

# 玫瑰花窗图 $R_{3k}(1,3)$ 的交叉数

张瑜洁

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2024年1月28日; 录用日期: 2024年2月22日; 发布日期: 2024年2月29日

---

## 摘要

图的交叉数是图论中一个重要的部分。近百年来, 国内外很多学者都对图的交叉数这一问题进行研究, 但由于证明难度较大, 国内外关于图的交叉数领域的研究进展缓慢。本文主要对玫瑰花窗图  $R_{3k}(1,3)$  的交叉数进行研究。首先根据好的画法得到  $R_{3k}(1,3)$  的交叉数上界; 再将  $R_{3k}(1,3)$  的边集分成边不相交的  $3k$  组, 利用反证法和数学归纳法, 讨论所有可能情况, 证得  $R_{3k}(1,3)$  的交叉数下界至少是  $2k$ , 从而得到  $cr(R_{3k}(1,3)) \geq 2k$ ,  $k \geq 3$ 。

---

## 关键词

玫瑰花窗图, 交叉数, 好画法

---

# The Crossing Number of Rose Windows Graph $R_{3k}(1,3)$

Yujie Zhang

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Jan. 28<sup>th</sup>, 2024; accepted: Feb. 22<sup>nd</sup>, 2024; published: Feb. 29<sup>th</sup>, 2024

---

## Abstract

Crossing number of graphs is an important part of graph theory, and many scholars at home and abroad have studied the problem of crossing number of graphs in the past hundred years, but due to the difficulty of proving it, the progress of domestic and foreign research on the field of crossing number of graphs has been slow. This paper focuses on the study of the crossing number of rose window graphs  $R_{3k}(1,3)$ . Firstly, we get the upper bound of the crossover number of  $R_{3k}(1,3)$

based on the well-drawn method; then divide the set of edges of  $R_{3k}(1,3)$  into the  $3k$  groups whose edges do not intersect, and using the inverse method and the mathematical induction method, all possible cases are discussed, so that we can prove that the lower bound of the crossover number of  $R_{3k}(1,3)$  is at least  $2k$ , and thus we can prove that  $cr(R_{3k}(1,3)) \geq 2k$ ,  $k \geq 3$ .

## Keywords

Rose Windows Graph, Crossing Number, Good Drawing

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

图的交叉数是图论中一个重要的部分。近百年来，国内外很多学者都对图的交叉数这一问题进行研究。图的交叉数问题的研究，起源于 20 世纪 40 年代砖厂遇到的难题。第二次世界大战时期，Turán [1] 发现运砖车沿铁轨向仓库运砖时，车很容易在铁轨交点的位置脱节。他因此想到通过减少铁轨交叉个数来降低损失的方法，交叉数的概念由此而来。研究图的交叉数是一项富有意义但充满挑战性的工作。其实，在 1983 年，Garey 和 Johnson [2] 已经证明了确定一个图的交叉数是 NP-完全问题。由于证明难度较大，国内外关于图的交叉数领域的研究进展缓慢。下面主要介绍广义 Petersen 图的研究成果。

## 广义 Petersen 图

最早研究广义 Petersen 图在 1981 年，Exoo C, Harary 和 Kabel [3] 对图的交叉数进行研究，得出：

$$\begin{cases} cr(P(3h,3)) = h, h \geq 4, \\ cr(P(3h+1,3)) \geq h+3, h \geq 3, \\ cr(P(3h+2,3)) = h+2, h \geq 2. \end{cases}$$

1986 年 Fiorini [4] 给出广义 Petersen 图  $P(n,3)$  的交叉数的证明，但是，Richter 和 Salazar [5] 随后指出其证明存在错误，他们证明广义 Petersen 图  $P(n,3)$  的交叉数为：

$$\begin{cases} cr(P(3h,3)) = h, h \geq 4, \\ cr(P(3h+1,3)) \geq h+3, h \geq 3, \\ cr(P(3h+2,3)) = h+2, h \geq 2. \end{cases}$$

2004 年，林晓惠 [6] 得出了  $P(4k+2,2k)$  等部分广义 Petersen 图的交叉数的上界；2005 年，马登举等人证明了  $G(2m+1,m)$  的交叉数 [7]；2009 年，杨元生等人利用算法给出了  $n \geq 16$  时  $P(n,k)$  的交叉数的精确值 [8]；Fiorini 和 黄元秋 等人分别用不同方法证明了  $P(3k,k)$  的交叉数 [9]；2013 年，郑百功证明了  $P(10,3)$  的交叉数 [10]。2019 年，Gauci 和 Xuereb [11] 证明了当  $k \geq 3$  时有：

$$\begin{aligned} cr(GP(3k-1,k)) &= k+1, \\ cr(GP(3k+1,k)) &= k+3. \end{aligned}$$

2020 年, 历莹[12]通过研究  $P(12,5)$  的子图的性质, 证明得出  $P(12,5)$  的交叉数的下界至少是 6, 进而提出猜想: 当  $k \geq 5$  时,  $cr(P(2k+2,k)) \geq k+1$ 。2023 年, 卢妮[13]证明了 Chimani 的猜想: 当  $k \geq 5$  时, 有  $cr(P(4k,4)) = 2k$ 。2023 年, 白贺[14]在其硕士论文中证明了双广义 Petersen 图的交叉数  $cr(DP(7,1)) = 7$ 。

## 2. 玫瑰花窗图 $R_{3k}(1,3)$ 的定义

为方便书写, 下文将玫瑰花窗图  $R_{3k}(1,3)$  记作  $R_{3k}(1,3)$ , 其中  $k \geq 3$ 。设  $R_{3k}(1,3)$  的顶点集为  $V(R_{3k}(1,3)) = \{a_i, b_i : 1 \leq i \leq 3k\}$ , 边集为  $E(R_{3k}(1,3)) = \{a_i a_{i+1}, a_i b_i, b_i b_{i+3}, b_i a_{i+1} : 1 \leq i \leq 3k\}$ , 其中下标取模  $3k$ 。

设  $G$  是一个简单图。 $G$  的一个分解是  $G$  的边不相交子图的列表, 使得  $G$  的每条边都出现在列表中的一个子图中。如果对于每对整数  $i$  和  $j$ ,  $1 \leq i, j \leq t$ ,  $G$  存在一个自同构  $\theta_{i,j}$ , 使得  $uv \in E(H_{i+\ell})$  当且仅当  $\theta_{i,j}(u)\theta_{i,j}(v) \in E(H_{j+\ell})$ , 则称图  $G$  的一个分解  $\{H_1, H_2, \dots, H_t\}$  是可传递的, 其中下标取  $t$  的模。如果存在图  $G$  的一个传递分解, 则称图  $G$  是广义周期图。

设  $V(T_i) = \{a_i, b_i, a_{i+1} : 1 \leq i \leq 3k\}$ , 且  $T_i$  为三角形  $a_i b_i a_{i+1}$ 。设  $B_i$  为领结图  $T_{i-1} \cup T_i$ ,  $1 \leq i \leq 3k$ 。设  $E_i$  的顶点集为  $V(E_i) = V(T_i) \cup \{b_{i+3}\}$ , 边集为  $E(E_i) = E(T_i) \cup \{b_i b_{i+3}\}$ ,  $1 \leq i \leq 3k$ 。显然  $\{E_1, E_2, \dots, E_{3k}\}$  是  $R_{3k}(1,3)$  的一个可传递分解, 其中  $k \geq 3$ 。因此  $R_{3k}(1,3)$  是一个广义周期图。设  $V(H_i) = V(E_i) \cup \{a_{i+2}, a_{i+3}\}$  且  $E(H_i) = E(E_i) \cup \{a_{i+1} a_{i+2}, a_{i+2} a_{i+3}, a_{i+3} b_{i+3}\}$ ,  $1 \leq i \leq 3k$ 。

对于图  $G$ , 设  $H$  是  $G$  的子图且  $f_D(H)$  是  $H$  到所有非负实数集合的映射:

$$f_D(H) = cr_D(H) + cr_D(H, G \setminus E(H)) / 2.$$

**Jordan 曲线定理** 任意一条简单(自身不相交)闭曲线  $J$  把平面分成两个区域, 在不同区域的两点若要相连, 则连结的弧必与  $J$  相交。

根据 Jordan 曲线定理, 我们有以下引理:

**引理 2.1** 在图  $G$  中, 设  $C$  和  $C'$  为两个顶点不相交的圈,  $P_k = u_1 u_2 \dots u_k$  为  $k$  阶路径且  $V(P_k) \cap V(C) = \emptyset$ 。假设  $D$  是  $G$  的一个好画法, 则  $cr_D(C, C')$  为偶数; 当  $u_1$  和  $u_k$  在  $D(C)$  的同一区域时,  $cr_D(C, P_k)$  为偶数, 否则为奇数。

**引理 2.2** 设  $c$  是一个正整数, 对于  $1 \leq i \leq t$ , 若存在一个正整数  $l_i$  满足  $f_D(H_{i,i-1+l_i}) \geq l_i c$ , 则令  $L_i^D$  为  $l_i$  的最小值使  $f_D(H_{i,i-1+l_i}) \geq l_i c$ ; 若不存在这样的正整数  $l_i$ , 则令  $L_i^D = +\infty$ 。

## 3. 玫瑰花窗图 $R_{3k}(1,3)$ 的交叉数

### 3.1. 玫瑰花窗图 $R_{3k}(1,3)$ 的交叉数的上界

**引理 3.1**  $cr(R_9(1,3)) = 6$ 。

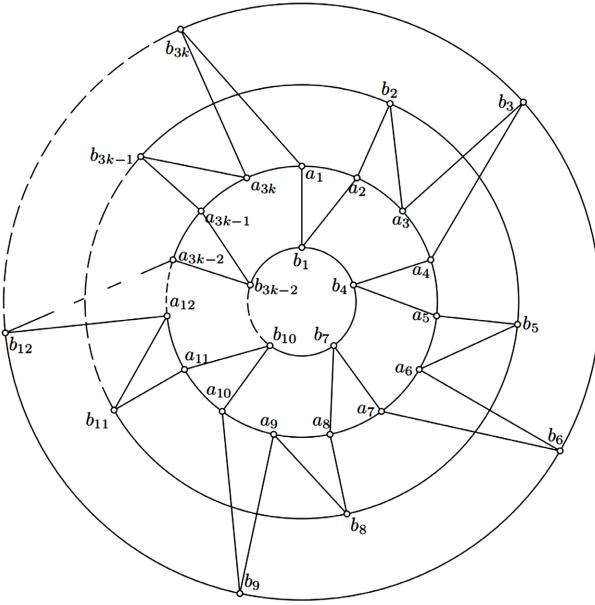
**引理 3.2** 对于  $k \geq 3$ ,  $cr(R_{3k}(1,3)) \leq 2k$ 。

**证明:** 如图 1 所示, 给出了  $R_{3k}(1,3)$  的一个只有  $2k$  个交叉数的好画法。因此, 当  $k \geq 3$  时,  $cr(R_{3k}(1,3)) \leq 2k$ 。

### 3.2. 玫瑰花窗图 $R_{3k}(1,3)$ 的交叉数的下界

**引理 3.3 (领结引理)** 设  $1 \leq i \leq 3k$ ,  $D$  是  $B_i$  的一个好画法且  $cr_D(B_i) = 1$ 。则  $a_{i+1}$  和  $b_i$  被  $D(T_{i-1})$  分离或  $a_{i-1}$  和  $b_{i-1}$  被  $D(T_i)$  分离。

**证明:** 假设  $a_{i+1}$  和  $b_i$  在  $D(T_{i-1})$  划分平面的同一区域。若  $cr_D(a_{i+1} b_i, T_{i-1}) \geq 1$ , 由引理 2.1,  $cr_D(a_{i+1} b_i, T_{i-1}) \geq 2$ , 这与  $cr_D(B_i) = 1$  矛盾。因此  $cr_D(a_{i+1} b_i, T_{i-1}) = 0$ 。由  $cr_D(B_i) = 1$  知  $cr_D(b_i a_i a_{i+1}, T_{i-1}) = 1$ 。又由于  $D$  是好的画法, 所以  $cr_D(a_{i-1} b_{i-1}, b_i a_i a_{i+1}) = 1$ 。因此,  $a_{i-1}$  和  $b_{i-1}$  被  $D(T_i)$  分离。



**Figure 1.** A good drawing of with  $2k$  crossings  
**图 1.** 有  $2k$  个交叉点的好画法

**引理 3.4** 设  $D$  是  $R_{3k}(1,3)$  的一个好画法且  $cr(R_{3k}(1,3)) < 2k$ ， $k \geq 3$ 。若  $l_1^D \geq 4$ ，那么  $cr_D(B_3, E_1) = 0$ ；  
 $cr_D(B_i) = 0$ ， $2 \leq i \leq 3$ ； $cr_D(T_i, T_j) = 0$ ， $3 \leq j \leq 3k$ 。

证明：由  $l_1^D \geq 4$ ，有  $f_D(E_1) < \frac{2}{3}$ ， $f_D(E_{1,2}) < 4/3$ ， $f_D(E_{1,3}) < 2$ 。反证法。假设  $cr_D(T_i, T_j) \geq 1$ ， $3 \leq j \leq 3k$ 。

由引理 2.1 可知  $cr_D(T_i, T_j) \geq 2$ ，与  $f_D(E_1) < 2/3$  相矛盾。因此  $cr_D(T_i, T_j) = 0$ ， $3 \leq j \leq 3k$ 。

假设  $cr_D(B_2) \geq 1$ 。由  $f_D(E_{1,2}) < \frac{4}{3}$ ，有  $cr_D(B_2) = 1$ 。根据引理 3.3， $a_3$  和  $b_2$  被  $D(T_1)$  分离或  $a_1$  和  $b_1$  被  $D(T_2)$  分离。由引理 2.1，若  $a_3$  和  $b_2$  被  $D(T_1)$  分离，路径  $a_3a_4a_5b_2$  与  $T_1$  相交；若  $a_1$  和  $b_1$  被  $D(T_2)$  分离，路径  $b_1b_{3k-2}a_{3k-1}a_{3k}a_1$  与  $T_2$  相交。两种情形均有  $f_D(E_{1,2}) \geq \frac{4}{3}$ ，矛盾。因此  $cr_D(B_2) = 0$ 。

假设  $cr_D(B_3) \geq 1$ 。由  $f_D(E_{1,3}) < 2$ ，有  $cr_D(B_3) = 1$ 。根据引理 3.3， $a_4$  和  $b_3$  被  $D(T_2)$  分离或  $a_2$  和  $b_2$  被  $D(T_3)$  分离。由引理 2.1，若  $a_4$  和  $b_3$  被  $D(T_2)$  分离，路径  $b_3b_6a_5a_4$  和  $b_3b_{3k}a_{3k}a_{3k-1}b_{3k-2}P_1b_4a_4$  与  $T_2$  相交；若  $a_2$  和  $b_2$  被  $D(T_3)$  分离，路径  $b_2b_5a_6b_6P_3b_{3k}a_1$  和  $b_2b_{3k-1}a_{3k-1}a_{3k}a_1$  与  $T_3$  相交。两种情形均有  $f_D(E_{1,3}) \geq 2$ ，矛盾。因此  $cr_D(B_3) = 0$ 。

假设  $cr_D(B_3, E_1) = 1$ ，则有  $cr_D(T_2, E_1) \geq 1$  或  $cr_D(T_3, E_1) \geq 1$ 。假设  $cr_D(T_2, E_1) \geq 1$ 。由  $f_D(E_{1,2}) < \frac{4}{3}$ ，有  $cr_D(T_2, E_1) = 1$ 。根据  $cr_D(B_2) = 0$  知  $cr_D(b_1b_4, T_2) = 1$ 。由引理 2.1， $b_1$  和  $b_4$  被  $D(T_2)$  分离且路径  $b_1b_{3k-2}P_1b_4$  交  $T_2$ ，则  $f_D(E_{1,2}) \geq \frac{4}{3}$ ，矛盾。因此  $cr_D(T_2, E_1) = 0$ 。假设  $cr_D(T_3, E_1) \geq 1$ 。由  $cr_D(T_1, T_3) = 0$  及  $f_D(E_1) < \frac{2}{3}$ ，有  $cr_D(b_1b_4, T_3) = 1$ 。根据引理 2.1， $b_1$  和  $b_4$  被  $D(T_3)$  分离，且由  $cr_D(T_1, T_3) = 0$  有  $a_1$  和  $b_4$  被  $D(T_3)$  分离。由引理 2.1，路径  $a_1b_{3k}b_3a_3a_4a_5b_4$  和  $a_1P_0a_8b_7b_4$  与  $T_3$  相交，与  $f_D(E_{1,3}) < 2$  矛盾。因此  $cr_D(T_3, b_1b_4) = 1$ 。即  $cr_D(T_3, E_1) = 0$ 。由于  $cr_D(T_2, E_1) = 0$ ，因此  $cr_D(B_3, E_1) = 0$ 。

**引理 3.5(画法引理)** 设  $D$  是  $R_{3k}(1,3)$  的一个好画法使得  $cr(R_{3k}(1,3)) < 2k$ ，且  $cr(R_{3(k-1)}(1,3)) \geq 2(k-1)$ ， $k \geq 3$ 。若路径  $a_i b_i a_{i+1} b_{i+1} a_{i+2} b_{i+2} a_{i+3}$  上有  $m$  个交叉点，则路径  $a_i a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3}$  上至少有  $m-1$  个交叉点；若路径  $b_i a_{i+1} b_{i+1} a_{i+2} b_{i+2} a_{i+3} b_{i+3}$  上有  $m$  个交叉点，则路径  $b_i b_{i+3}$  上至少有  $m-1$  个交叉点。其中  $m \geq 2$ ， $1 \leq i \leq 3k$ 。

**引理 3.6** 设  $D$  是  $R_{3k}(1,3)$  的一个好画法使得  $cr(R_{3k}(1,3)) < 2k$ ，且  $cr(R_{3(k-1)}(1,3)) \geq 2(k-1)$ ， $k \geq 3$ 。若  $l_1^D \geq 5$ ，则  $D(H_1)$  同构于图 3。

子情形一： $b_2$  在区域  $R_2$ 。

证明：通过  $l_1^D \geq 5$ ，得到  $f_D(E_1) < \frac{2}{3}$ ， $f_D(E_{1,2}) < \frac{4}{3}$ ， $f_D(E_{1,3}) < 2$ ， $f_D(E_{1,4}) < \frac{8}{3}$ 。由引理 3.4 知，

$cr_D(B_3, E_1) = 0$ ， $cr_D(T_1, T_j) = 0$ ， $3 \leq j \leq 3k$ ，即有  $cr_D(E_1, a_2 a_3 a_4 b_4) = 0$ 。再根据好的画法的定义，有  $cr_D(a_2 a_3, a_4 b_4) \leq 1$ 。当  $cr_D(a_2 a_3, a_4 b_4) = 1$  时， $D(H_1)$  同构于图 2(a) 或图 2(b)。

由于  $cr_D(a_2 a_3, a_4 b_4) = 1$ ，根据引理 2.1， $cr_D(T_2, T_4) \geq 2$ 。若  $D(H_1)$  同构于图 2(a)，由引理 2.1，路径  $a_1 b_{3k} b_3 a_3$  和  $a_1 a_{3k} b_{3k-1} P_2 b_2 a_3$  与  $H_1$  相交，则  $f_D(E_{1,4}) \geq \frac{8}{3}$ ，矛盾。若  $D(H_1)$  同构于图 2(b)，由  $f_D(E_{1,4}) < \frac{8}{3}$  可知， $cr_D(a_2 b_2 a_3, a_4 b_4) \leq 1$ 。若  $cr_D(a_2 b_2 a_3, a_4 b_4) = 1$ ，由画法引理(引理 3.5)可知， $a_2 a_3 a_4 a_5$  和  $b_1 b_4$  都不干净。因此， $f_D(E_{1,4}) \geq \frac{8}{3}$ ，矛盾。故  $cr_D(a_2 b_2 a_3, a_4 b_4) = 0$ ，即  $cr_D(a_2 b_2 a_3, H_1) = 0$ 。因此  $D(H_1 \cup T_2) = 0$  同构于图 2(c)。由引理 2.1，路径  $a_1 b_{3k} b_3 a_4$  和  $a_1 a_{3k} P_0 a_4$  与  $T_2$  相交，则  $f_D(E_{1,4}) \geq \frac{8}{3}$ ，矛盾。因此， $cr_D(a_2 a_3, a_4 b_4) = 0$ 。

即  $cr_D(H_1) = 0$  且  $D(H_1)$  同构于图 3。

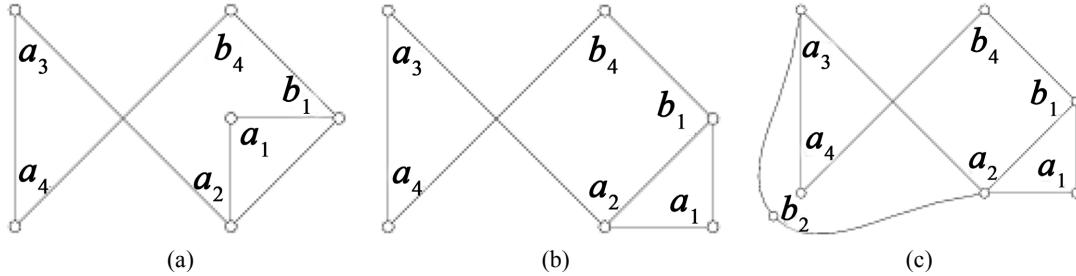


Figure 2.  $D(H_1)$  and  $cr_D(H_1) = 1$

图 2.  $D(H_1)$  且  $cr_D(H_1) = 1$

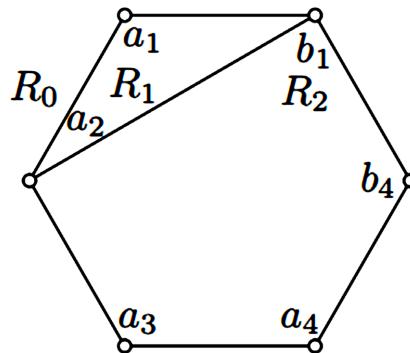


Figure 3.  $D(H_1)$  and  $cr_D(H_1) = 0$

图 3.  $D(H_1)$  且  $cr_D(H_1) = 0$

**引理 3.7** 设  $D$  是  $R_{3k}(1,3)$  的一个好画法且  $cr(R_{3k}(1,3)) < 2k$ ， $k \geq 3$ 。若  $D(H_1)$  同构于图 3， $b_2$  在区域  $R_2$  且  $l_1^D \geq 5$ ，则  $D(H_1 \cup T_2 \cup B_4)$  同构于图 5。

证明：通过  $l_1^D \geq 5$ ，得到  $f_D(E_1) < \frac{2}{3}$ ， $f_D(E_{1,2}) < \frac{4}{3}$ ， $f_D(E_{1,3}) < 2$ ， $f_D(E_{1,4}) < \frac{8}{3}$ 。由引理 2.1，路径

$b_2b_8a_9P_0a_{3k}a_1$  和  $b_2b_5a_6b_6P_3a_1$  交圈  $b_4b_1a_2a_3a_4b_4$ 。若  $cr_D(a_4b_4, T_2) \geq 1$ ，则由引理 2.1 可知  $cr_D(T_2, T_4) \geq 2$ 。因此， $f_D(E_{1,4}) \geq \frac{8}{3}$ ，矛盾。故  $cr_D(a_4b_4, T_2) = 0$  即  $cr_D(T_2, T_4) = 0$ 。根据引理 3.4， $cr_D(T_2, E_1) = 0$  且  $cr_D(B_3) = 0$ 。因此  $D(H_1 \cup T_2)$  同构于图 4(a)。

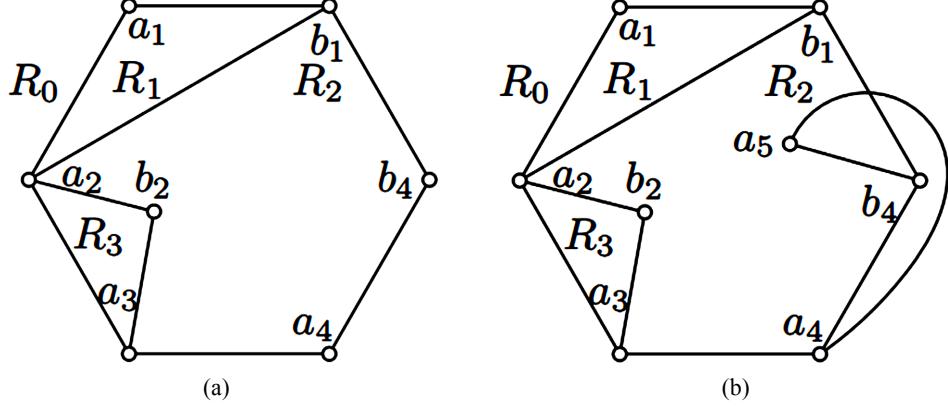


Figure 4. The subdrawing of  $D$   
图 4.  $D$  的子画法

由  $f_D(E_{1,4}) < \frac{8}{3}$  可知， $cr_D(B_4) \leq 1$ 。若  $cr_D(B_4) = 1$ ，根据引理 3.3， $a_3$  和  $b_3$  被  $D(T_4)$  分离或  $a_5$  和  $b_4$  被  $D(T_3)$  分离。若  $a_3$  和  $b_3$  被  $D(T_4)$  分离，又由于  $cr_D(B_3) = 0$  且  $cr_D(B_3, E_1) = 0$ ，则  $b_1$  和  $b_3$  位于  $D(T_4)$  划分平面的不同区域。由引理 2.1，路径  $b_1b_{3k-2}P_1b_7a_7b_6b_3$  与  $T_4$  相交。由  $f_D(E_{1,4}) < \frac{8}{3}$  可知， $cr_D(b_2b_5, H_1 \cup T_2 \cup B_4) = 0$ 。因此  $b_3$  和  $b_5$  位于  $D(T_4)$  划分平面的不同区域。同理由引理 2.1，路径  $b_5b_8a_8a_9b_9P_4b_{3k}b_3$  与  $T_4$  相交。因此， $f_D(E_{1,4}) \geq \frac{8}{3}$ ，矛盾。若  $a_5$  和  $b_4$  被  $D(T_3)$  分离，根据引理 2.1，路径  $a_5a_6a_7b_7b_4$  与  $T_3$  相交。又由于  $cr_D(T_3, E_1) = 0$ ，同理由引理 2.1，路径  $b_1b_{3k-2}P_1b_7a_8b_8b_5a_5$  与  $T_3$  相交。因此， $f_D(E_{1,4}) \geq \frac{8}{3}$ ，矛盾。故  $cr_D(B_4) = 0$ 。

若  $cr_D(b_1b_4, T_4) = 1$ 。根据好的画法有  $cr_D(b_1b_4, a_4a_5) = 1$  且  $a_5$  位于区域  $R_2$  或  $R_0$ 。由引理 2.1，路径  $b_2b_8a_9P_0a_{3k}a_1$  和  $b_2b_5a_6b_6P_3a_1$  交圈  $b_4b_1a_2a_3a_4b_4$ 。根据  $f_D(E_{1,2}) < \frac{4}{3}$ ，有

$cr_D(b_2b_8a_9P_0a_{3k}a_1 \cup b_2b_5a_6b_6P_3a_1, b_4b_1a_2a_3) \leq 1$ 。不失一般性，假设  $cr_D(b_2b_8a_9P_0a_{3k}a_1, a_3a_4b_4) = 1$ 。根据引理 3.4， $cr_D(B_3) = 0$  且  $cr_D(T_3, T_1) = 0$ 。因此  $b_2$  和  $a_1$  位于  $D(T_3)$  划分平面的同一区域。同理，由  $cr_D(T_4, T_1) = 0$  和  $cr_D(T_2, T_4) = 0$  可知， $b_2$  和  $a_1$  位于  $D(T_4)$  划分平面的同一区域。根据引理 2.1，若

$cr_D(b_2b_8a_9P_0a_{3k}a_1, a_3a_4b_4) = 1$ ，则  $cr_D(b_2b_8a_9P_0a_{3k}a_1, B_4) \geq 2$ 。当  $a_5$  在区域  $R_0$  时，由  $f_D(E_{1,4}) < \frac{8}{3}$  可知，

$cr_D(b_2b_5, H_1 \cup T_2 \cup B_4) = 0$ ，因此  $b_5$  位于区域  $R_2$  或  $R_3$ 。这两种情形，由引理 2.1 均有路径  $a_5b_5$  与  $H_1 \cup T_2 \cup B_4$  相交。因此， $f_D(E_{1,4}) \geq \frac{8}{3}$ ，矛盾。当  $a_5$  在区域  $R_2$  时， $D(H_1 \cup T_2 \cup T_4)$  同构于图 4(b)。根据引理 2.1 可知，

路径  $a_5P_0a_{3k}a_1$  和  $a_5b_5a_6b_6P_3b_{3k}a_1$  交圈  $b_2a_2b_1b_4a_4a_3b_2$ 。同理于上述情形，

$cr_D(a_5P_0a_{3k}a_1 \cup a_5b_5a_6b_6P_3b_{3k}a_1, b_1a_2) = 0$ ，且  $cr_D(a_5P_0a_{3k}a_1 \cup a_5b_5a_6b_6P_3b_{3k}a_1, T_2) \geq 2$ ，

$cr_D(a_5P_0a_{3k}a_1 \cup a_5b_5a_6b_6P_3b_{3k}a_1, B_4) \geq 2$ 。因此， $f_D(E_{1,4}) \geq \frac{8}{3}$ ，矛盾。故  $cr_D(b_1b_4, T_4) = 0$ 。 $D(H_1 \cup T_2 \cup B_4)$

同构于图 5。

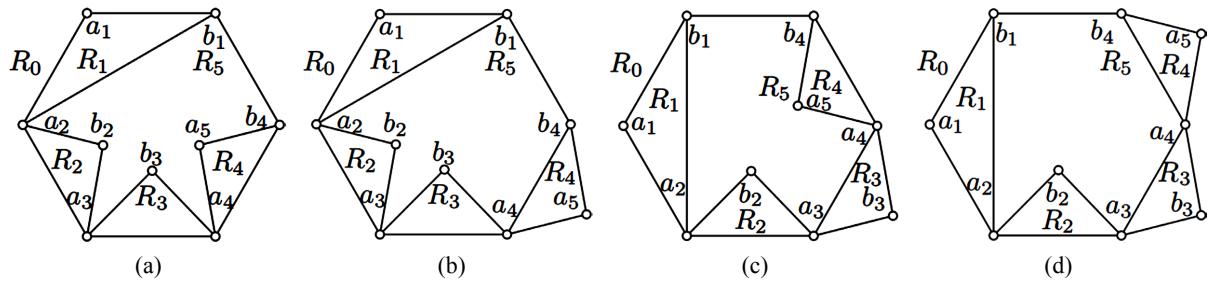


Figure 5.  $D(H_1 \cup T_2 \cup B_4)$  and  $b_2$  are in area  $R_2$

图 5.  $D(H_1 \cup T_2 \cup B_4)$  且  $b_2$  在区域  $R_2$

**引理 3.8** 设  $D$  是  $R_{3k}(1,3)$  的一个好画法使得  $cr(R_{3k}(1,3)) < 2k$ ，且  $cr(R_{3(k-1)}(1,3)) \geq 2(k-1)$ ， $k \geq 3$ 。若  $D(H_1 \cup T_2 \cup B_4)$  同构于图 5，则  $l_1^D \geq 5$ 。

情形 1,  $D(H_1 \cup T_2 \cup B_4)$  同构于图 5(a);

情形 2,  $D(H_1 \cup T_2 \cup B_4)$  同构于图 5(b) 或 图 5(c);

情形 3,  $D(H_1 \cup T_2 \cup B_4)$  同构于图 5(d)。

子情形二:  $b_2$  在区域  $R_0$ 。

通过上述证明, 当  $k \geq 3$  时, 总有  $cr(R_{3k}(1,3)) \geq 2k$  成立。

## 4. 结论

本文利用反证法和数学归纳法证明玫瑰花窗图  $R_{3k}(1,3)$  的交叉数。根据好的画法的定义, 给出了玫瑰花窗图  $R_{3k}(1,3)$  的交叉数为  $2k$  的一个好画法, 从而得到玫瑰花窗图  $R_{3k}(1,3)$  的交叉数上界; 由于玫瑰花窗图  $R_{3k}(1,3)$  是广义周期图的一种, 因此利用广义周期图的性质对图  $R_{3k}(1,3)$  的边集进行分类, 结合计数公式, 利用所得的限制条件, 探究每组边上的交叉计数, 最终证得玫瑰花窗图  $R_{3k}(1,3)$  的交叉数下界。由此得到  $cr(R_{3k}(1,3)) = 2k$ ,  $k \geq 3$ 。

## 参考文献

- [1] Turan, P. (1997) A Note of Welcome. *Journal of Graph Theory*, **1**, 7-9. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190010105>
- [2] Garey, M.R. and Johnson, D.S. (1993) Crossing Number Is NP-Complete. *SIAM Journal on Algebraic & Discrete Methods*, **1**, 312-316. <https://doi.org/10.1137/0604033>
- [3] Exoo, Geoffrey, Harary, et al. (1981) The Crossing Numbers of Some Generalized Petersen Graphs. *Mathematica Scandinavica*, **48**, 184-188. <https://doi.org/10.7146/math.scand.a-11910>
- [4] Fiorini, S. (1986) On the Crossing Number of Generalized Petersen Graph. *Discrete Mathematic*, **30**, 221-242.
- [5] Richter, R.B. and Salazar, G. (2002) The Crossing Number of  $P(N, 3)$ . *Graphs and Combinatorics*, **18**, 381-394. <https://doi.org/10.1007/s003730200028>
- [6] 林晓惠. 图论中若干难题的研究[D]: [硕士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 2004.
- [7] 马登举, 任韩, 卢俊杰. 广义 Petersen 图  $G(2m+1, m)$  的交叉数[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2005(1): 34-39.
- [8] Lin, X.H., Yang, Y.S., Zheng, W.P., et al. (2009) The Crossing Number of Generalized Petersen Graphs with Small Order. *Discrete Applied Mathematicas*, **157**, 1016-1023. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2008.01.012>
- [9] Fiorini, S. and Gauci, J.B. (2003) The Crossing Number of the Generalized Petersen Graph  $P[3k, K]$ . *Mathematica Bohemica*, **128**, 337-347. <https://doi.org/10.21136/MB.2003.134001>
- [10] 郑百功. 冒泡排序图  $B_n$  和广义 Petersen 图  $P(10, 3)$  的交叉数[D]: [硕士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 2013.
- [11] Gauci, J.B. and Xuereb, C.Z. (2019) A Note on Isomorphic Generalized Petersen Graphs with an Application to the

Crossing Number of  $GP(3k-1, k)$  and  $GP(3k+1, k)$ . *Discrete Mathematics Letters*, 2, 44-46.

- [12] 厉莹. 一类无限图的交叉数[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2020.
- [13] 卢妮. 广义 Petersen 图  $P(4k, 4)$  的交叉数[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2023.
- [14] 白贺. 双广义 Petersen 图  $DP(2k+1, 1)$  的交叉数[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2023.