

关于不定方程

$$5x(x+1)(x+2)(x+3) = 42y(y+1)(y+2)(y+3)$$

张艺宝

西南大学数学与统计学院, 重庆

收稿日期: 2024年4月23日; 录用日期: 2024年5月17日; 发布日期: 2024年5月29日

摘要

本文运用同余式、递推序列和Pell方程等初等方法, 证明了不定方程 $5x(x+1)(x+2)(x+3) = 42y(y+1)(y+2)(y+3)$ 仅有唯一正整数解 $(x, y) = (6, 3)$, 并找出了该方程的所有整数解。

关键词

不定方程, 同余式, Pell方程, 正整数解

On the Diophantine Equation $5x(x+1)(x+2)(x+3) = 42y(y+1)(y+2)(y+3)$

Yibao Zhang

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing

Received: Apr. 23rd, 2024; accepted: May 17th, 2024; published: May 29th, 2024

Abstract

This article uses elementary methods such as congruence formula, recursive sequences, and Pell equation to prove that indefinite Diophantine equation $5x(x+1)(x+2)(x+3) = 42x(x+1)(x+2)(x+3)$ has a unique positive integer $(x, y) = (6, 3)$. Also, All 20 groups of integer solutions of the equation are found.

Keywords

Diophantine Equation, Congruence Formula, Pell Equation, Positive Integer Solution



1. 引言与结论

对于 $px(x+1)(x+2)(x+3) = qy(y+1)(y+2)(y+3)$, 其中 $(p, q) = 1, p, q \in \mathbb{N}^*$ 这类的不定方程正整数解的研究[1]-[11], 已有许多重要的结论。1971年Cohn证明了当 $p=1, q=2$ 时, 不定方程仅有一组正整数解 $(x, y) = (5, 4)$ [1]; 1982年宣体佐证明了当 $p=1, q=5$ 时, 不定方程仅有一组正整数解 $(x, y) = (1, 2)$ [2]; 1991年罗明证明了当 $p=1, q=7$ 时, 不定方程仅有正整数解 $(x, y) = (4, 2)$ [3]; 2022年谢耀兵证明了当 $p=5, q=9$ 时, 不定方程仅有正整数解 $(x, y) = (6, 5)$ [4]。但对于 $(p, q) = (5, 42)$ 时的不定方程正整数解的问题仍未解决。因此本文将在此前的基础上讨论 $(p, q) = (5, 42)$ 的情形, 证明了:

定理 不定方程

$$5x(x+1)(x+2)(x+3) = 42y(y+1)(y+2)(y+3) \quad (1)$$

仅有正整数解 $(x, y) = (6, 3)$ 。

2. 预备知识

先将方程(1)化为

$$\left[5(x^2 + 3x + 1)\right]^2 - 210(y^2 + 3y + 1)^2 = -185 \quad (2)$$

易知方程 $X^2 - 210Y^2 = -185$ 的全部整数解可由以下两个结合类给出:

$$x_n + y_n \sqrt{210} = \pm (5 + \sqrt{210}) (u_n + v_n \sqrt{210}) = \pm (5 + \sqrt{210}) (29 + 2\sqrt{210})^n \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\bar{x}_n + \bar{y}_n \sqrt{210} = \pm (-5 + \sqrt{210}) (u_n + v_n \sqrt{210}) = \pm (-5 + \sqrt{210}) (29 + 2\sqrt{210})^n \quad n \in \mathbb{N}$$

其中 $5 + \sqrt{210}$ 是方程 $X^2 - 210Y^2 = -185$ 的最小正整数解, $29 + 2\sqrt{210}$ 是Pell方程 $u^2 - 210v^2 = 1$ 的基本解[11]。易知 $\bar{y}_n = y_{-n}$, 于是方程(2)的解应该满足

$$(2y+3)^2 = \pm 4y_n + 5 \quad n \in \mathbb{N} \quad (3)$$

容易验证不定方程(1)满足下列关系式:

$$y_{n+1} = 58y_n - y_{n-1}, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = 39 \quad (4)$$

$$u_{n+1} = 58u_n - u_{n-1}, \quad u_0 = 1, \quad u_1 = 29 \quad (5)$$

$$v_{n+1} = 58v_n - v_{n-1}, \quad v_0 = 0, \quad v_1 = 2 \quad (6)$$

$$u_{2n} = u_n^2 + 210v_n^2 = 2u_n^2 - 1, \quad v_{2n} = 2u_nv_n \quad (7)$$

$$y_n = u_n + 5v_n \quad (8)$$

$$u_{n+2km} \equiv (-1)^k u_n \pmod{u_m} \quad (9)$$

$$v_{n+2km} \equiv (-1)^k v_n \pmod{u_m} \quad (10)$$

$$y_{n+2km} \equiv (-1)^k y_n \pmod{u_m} \quad (11)$$

下面本文将分两种情况讨论(3)式在 $n=0, -1$ 成立, 由此求得(2)的全部整数解, 进而求得方程(1)的全部正整数解。

3. 分类讨论

3.1. 当 $(2y+3)^2 = 4y_n + 5$ 时

此节主要是为了讨论 n 为何值时, $4y_n + 5$ 为完全平方数, 为此本文先介绍以下的几个引理。

引理 1 设 $2|m$ 且 $m > 0$, 则 $\left(\frac{\pm 20v_{2m} + 5}{u_{2m}}\right) = -\left(\frac{u_m \pm 4v_m}{113}\right)$ 。

证明 当 $2|m$ 且 $m > 0$ 时, 由(5)式可知 $2 \nmid u_m$, 且由(7)式可知 $u_{2m} = 2u_m^2 - 1 \equiv 1 \pmod{8}$; $u_m \equiv 1 \pmod{4}$, 于是有 $\left(\frac{-1}{u_m}\right) = 1$, $\left(\frac{2}{u_{2m}}\right) = 1$, $\left(\frac{5}{u_{2m}}\right) = 1$,

因此

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pm 20v_{2m} + 5}{u_{2m}}\right) &= \left(\frac{\pm 20v_{2m} + 10u_m^2}{u_{2m}}\right) = \left(\frac{\pm 40u_mv_m + 10u_m^2}{u_{2m}}\right) \\ &= \left(\frac{2}{u_{2m}}\right)\left(\frac{5}{u_{2m}}\right)\left(\frac{u_m}{u_{2m}}\right)\left(\frac{u_m \pm 4v_m}{u_{2m}}\right) = \left(\frac{-1}{u_m}\right)\left(\frac{u_{2m}}{u_m \pm 4v_m}\right) \\ &= \left(\frac{u_m^2 + 210v_m^2}{u_m \pm 4v_m}\right) = \left(\frac{210v_m^2 + (\pm 4v_m)^2}{u_m \pm 4v_m}\right) \\ &= \left(\frac{226}{u_m \pm 4v_m}\right) = \left(\frac{2}{u_m \pm 4v_m}\right)\left(\frac{113}{u_m \pm 4v_m}\right) = -\left(\frac{u_m \pm 4v_m}{113}\right) \end{aligned}$$

引理 2 若 $4y_n + 5$ 为平方数, 则 $n \equiv 0, -1 \pmod{2^3 \times 3^2 \times 5}$ 。

证明 对序列 $\{4y_n + 5\}$ 取不同的模来证明。

mod 311, 排除 $n \equiv 1, 3 \pmod{5}$, 这是因为此时 $4y_n + 5 \equiv 161, 55 \pmod{311}$, 而 161、55 为 mod 311 的平方非剩余, 故可排除 $n \equiv 1, 3 \pmod{5}$ 的情形, 剩余 $n \equiv 0, 2, 4 \pmod{5}$ 。为节省篇幅, 下面不再重复排除的原因。

mod 41, 排除 $n \equiv 1, 2, 3, 5, 6 \pmod{8}$, 剩余 $n \equiv 0, 4, 7, 12, 15, 20, 24, 32, 39 \pmod{40}$ 。

mod 661, 排除 $n \equiv 3, 4, 6, 8 \pmod{10}$, 剩余 $n \equiv 0, 7, 12, 15, 20, 32, 39 \pmod{40}$ 。

mod 239, 47279, 排除 $n \equiv 7, 12, 15 \pmod{20}$, 剩余 $n \equiv 0, 20, 39 \pmod{40}$ 。

mod 17, 11467, 排除 $n \equiv 2, 4, 5, 6, 7 \pmod{9}$, 剩余 $n \equiv 0, 39, 80, 100, 120, 180, 199, 260, 279, 280, 300, 359 \pmod{360}$ 。

mod 61, 排除 $n \equiv 5 \pmod{15}$, 剩余 $n \equiv 0, 120, 180, 300, 359 \pmod{360}$ 。

mod 37, 排除 $n \equiv 12 \pmod{36}$, 剩余 $n \equiv 0, 180, 359 \pmod{360}$ 。

下面本文将利用计算的方法排除 $n \equiv 180 \pmod{360}$ 。对于 $n \equiv 180 \pmod{360}$, 可令 $n = 360k + 180$, 若 $k = 2k_1$, 则 $n = 720k_1 + 180$ 故 $n \equiv 4 \pmod{16}$, 而对于序列 $\{4y_n + 5\}$ 取 mod 1231 就可排除 $n \equiv 4 \pmod{16}$, 若 $k = 2k_1 + 1$, 则 $n \equiv 12 \pmod{16}$, 同理对于序列 $\{4y_n + 5\}$ 取 mod 1231 也可排除 $n \equiv 12 \pmod{16}$ 。

综上所述 $n \equiv 0, -1 \pmod{2^3 \times 3^2 \times 5}$ 。

引理 3 设 $n \equiv 0 \pmod{2^3 \times 3^2 \times 5}$, 则 $4y_n + 5$ 为平方数当且仅当 $n = 0$ 。

证明 若 $n \neq 0$, 因为 $n \equiv 0 \pmod{2^3 \times 3^2 \times 5}$, 则可令 $n = 2 \times (4k \pm 1) \times 3^2 \times 5 \times 2^t$, $t \geq 2$ 。若现取 m 为 $2^t, 3 \times 2^t, 5 \times 2^t$ 之一, 则由(8)和(11)以及引理 2 可得

$$4y_n + 5 \equiv 4u_n + 20v_n + 5 \equiv \pm 20v_{2m} + 5 \pmod{u_{2m}}$$

$$\text{所以} \left(\frac{4y_n + 5}{u_{2m}} \right) = \left(\frac{\pm 20v_{2m} + 5}{u_{2m}} \right) = - \left(\frac{u_m \pm 4v_m}{113} \right)。$$

$\{u_m \pm 4v_m\}$ 对 $\text{mod } 113$ 的剩余序列周期为 56, 而 $\{2^t\}$ 对 $\text{mod } 56$ 的剩余序列周期为 3。

情况 1 对 $\{u_m + 4v_m\}$, 选择具体的 m 如下:

$$m = \begin{cases} 2^t, & t \equiv 0 \pmod{3} \\ 5 \times 2^t, & t \equiv 1 \pmod{3} \\ 3 \times 2^t, & t \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

则有表 1。

Table 1. The situation of $u_m + 4v_m \pmod{113}$

表 1. $u_m + 4v_m \pmod{113}$ 的情形

$t \geq 2 \pmod{3}$	0	1	2
$m \pmod{56}$	8	24	12
$u_m + 4v_m \pmod{113}$	69	64	2

表 1 中所有的 $u_m + 4v_m$ 均为 $\text{mod } 113$ 的平方剩余, 即以上所有的 m 均有 $\left(\frac{u_m + 4v_m}{113} \right) = 1$, 故 $\left(\frac{4y_n + 5}{u_{2m}} \right) = -1$, 由此可知 $4y_n + 5$ 不是平方数。

情况 2 对 $\{u_m - 4v_m\}$, 选择具体的 m 如下:

$$m = \begin{cases} 2^t, & t \equiv 1, 2 \pmod{3} \\ 5 \times 2^t, & t \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

同理可知此时所有 $u_m - 4v_m$ 均为 $\text{mod } 113$ 的平方剩余, 由此得 $4y_n + 5$ 不是平方数。综上**情况 1**和**情况 2**可知与条件 $4y_n + 5$ 为平方数矛盾。故 $n = 0$ 。

反之当 $n = 0$ 时, 显然 $4y_n + 5 = 3^2$ 是一个平方数。因此, 引理 4 得证。

引理 4 设 $n \equiv -1 \pmod{2^3 \times 3^2 \times 5}$, 则 $4y_n + 5$ 为平方数当且仅当 $n = -1$ 。

证明 若 $n \neq -1$, 因为 $n \equiv -1 \pmod{2^3 \times 3^2 \times 5}$, 则可令 $n = -1 + 2 \times (4k \pm 1) \times 3^2 \times 5 \times 2^t$, $t \geq 2$ 。又由(11)式可得

$$4y_n + 5 = 4y_{-1+2 \times (4k \pm 1) \times 3^2 \times 5 \times 2^t} + 5 \equiv -4y_{-1} + 5 \pmod{u_m}$$

而其中 $y_{-1} = 19$, 则 $\left(\frac{4y_n + 5}{u_m} \right) = \left(\frac{-71}{u_m} \right) = \left(\frac{u_m}{71} \right)$ 。对于序列 $\{u_m\}$ 对 $\text{mod } 71$ 的剩余周期为 36, $\{2^t\}$ 对 $\text{mod } 36$ 的剩余序列周期为 6, 于是对于序列 $\{u_m\}$, 我们可以选择具体的 m 如下:

$$m = 2^t$$

此时 $t \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5 \pmod{6}$, , 对应的 $u_m \equiv 56, 23, 63, 56, 23 \pmod{71}$ 均为 $\text{mod } 71$ 的平方非剩余; 由此可知 $4y_n + 5$ 必不可能为平方数, 这与 $4y_n + 5$ 为平方数矛盾。因此 $n = -1$ 。反之, 若 $n = -1$, 则显然

$4y_n + 5 = 9^2$ 是一个平方数。引理 5 得证。

3.2. 当 $(2y + 3)^2 = -4y_n + 5$ 时

引理 5 $-4y_n + 5$ 是平方数当且仅当 $n = 0$ 。

证明 当 $n \neq 0$ 时, 此时 $y_n > 1$, 故 $-4y_n + 5 < 0$, 这与 $-4y_n + 5$ 是一个平方数矛盾; 若 $n = 0$, 则此时 $-4y_n + 5 = -4y_0 + 5 = 1^2$ 是一个平方数。

4. 定理证明

定理 不定方程 $5x(x+1)(x+2)(x+3) = 42y(y+1)(y+2)(y+3)$ 仅有一组正整数解 $(x, y) = (6, 3)$ 。

证明 由引理 1 知 $(2y+3)^2 = -4y_0 + 5 = 1$, 因此 $y = -1$ 或者 -2 , 此时相应的整数解为 $(-3, -2), (-2, -2), (-1, -2), (0, -2), (-3, -1), (-2, -1), (-1, -1), (0, -1)$ 。

由引理 4 知 $(2y+3)^2 = 4y_0 + 5 = 9$, 因此 $y = 0$ 或者 -3 , 此时相应的整数解为 $(-3, -3), (-2, -3), (-1, -3), (0, -3), (-3, 0), (-2, 0), (-1, 0), (0, 0)$ 。

由引理 5 知 $(2y+3)^2 = 4y_{-1} + 5 = 81$, 因此 $y = 3$ 或者 -6 , 此时相应的整数解为 $(-9, -6), (-9, 3), (6, -6), (6, 3)$ 。

综上所述, 不定方程 $5x(x+1)(x+2)(x+3) = 42y(y+1)(y+2)(y+3)$ 仅有一组正整数解 $(x, y) = (6, 3)$, 定理得证。

参考文献

- [1] Cohn, J.H.E. (1971) The Diophantine Equation $x(x+1)(x+2)(x+3) = 2y(y+1)(y+2)(y+3)$. *Pacific Journal of Mathematics*, 37, 331-335. <https://doi.org/10.2140/pjm.1971.37.331>
- [2] 宣体佐. 关于不定方程 $5x(x+1)(x+2)(x+3) = y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 1982(3): 27-34.
- [3] 罗明. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3) = 7y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 重庆师范学院学报(自然科学版), 1991(1): 1-8.
- [4] 谢耀兵. 关于不定方程 $5x(x+1)(x+2)(x+3) = 9y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 数学实践与认识, 2022, 52(5): 246-249.
- [5] 王聪. 关于不定方程 $3x(x+1)(x+2)(x+3) = 10y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2016, 33(1): 29-32.
- [6] 李妮. 关于不定方程 $5x(x+1)(x+2)(x+3) = 14y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 广西师范学院学报(自然科学版), 2017, 34(4): 41-45.
- [7] 孙浩久. 关于不定方程 $3x(x+1)(x+2)(x+3) = 14y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2017, 42(4): 1-6.
- [8] 林丽娟, 罗明. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3) = 35y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 数学实践与认识, 2020, 50(15): 307-313.
- [9] 刘海丽, 罗明. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3) = 35y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2016, 38(10): 42-46.
- [10] 卢安然. 关于不定方程 $3x(x+1)(x+2)(x+3) = 10y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 数学实践与认识, 2023, 53(11): 265-270.
- [11] 柯召, 孙琦. 谈谈不定方程[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2011: 15-29.