P_3 = P_2 + \left(\frac{u_0 u_1 - v_0 v_1}{2}, \frac{u_0 v_1 + u_1 v_0}{2} \right) \end{cases}$$

其中 u_0, v_0, u_1, v_1 需满足

$$\begin{cases} u_0^2 + u_1^2 = v_0^2 + v_1^2 \\ u_0 v_0 + u_1 v_1 = 0 \end{cases}$$

对上式进行整理即可得到式(3), 从而得到了三次 T-Bézier 曲线成为 T-PH 曲线的充要条件。

下面将用一个例子来说明定理 2, 用定理中的充要条件给定参数取值, 计算出曲线的控制顶点, 并根据 T-Bézier 曲线的表达式构造出两条三次 T-PH 曲线。

例 1 给定 $P_0 = (0, 0)$, $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $v_0 = 2$, $v_1 = -1$, 则由式(3)可得三次 T-PH 曲线的控制顶点为:

$$P_0 = (0, 0), P_1 = (1.5, -2)$$

$$P_2 = (5, -2.5), P_3 = (7, -1)$$

得到的三次 T-PH 曲线及其控制多边形如图 1 所示。

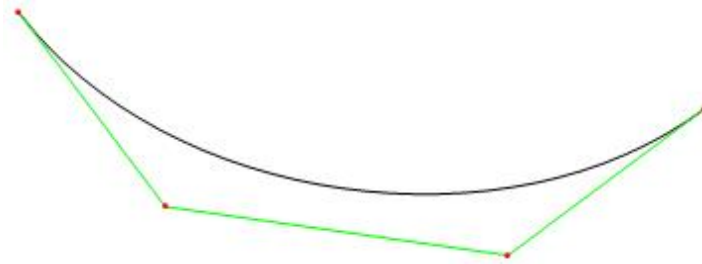


Figure 1. Cubic T-PH curve and control polygon

图 1. 三次 T-PH 曲线及控制多边形

Farouki 已经得出三次多项式 PH 曲线具有简单的几何性质, 利用这个性质可以对三次多项式 PH 曲线进行判别和构造, 接下来将证明三次 T-PH 曲线也具有类似的几何性质。

定理 3 若 $P_i, i = 0, 1, 2, 3$ 为三次 T-Bézier 曲线 $P(t)$ 的控制顶点, $\theta_i, i = 0, 1$ 为控制多边形的两个内角, $L_i = \|\Delta P_i\|, i = 0, 1, 2$ 为控制多边形的三条边长, 则 $P(t)$ 是 T-PH 曲线当且仅当

$$\theta_0 = \theta_1, L_1^2 = 2L_0L_2 \quad (5)$$

证明: 由定理 2 可知, 若一条三次 T-Bézier 曲线为 T-PH 曲线, 则存在实数 u_0, v_0, u_1, v_1 使得式(3)、(4)成立。记 $\varphi_i, i = 0, 1, 2$ 为 ΔP_i 的辐角, 可得

$$\Delta P_0 = L_0 e^{i\varphi_0} = \frac{u_1^2 - v_1^2}{2} + u_1 v_1 i \quad (6)$$

$$\Delta P_1 = L_1 e^{i\varphi_1} = \frac{u_1^2 - v_1^2 + u_0 u_1 - v_0 v_1}{2} + \frac{2u_1 v_1 + u_0 v_1 + u_1 v_0}{2} i \quad (7)$$

$$\Delta P_2 = L_2 e^{i\varphi_2} = \frac{u_0 u_1 - v_0 v_1}{2} + \frac{u_0 v_1 + u_1 v_0}{2} i \quad (8)$$

分别计算 ΔP_1^2 和 $\Delta P_0 \Delta P_2$ 的实部和虚部, 得到

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\Delta P_0 \Delta P_2) &= \frac{u_1^3 u_0 + v_1^3 v_0 - 3u_1^2 v_0 v_1 - 3v_1^2 u_0 u_1}{4} \\ \operatorname{Re}(\Delta P_1^2) &= \frac{\phi(u_0, u_1, v_0, v_1) + 2u_1^3 u_0 + 2v_1^3 v_0 - 6u_1^2 v_0 v_1 - 6v_1^2 u_0 u_1}{4} \end{aligned}$$

其中 $\phi(u_0, u_1, v_0, v_1) = u_1^4 - 6u_1^2 v_1^2 - 4u_0 u_1 v_0 v_1 + v_1^4 + u_0^2 u_1^2 + v_0^2 v_1^2 - u_0^2 v_1^2 - u_1^2 v_0^2$

由式(4)化简得到 $\phi(u_0, u_1, v_0, v_1) = 0$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\Delta P_0 \Delta P_2) &= \frac{u_1^3 v_0 - v_1^3 u_0 + 3u_1^2 u_0 v_1 - 3v_1^2 u_1 v_0}{4} \\ \operatorname{Im}(\Delta P_1^2) &= \frac{\psi(u_0, u_1, v_0, v_1) + u_1^3 v_0 - v_1^3 u_0 + 3u_1^2 u_0 v_1 - 3v_1^2 u_1 v_0}{2} \end{aligned}$$

其中 $\psi(u_0, u_1, v_0, v_1) = 2u_1^3v_1 - 2v_1^3u_1 + u_0^2u_1v_1 + u_1^2u_0v_0 - v_1^2u_0v_0 - v_0^2u_1v_1$

由式(4)化简得到 $\psi(u_0, u_1, v_0, v_1) = 0$

从而可得

$$\frac{\|\Delta P_1\|^2}{\Delta P_0 \Delta P_2} = 2 \quad (9)$$

因为 θ_i 为控制多边形的内角, 即 $\theta_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$, 所以由式(9)可知式(5)成立。

反之, 若对于给定的三次 T-PH 曲线, 其控制多边形满足式(5), 则假定 u_0, u_1, v_0, v_1 为待定系数, 使得式(6)~式(8)成立。若式(6)、式(7)成立, 则式(8)也成立。因此分别考虑复方程(6)的实部和虚部, 通过求解线性方程组得到

$$u_1^2 = \|\Delta P_0\| + \operatorname{Re}(\Delta P_0), v_1^2 = \frac{\operatorname{Im}^2(\Delta P_0)}{\|\Delta P_0\| + \operatorname{Re}(\Delta P_0)}$$

进一步, 将 u_1, v_1 作为已知量, 分别考虑复方程(7)的实部和虚部, 通过求解线性方程组得到

$$u_0 = \frac{2(u_1 \operatorname{Re}(\Delta P_1) + v_1 \operatorname{Im}(\Delta P_1)) - u_1^3 - u_1 v_1^2}{u_1^2 + v_1^2}$$

$$v_0 = \frac{2(v_1 \operatorname{Re}(\Delta P_1) - u_1 \operatorname{Im}(\Delta P_1)) + v_1^3 + u_1^2 v_1}{u_1^2 + v_1^2}$$

综上, 得到使定理 3 成立的 4 个实数 u_0, u_1, v_0, v_1 , 因此, 该曲线是一条三次 T-PH 曲线。证毕。

4. 三次 T-PH 过渡曲线的构造

平面参数曲线的曲率表达式为:

$$k(t) = \frac{|P'(t) \times P''(t)|}{|P'(t)|^3}$$

设三次 T-PH 曲线的控制多边形初始端点为 P_0 , 末端点为 P_3 , 以 P_0 为原点建立直角坐标系, 由 P_0 处的曲率可得到以 C_0 为圆心, r_0 为半径的圆 Ω_0 , 由 P_3 的曲率可得到以 C_1 为圆心, r_1 为半径的圆 Ω_1 , 如图 2 所示。

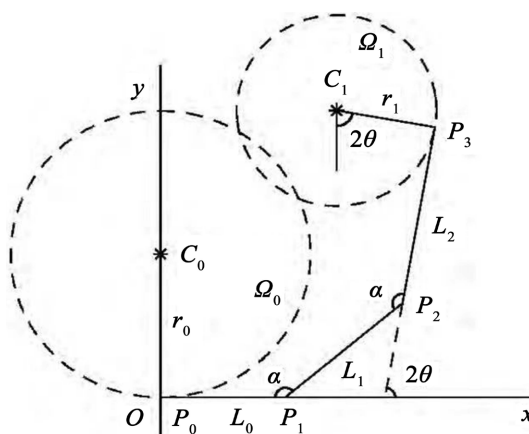


Figure 2. Circle of curvature [17]

图 2. 曲率圆[17]

由图 2 得三次 T-PH 曲线的控制顶点为:

$$\begin{cases} P_0 = (0, 0) \\ P_1 = (L_0, 0) \\ P_2 = (L_0 + L_1 \cos \theta, L_1 \sin \theta) \\ P_3 = (L_0 + L_1 \cos \theta + L_2 \cos 2\theta, L_1 \sin \theta + L_2 \sin 2\theta) \end{cases} \quad (10)$$

将式(10)代入式(1)中, 得到 $P(t)$ 的参数表达式为:

$$\begin{aligned} P(t) &= (x(t), y(t)) \\ &= P_0 \left(\frac{3}{2} - 2 \sin t + \cos 2t \right) + P_1 (-1 + 2 \sin t + \cos 2t) \\ &\quad + P_2 (-1 + 2 \cos t - \cos 2t) + P_3 \left(\frac{3}{2} - 2 \cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} x(t) &= L_0 (-1 + 2 \sin t + \cos 2t) + (L_0 + L_1 \cos \theta) (-1 + 2 \cos t - \cos 2t) \\ &\quad + (L_0 + L_1 \cos \theta + L_2 \cos 2\theta) \left(\frac{3}{2} - 2 \cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right) \end{aligned} \quad (11)$$

$$y(t) = L_1 \sin \theta (-1 + 2 \cos t - \cos 2t) + (L_1 \sin \theta + L_2 \sin 2\theta) \left(\frac{3}{2} - 2 \cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \right) \quad (12)$$

对式(11)、式(12)求导, 得到 T-PH 曲线导数的模长为

$$|P'(t)| = L_0 (2 \cos t - \sin 2t) + L_1 \cos \theta \sin 2t + L_2 (2 \sin t - \sin 2t)$$

则曲率表达式为

$$k(t) = \frac{2\sqrt{2L_0L_2} \sin \theta}{\left(L_0 (2 \cos t - \sin 2t) + \sqrt{2L_0L_2} \cos \theta \sin 2t + L_2 (2 \sin t - \sin 2t) \right)^2} \quad (13)$$

将 $t = 0, \frac{\pi}{2}$ 代入式(13)分别得到初始端点和末端点的曲率 k_0 和 k_1

$$\begin{aligned} k_0 &= k(0) = \frac{\sqrt{2L_0L_2} \sin \theta}{2L_0^2} \\ k_1 &= k\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2L_0L_2} \sin \theta}{2L_2^2} \end{aligned}$$

因为 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 所以 k_0 和 k_1 同号, 因此当两个圆互不包含时, 所构造的三次 PH 过渡曲线是 C 型的。

设 r_0 、 r_1 为是末端点的曲率半径, $r_0 > r_1$ 令 $\lambda = \frac{\sqrt{L_2}}{\sqrt{L_0}} = \sqrt[4]{\frac{r_1}{r_0}} = \sqrt{\frac{k_0}{k_1}}$ 则 $0 < \lambda < 1$ 。

定理 4 当 $r > r_0 - r_1$ 时, 即两圆不互相包含时, 若

$$0 < \cos \theta < \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda$$

则过渡曲线是一个 C 型过渡曲线。

证明: 对式(13)求导, 得到三次 T-PH 曲线的曲率导数为

$$k'(t) = \frac{-8\sqrt{2L_0L_2} \sin \theta (L_0 \sin t - L_2 \cos t + (L_0 - \sqrt{2L_0L_2} \cos \theta + L_2) \cos 2t)}{(L_0(2 \cos t - \sin 2t) + \sqrt{2L_0L_2} \cos \theta \sin 2t + L_2(2 \sin t - \sin 2t))^3} \quad (14)$$

则

$$k'(0) = \frac{-\sqrt{2L_0L_2} \sin \theta (L_0 - \sqrt{2L_0L_2} \cos \theta)}{L_0^3}$$

$$k'(1) = \frac{-\sqrt{2L_0L_2} \sin \theta (\sqrt{2L_0L_2} \cos \theta - L_2)}{L_2^3}$$

得

$$k'(0) \cdot k'(1) = \frac{2L_0L_2 \sin^2 \theta (L_0 - \sqrt{2L_0L_2} \cos \theta)(\sqrt{2L_0L_2} \cos \theta - L_2)}{(L_0L_2)^3}$$

由于 $\lambda = \sqrt{\frac{L_2}{L_0}} = \sqrt[4]{\frac{r_1}{r_0}}$, $0 < \lambda < 1$, 故当 $0 < \cos \theta < \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda$ 时,

$$(L_0 + L_2)\sqrt{2L_0L_2} \cos \theta - L_0L_2(1 + 2\cos^2 \theta) < 0,$$

即 $k'(0) \cdot k'(1) < 0$, 此时, 三次 T-PH 曲线的内部含有尽量少的曲率极值点, 且所构造的三次 T-PH 曲线是 C 型 G^2 连续的过渡曲线。

下面讨论三次 T-PH 过渡曲线的唯一性。

定理 5 设给定端点的曲率为 k_0 和 k_1 , 相应的曲率半径为 r_0 和 r_1 , 令 $\lambda = \sqrt[4]{\frac{r_1}{r_0}}$, 若

$$0.6719 < \lambda < 1$$

且

$$r_0 - r_1 < r < q(\lambda)(r_0 - r_1)$$

其中

$$q(\lambda) = \sqrt{\frac{2\lambda^8 - 3\lambda^6 + 4\lambda^4 - 3\lambda^2 + 2}{2(1 - \lambda^4)^2}}$$

若所构造的三次 T-PH 过渡曲线符合上述条件, 则该曲线是唯一的。

证明: 由图 2 知, 两圆的圆心分别为 $C_0(0, r_0)$, $C_1(x_3 - r_1 \sin 2\theta, y_3 + r_1 \cos 2\theta)$, 则圆心距 $\overline{C_0C_1} = C_1 - C_0 = (x_3 - r_1 \sin 2\theta, y_3 + r_1 \cos 2\theta - r_0)$, 设圆心距长度为 r , 则 $|C_1 - C_0| = r$ 。

由始末端点曲率 k_0 和 k_1 及 $\lambda = \sqrt[4]{\frac{r_1}{r_0}}$ 可得

$$L_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda r_0 \sin \theta, \quad (15)$$

$$L_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \lambda^3 r_0 \sin \theta, \quad (16)$$

由 $L_1 = \sqrt{2L_0L_2}$, 得

$$L_1 = \lambda^2 r_0 \sin \theta \quad (17)$$

构造函数 $g(\theta) = |C_1 - C_0|^2 - r^2$, 令 $h = \cos \theta$, 则 $0 < h < 1$ 。将式(10)中 T-PH 曲线的控制顶点代入 $g(\theta)$ 中, 得到关于 h 的方程

$$\begin{aligned} g(h) = & -2\lambda^4 r_0^2 h^4 + \sqrt{2}\lambda^3 r_0^2 (\lambda^2 + 1)h^3 + \frac{3}{2}\lambda^2 r_0^2 \left(\left(\lambda^4 - \frac{4}{3}\lambda^2 + 1 \right) + 1 \right) h^2 \\ & - \sqrt{2}\lambda^3 r_0^2 (\lambda^2 + 1)h + r_0^2 \left(\lambda^8 - \frac{3}{2}\lambda^6 + 2\lambda^4 - \frac{3}{2}\lambda^2 + 1 \right) - r^2 \\ = & 0 \end{aligned}$$

因为 $0 < h = \cos \theta < \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda$, 考虑 $g(h)$ 在 $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right)$ 上的情况:

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right) &= \frac{9\lambda^8 - 10\lambda^6 + 11\lambda^4 - 6\lambda^2 + 4}{4(1-\lambda^4)^2} (r_1 - r_0)^2 - r^2, \\ g(0) &= \frac{2\lambda^8 - 3\lambda^6 + 4\lambda^4 - 3\lambda^2 + 2}{2(1-\lambda^4)^2} (r_1 - r_0)^2 - r^2, \end{aligned}$$

由零点定理, $g(h) = 0$ 有解的充分条件为 $g(0) \cdot g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right) < 0$ 。

由 $0 < \lambda < 1$ 得 $0 < \frac{\sqrt{9\lambda^8 - 10\lambda^6 + 11\lambda^4 - 6\lambda^2 + 4}}{2(1-\lambda^4)} < 1$, 因为 $r > r_0 - r_1$, 所以 $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right) < 0$, 从而 $g(0) > 0$ 。

经计算, 当 $0.6719 < \lambda < 1$ 时, $g(0) > 0$ 成立, 此时 $g(h)$ 在 $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right)$ 有根。

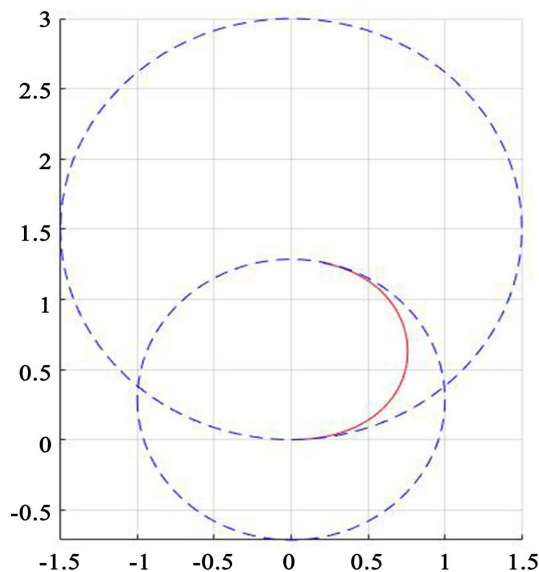


Figure 3. Cubic T-PH transition curves between two circles that do not contain each other

图 3. 互不包含的两圆之间的三次 T-PH 过渡曲线

接下来讨论 h 的唯一性:

$g''(h)$ 是关于 h 的二次多项式, 且开口向下, 另外 $g''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right) = 3\lambda^2 r_0^2 \left(\frac{2}{3}\lambda^2 + 1\right) > 0$,

$g''(0) = 3\lambda^2 r_0^2 \left(\left(\lambda^2 - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}\right) > 0$, 所以 $g'(h)$ 是增函数, 又 $g'(0) < 0$, $g(0) > 0$, $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right) < 0$, 因此 $g(h)$ 在 $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\lambda\right)$ 有唯一的根。

5. 数值例子

取 $P_0(0,0)$, $r_0=1.5$, 由 $0.6719 < \lambda < 1$, 取 $r_1=1$, 计算得出过渡曲线两端点的曲率圆的圆心距范围为 $r_0 - r_1 < r < q(\lambda)(r_0 - r_1)$, 取 $r = 2.5(r_0 - r_1)$, 解得 $\theta = 1.5484$, 生成的三次 T-PH 过渡曲线如图 3 所示。

6. 总结

本文基于三角多项式空间, 给出了三次 T-Bézier 曲线成为 T-PH 曲线的几何特征。本文研究的另一个问题, 即利用三次 T-PH 曲线的几何特征, 构造了互不包含的两圆之间的三次 T-PH 过渡曲线, 由于过渡曲线次数较低, 所以计算方便, 易在 CAD 中实现。

参考文献

- [1] Farouki, R.T. and Sakkalis, T. (1990) Pythagorean Hodographs. *IBM Journal of Research and Development*, **34**, 736-752. <https://doi.org/10.1147/rd.345.0736>
- [2] Chen, Q. and Wang, G. (2003) A Class of Bézier-Like Curves. *Computer Aided Geometric Design*, **20**, 29-39. [https://doi.org/10.1016/S0167-8396\(03\)00003-7](https://doi.org/10.1016/S0167-8396(03)00003-7)
- [3] 李毓君, 方林聪. Pythagorean Hodograph C-曲线的几何构造方法[J]. 数学学报(中文版), 2023, 66(2): 353-362.
- [4] Li, Y.J. and Wang, G.Z. (2005) Two Kinds of B-Basis of the Algebraic Hyperbolic Space. *Journal of Zhejiang University—Science*, **6**, 750-759. <https://doi.org/10.1631/jzus.2005.A0750>
- [5] 廖莲星. 三次 Pythagorean-hodograph 曲线的造型研究[D]: [硕士学位论文]. 镇江: 江苏大学, 2023.
- [6] 苏本跃, 黄有度. 一类 Bézier 型的三角多项式曲线[J]. 高等学校计算数学学报, 2005(3): 14-20.
- [7] Meek, D.S. and Walton, D.J. (1989) The Use of Cornu Spirals in Drawing Planar Curves of Controlled Curvature. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **25**, 69-78. [https://doi.org/10.1016/0377-0427\(89\)90076-9](https://doi.org/10.1016/0377-0427(89)90076-9)
- [8] Walton, D.J. and Meek, D.S. (1998) Planar G^2 Curve Design with Spiral Segments. *Computer-Aided Design*, **30**, 529-538. [https://doi.org/10.1016/S0010-4485\(98\)00007-4](https://doi.org/10.1016/S0010-4485(98)00007-4)
- [9] Walton, D.J. and Meek D.S. (1999) A Pythagorean Hodograph Quintic Spiral. *Computer-Aided Design*, **28**, 943-950. [https://doi.org/10.1016/0010-4485\(96\)00030-9](https://doi.org/10.1016/0010-4485(96)00030-9)
- [10] Walton, D.J. and Meek D.S. (1998) G^2 Curves Composed of Planar Cubic and Pythagorean Hodograph Quintic Spirals. *Computer Aided Geometric Design*, **15**, 547-566. [https://doi.org/10.1016/S0167-8396\(97\)00028-9](https://doi.org/10.1016/S0167-8396(97)00028-9)
- [11] Walton, D.J. and Meek, D.S. (2007) G^2 Curve Design with a Pair of Pythagorean Hodograph Quintic Spirals. *Computer Aided Geometric Design*, **24**, 267-285. <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2007.03.003>
- [12] 高晖, 寿华好, 缪永伟, 等. 3 个控制顶点的类三次 Bézier 螺线[J]. 中国图象图形学报, 2014, 19(11): 1677-1683.
- [13] 蔡华辉, 王国瑾, 三次 C-Bézier 螺线的构造及其在道路设计中的应用[J]. 浙江大学学报(工学版), 2010, 44(1): 68-74.
- [14] 蔡华辉, 柳炳祥, 程燕. 三次平面 H-Bézier 螺线[J]. 图形学报, 2014, 35(3): 374-378.
- [15] 王子洋. 基于类 Bézier 曲线的过渡曲线的研究[D]: [硕士学位论文]. 合肥: 合肥工业大学, 2018.
- [16] 郑志浩, 汪国昭. 三次 PH 曲线的曲率单调性及过渡曲线构造[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2014, 26(8): 1219-1224.
- [17] 刘莹莹, 王旭辉. 平面三次 PH 过渡曲线的构造[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2016, 39(9): 1288-1291.