Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(5), 2191-2198
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.135208

分数阶Kirchhoff-Schrödinger-Poisson系统解的存在性

张召翔

兰州理工大学，理学院，甘肃 兰州

收稿日期：2024年4月29日；录用日期：2024年5月22日；发布日期：2024年5月30日

摘　要

本文研究如下分数阶Kirchhoff-Schrödinger-Poisson系统

$$\begin{cases} \left(a + b\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx\right)(-\Delta)^s u + u + Q(x)\phi u = W(x)|u|^{p-1}u, & x \in \mathbb{R}^3, \\ (-\Delta)^t \phi = Q(x)u^2, & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

非平凡解的存在性，其中 $a, b > 0$，$\frac{3s+4t}{s+t} < p < \frac{3+2s}{3-2s}$，$s, t \in (0,1)$ 且 $4s + 2t > 3$，$W(x) \in C(\mathbb{R}^3)$ 变号且 $\lim_{|x|\to\infty} W(x) = W_\infty < 0$，$Q(x) \in C(\mathbb{R}^3) \cap L^{\frac{6}{4s+2t-3}}(\mathbb{R}^3)$。应用山路引理，本文得到该系统至少存在一个非平凡解。

关键词

分数阶Kirchhoff-Schrödinger-Poisson系统，变号权，变分法

Existence of Nontrivial Solution for a Class of Fractional Kirchhoff-Schrödinger-Poisson System

Zhaoxiang Zhang

School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu

文章引用: 张召翔. 分数阶Kirchhoff-Schrödinger-Poisson系统解的存在性[J]. 应用数学进展, 2024, 13(5): 2191-2198. DOI: 10.12677/aam.2024.135208

Received: Apr. 29th, 2024; accepted: May 22nd, 2024; published: May 30th, 2024

Abstract

In this paper, we study the existence of nontrivial solution for fractional Kirchhoff-Schrödinger-Poisson system:

$$\begin{cases} \left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2dx\right)(-\Delta)^s u+u+Q(x)\phi u=W(x)|u|^{p-1}u, & x\in\mathbb{R}^3, \\ (-\Delta)^t\phi=Q(x)u^2, & x\in\mathbb{R}^3, \end{cases}$$

where $a,b>0$**,** $\frac{3s+4t}{s+t}<p<\frac{3+2s}{3-2s}$**,** $s,t\in(0,1)$ **and** $4s+2t>3$**,** $W(x)\in C(\mathbb{R}^3)$ **is a sign-changing function with** $\lim_{|x|\to\infty}W(x)=W_\infty<0$**,** $Q(x)\in C(\mathbb{R}^3)\cap L^{\frac{6}{4s+2t-3}}(\mathbb{R}^3)$**. By using mountain pass lemma, we obtain that this system has at least one nontrivial solution.**

Keywords

Fractional Kirchhoff-Schrödinger-Poisson System, Sign-Changing Weight, Variation Methods

1. 引言

在本文中, 考虑下面分数阶Kirchhoff-Schrödinger-Poisson系统解的存在性

$$\begin{cases} \left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u|^2dx\right)(-\Delta)^s u+u+Q(x)\phi u=W(x)|u|^{p-1}u, & x\in\mathbb{R}^3, \\ (-\Delta)^t\phi=Q(x)u^2, & x\in\mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $a,b>0$, $\frac{3s+4t}{s+t}<p<\frac{3+2s}{3-2s}$, $s,t\in(0,1)$ 且 $4s+2t>3$, $W(x)$ 和 $Q(x)$ 满足:
(A1) $W(x)\in C(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ 为一类变号函数且满足 $W_\infty=\lim_{|x|\to\infty}W(x)<0$.
(A2) $Q(x)\in C(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$, $Q(x)\geq 0$ 且 $Q(x)\in L^{\frac{6}{4s+2t-3}}(\mathbb{R}^3)$.

当$s=t=1, Q(x)\equiv 0$时, 系统(1)来源于一般的Kirchhoff方程. 对于Kirchhoff型问题解的存在性等问题的研究, 学者们做了大量的研究, 并得出了一系列结果, 如参考文献 [1–6] 和其中的参考文

献. 特别地, 在文献 [7]中, 陈莉萍讨论了Kirchhoff方程

$$-\left(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2dx\right)\Delta u+u=W(x)|u|^{p-1}u,\ \ x\in\mathbb{R}^3, \tag{2}$$

非平凡解的存在性. 在允许$W(x)$可变号的条件下, 应用山路引理 [8], 作者得到了方程(2)至少有一个非平凡解的存在性结果.

当$a=1,b=0,s=1,t=1$时, 系统(1)来源于经典的Schrödinger-Poisson系统 [9,10]. 注意到，在文献 [11]中，当$W(x)$可变号时余晓辉研究了Schrödinger-Poisson系统

$$\begin{cases} -\Delta u+u+Q(x)\phi u=W(x)|u|^{p-1}u,\ \ x\in\mathbb{R}^3,\\ -\Delta\phi=Q(x)u^2,\ \ x\in\mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{3}$$

非平凡解的存在性. 最近, 孟娟霞 [12]将文献 [11]中的结果推广到下面的分数阶Schrödinger-Poisson系统

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u+u+Q(x)\phi u=W(x)|u|^{p-1}u,\ \ x\in\mathbb{R}^3,\\ (-\Delta)^t\phi=Q(x)u^2,\ \ x\in\mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{4}$$

其中 $s,t\in(0,1)$, 分数阶 Laplacian 算子 $(-\Delta)^s$ 定义为

$$(-\Delta)^s v(x)=C_{N,s}P.V.\int_{\mathbb{R}^N}\frac{v(x)-v(y)}{|x-y|^{N+2s}}\mathrm{d}y,\ v\in\mathbb{S}(\mathbb{R}^N),$$

此处 $P.V.$ 表示柯西主值, $C_{N,s}$ 是标准化常数, $\mathbb{S}(\mathbb{R}^N)$ 是由快速衰减函数组成的施瓦茨函数空间. 更多有关 $(-\Delta)^s$ 信息, 请参考 [13–15] 及其中的参考文献. 受以上文献的启发, 我们讨论分数阶Kirchhoff-Schrödinger-Poisson系统(1)非平凡解的存在性. 本文的主要结果为:

定理1.1. 假设(A1), (A2)成立, 则分数阶Kirchhoff-Schrödinger-Poisson系统 (1) 至少存在一个非平凡解.

2. 定理1.1的证明

$H^s(\mathbb{R}^3)$是分数阶Sobolev空间，其内积和范数定义如下

$$(u,v)=\int_{\mathbb{R}^3}(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(-\Delta)^{\frac{s}{2}}v+uvdx,\qquad \|u\|=(u,u)^{\frac{1}{2}}.$$

令$H\subset H^s(\mathbb{R}^3)$，其内积和范数定义如下

$$(u,v)_1=\int_{\mathbb{R}^3}a(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u(-\Delta)^{\frac{s}{2}}v+uvdx,\qquad \|u\|_1=(u,u)_1^{\frac{1}{2}}.$$

$D^{t,2}(\mathbb{R}^3)$是分数阶Sobolev空间，其内积和范数定义如下

$$(u,v)_2=\int_{\mathbb{R}^3}(-\Delta)^{\frac{t}{2}}u(-\Delta)^{\frac{t}{2}}vdx,\qquad \|u\|_2=(u,u)_2^{\frac{1}{2}}.$$

$L^p(\mathbb{R}^3)$是勒贝格空间，其范数定义如下

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

令

$$W(x) = W^+(x) - W^-(x),$$

其中

$$W^+(x) = \begin{cases} W(x), & \text{如果} W(x) \geq 0, \\ 0, & \text{如果} W(x) < 0, \end{cases} \tag{5}$$

和

$$W^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果} W(x) \geq 0, \\ -W(x), & \text{如果} W(x) < 0. \end{cases} \tag{6}$$

对于固定的 $u \in H^s(\mathbb{R}^3)$, 定义 $D^{t,2}(\mathbb{R}^3)$ 上的线性算子

$$E_u(v) = \int_{\mathbb{R}^3} Q(x)u^2 v dx,$$

那么就有

$$\begin{aligned} |E_u(v)| &\leq \int_{\mathbb{R}^3} Q(x)u^2|v|dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} Q(x)^{\frac{6}{4s+2t-3}} dx\right)^{\frac{4s+2t-3}{6}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} u^{\frac{6}{3-2s}}\right)^{\frac{3-2s}{3}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} v^{2_t^*}\right)^{\frac{1}{2_t^*}} \\ &\leq C\|Q(x)\|_{L^{\frac{6}{4s+2t-3}}(\mathbb{R}^3)} \|u\|^2 \|v\|_2. \end{aligned}$$

因此由 Riesz 表示定理可知, 存在唯一的 $\phi_u \in D^{t,2}(\mathbb{R}^3)$, 使得

$$(\phi_u, v)_2 = E_u(v), \ \ \forall v \in D^{t,2}(\mathbb{R}^3),$$

即

$$\int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta)^{\frac{t}{2}} \phi_u (-\Delta)^{\frac{t}{2}} v dx = \int_{\mathbb{R}^3} Q(x)u^2 v dx, \ \ \forall v \in D^{t,2}(\mathbb{R}^3),$$

也就是说 ϕ_u 是(1)中第二个方程的弱解. 将 ϕ_u 带入第一个方程就得到

$$\left(a + b\int_{\mathbb{R}^3} |(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u|^2 dx\right)(-\Delta)^s u + u + Q(x)\phi_u u = W(x)|u|^{p-1}u. \tag{7}$$

因此求解方程(1)等价于求解方程(7). 而方程(7)的解对应能量泛函

$$F(u) = \frac{1}{2}\|u\|_1^2 + \frac{b}{4}\|u\|_2^4 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} Q(x)\phi_u u^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3} W(x)|u|^{p+1}dx, \ \ u \in H^s(\mathbb{R}^3)$$

的临界点.

定义 T: $H^s(\mathbb{R}^3)\to D^{t,2}(\mathbb{R}^3)$ 为 $T(u)=\phi_u$, 根据文献 [11,12]则有下面引理.

引理2.1. **[11,12]**

(i) T 连续.

(ii) T 将有界集映到有界集.

(iii) 若 $\{u_n\}$ 在 $H^s(\mathbb{R}^3)$ 中有界且 $u_n\rightharpoonup u$, 那么有

$$\int_{\mathbb{R}^3}Q(x)\phi_{u_n}u_n^2dx\to\int_{\mathbb{R}^3}Q(x)\phi_u u^2dx.$$

引理2.2. 泛函 F 满足$(PS)_c$条件.

证: 设 $\{u_n\}\subset H^s(\mathbb{R}^3)$ 满足 $|F(u_n)|\le c$ 和 $F'(u_n)\to 0$, 那么有

$$\|u_n\|_1^2+b\|u_n\|_2^4+\int_{\mathbb{R}^3}Q(x)\phi_{u_n}u_n^2dx-\int_{\mathbb{R}^3}W(x)|u_n|^{p+1}dx=o(1)\|u_n\|,\tag{8}$$

$$\frac{1}{2}\|u_n\|_1^2+\frac{b}{4}\|u_n\|_2^4+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}Q(x)\phi_{u_n}u_n^2dx-\frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3}W(x)|u_n|^{p+1}dx\le c.$$

利用上面两式进一步得到

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\|u_n\|_1^2+b\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{p+1}\right)\|u_n\|_2^4+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{p+1}\right)\int_{\mathbb{R}^3}Q(x)\phi_{u_n}u_n^2dx\le c+o(1)\|u_n\|.$$

因为 $p>\frac{3s+4t}{s+t}$, 所以有

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\min\{a,1\}\|u_n\|^2\le c+o(1)\|u_n\|.$$

由上式知 $\{u_n\}$ 有界. 因此我们可以假定 $u_n\rightharpoonup u$以及

$$\int_{\mathbb{R}^3}|(-\Delta)^{\frac{s}{2}}u_n|^2dx\to A\quad 当\quad n\to\infty.$$

下面证明 $u_n\to u$. 由(5),(6)及(8), 我们有

$$\|u_n\|_1^2+b\|u_n\|_2^4+\int_{\mathbb{R}^3}Q(x)\phi_{u_n}u_n^2dx+\int_{\mathbb{R}^3}W^-(x)|u_n|^{p+1}dx=\int_{\mathbb{R}^3}W^+(x)|u_n|^{p+1}dx+o(1).$$

由$F^{'}(u_n)\to 0$及 $u_n\rightharpoonup u$, 对于任意$v\in H^s(\mathbb{R}^3)$ 可得

$$(u,v)_1+bA(u,v)_2+\int_{\mathbb{R}^3}Q(x)\phi_u u^2dx+\int_{\mathbb{R}^3}W^-(x)|u|^{p+1}dx=\int_{\mathbb{R}^3}W^+(x)|u|^{p+1}dx+o(1).$$

取$v = u$，可以得到

$$\|u\|_1^2 + bA\|u\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}^3} Q(x)\phi_u u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} W^-(x)|u|^{p+1} dx = \int_{\mathbb{R}^3} W^+(x)|u|^{p+1} dx + o(1).$$

由于 $\lim_{|x|\to\infty} W(x) = W_\infty < 0$, 因此 $W^+(x)$ 有紧支集, 进而应用索伯列夫嵌入定理可得

$$\int_{\mathbb{R}^3} W^+(x)|u_n|^{p+1} dx = \int_{\mathbb{R}^3} W^+(x)|u|^{p+1} dx + o(1).$$

综合以上讨论可知

$$\begin{aligned}
&\|u_n\|_1^2 + b\|u_n\|_2^4 + \int_{\mathbb{R}^3} Q(x)\phi_{u_n} u_n^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} W^-(x)|u_n|^{p+1} dx \\
=&\|u\|_1^2 + bA\|u\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}^3} Q(x)\phi_u u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} W^-(x)|u|^{p+1} dx + o(1).
\end{aligned} \tag{9}$$

断言

$$\int_{\mathbb{R}^3} W^-(x)|u|^{p+1} dx \le \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} W^-(x)|u_n|^{p+1} dx. \tag{10}$$

事实上由

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^3} W^-(x) \left||u_n|^{p+1} - |u|^{p+1} - |u_n - u|^{p+1}\right| dx \\
&\le \|W(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \int_{\mathbb{R}^3} \left||u_n|^{p+1} - |u|^{p+1} - |u_n - u|^{p+1}\right| dx \\
&= o(1)
\end{aligned}$$

知

$$\int_{\mathbb{R}^3} W^-(x)|u_n|^{p+1} dx = \int_{\mathbb{R}^3} W^-(x)|u|^{p+1} dx + \int_{\mathbb{R}^3} W^-(x)|u_n - u|^{p+1} dx + o(1),$$

即断言成立.

如果 $u_n \nrightarrow u$, 那么 $\|u\| + o(1) < \|u_n\|$, 进而$\|u\|_{L_2} + o(1) < \|u_n\|_{L_2}$和$\|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u\|_{L_2} + o(1) < \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} u_n\|_{L_2}$至少有一个是成立的. 再由引理2.1(iii) 和 (10)知

$$\begin{aligned}
&\|u_n\|_1^2 + b\|u_n\|_2^4 + \int_{\mathbb{R}^3} Q(x)\phi_{u_n} u_n^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} W^-(x)|u_n|^{p+1} dx \\
>&\|u\|_1^2 + bA\|u\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}^3} Q(x)\phi_u u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} W^-(x)|u|^{p+1} dx + o(1).
\end{aligned}$$

这与 (9) 式矛盾, 因此 $u_n \to u$, 证毕.

定理1.1的证明: 首先证明存在 $\alpha, \rho > 0$ 使得 $F_{\partial B_\rho} > \alpha > 0$. 考虑到$p > \frac{3s+4t}{s+t}$, 根据索伯列夫嵌入定理可得

$$F(u) \ge \frac{1}{2}\min\{a, 1\}\|u\|^2 - C\|W\|_{L^\infty}\|u\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^3)}^{p+1},$$

DOI: 10.12677/aam.2024.135208

由上式可知存在 $\alpha, \rho > 0$, 使得 $F_{\partial B_\rho} > \alpha > 0$.

其次, 证明存在 $\eta \in H^s(\mathbb{R}^3)$, $\|\eta\| > \rho$, 使得 $F(\eta) < 0$. 选取函数 $\varphi \in H^s(\mathbb{R}^3)$, 使得 $supp\varphi \subset suppW^+$, 那么就有

$$F(\lambda\varphi) = \frac{\lambda^2}{2}\|\varphi\|_1^2 + \frac{\lambda^4 b}{4}\|\varphi\|_2^4 + \frac{\lambda^4}{4}\int_{\mathbb{R}^3} Q(x)\phi_\varphi \varphi^2 dx - \frac{\lambda^{p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3} W(x)|\varphi|^{p+1} dx.$$

因为 $p > \frac{3s+4t}{s+t}$, 所以 $p+1 > \frac{4s+5t}{s+t} > 4$. 当 $\lambda \to +\infty$ 时, $F(\lambda\varphi) \to -\infty$. 因此, 对某个 λ_0 充分大时, 令 $\eta = \lambda_0\varphi$, 所以有 $F(\eta) < 0$. 定义

$$\Sigma = \{\gamma \in C([0,1], H^s(\mathbb{R}^3)) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = \eta\},$$
$$c = \inf_{\gamma\in\Sigma} \sup_{\lambda\in[0,1]} F(\gamma(\lambda)),$$

那么由引理2.2和山路引理 [8]知 c 是 F 的一个非平凡临界点, 即分数阶Kirchhoff-Schrödinger-Poisson系统 (1) 至少存在一个非平凡解.

3. 总结

本文利用山路引理得到了具有变号权的分数阶 Kirchhoff-Schrödinger-Poisson 系统至少存在一个非平凡解. 其主要思路是找到一个 $(PS)_c$ 序列, 进而可以证明该方程非平凡解的存在性. 同文献 [12]相比, 本文加入了一个非局部项的扰动, 使得研究的问题更加复杂, 同时对该方程非平凡解的存在性证明产生了较大的困难. 虽然本文应用变分方法得到了该方程非平凡解的存在性, 但是对非平凡解的其他更精细的性质却未做研究. 在今后我们将考虑该方程非平凡解的其他性质和当 $Q(x)$ 和 $W(x)$ 同时变号时方程非平凡解的存在性.

参考文献

[1] Deng, Y.B., Peng, S.J. and Shuai, W. (2015) Existence and Asymptotic Behavior of Nodal Solutions for the Kirchhoff-Type Problems in $\mathbb{R}^3$. *Journal of Functional Analysis*, **269**, 3500-3527. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2015.09.012

[2] He, Y. (2016) Concentrating Bounded States for a Class of Singularly Perturbed Kirchhoff Type Equations with a General Nonlinearity. *Journal of Differential Equations*, **261**, 6178-6220. https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.08.034

[3] Li, G. and Ye, H. (2014) Existence of Positive Ground State Solutions for the Nonlinear Kirchhoff Type Equations in $\mathbb{R}^3$. *Journal of Differential Equations*, **257**, 566-600. https://doi.org/10.1016/j.jde.2014.04.011

[4] Mao, A. and Chang, H. (2016) Kirchhoff Type Problems in $\mathbb{R}^N$ with Radial Potentials and Locally Lipschitz Functional. *Applied Mathematics Letters*, **62**, 49-54. https://doi.org/10.1016/j.aml.2016.06.014

[5] Wang, D.B. (2020) Least Energy Sign-Changing Solutions of Kirchhoff-Type Equation with Critical Growth. *Journal of Mathematical Physics*, **61**, Article 011501. https://doi.org/10.1063/1.5074163

[6] Xie, Q., Ma, S., Zhang, X. (2016) Bound State Solutions of Kirchhoff Type Problems with Critical Exponent. *Journal of Differential Equations*, **261**, 890-924. https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.03.028

[7] 陈莉萍. 一类带变号权Kirchhoff方程解的存在性[J]. 应用数学进展, 2023, 12(4): 1567-1573. https://doi.org/10.12677/AAM.2023.124161

[8] Willem, M. (1996) Minimax Theorems. Birkhäuser, Boston. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4146-1

[9] Cerami, G. and Vaira, G. (2010) Positive Solutions for Some Non-Autonomous Schrödinger-Poisson Systems. *Journal of Differential Equations*, **248**, 521-543. https://doi.org/10.1016/j.jde.2009.06.017

[10] Yu, X.H. (2011) Existence of Solutions for Schrödinger-Poisson Systems with Sign-Changing Weight. *Journal of Partial Differential Equations*, **24**, 180-194. https://doi.org/10.4208/jpde.v24.n2.7

[11] 余晓辉. 一类薛定谔-泊松方程解的存在性[J]. 应用数学, 2010, 23(3): 648-652.

[12] 孟娟霞. 一类分数阶薛定谔-泊松系统非平凡解的存在性[J]. 应用数学进展, 2023, 12(4): 1704-1712. https://doi.org/10.12677/AAM.2023.124177

[13] Laskin, N. (2000) Fractional Quantum Mechanics and Lévy Path Integrals. *Physics Letters A*, **268**, 298-305. https://doi.org/10.1016/S0375-9601(00)00201-2

[14] Laskin, N. (2002) Fractional Schrödinger Equation. *Physical Review E*, **66**, 56-108. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.66.056108

[15] Bisci, G.M., Rădulescu, V.D. and Servadei, R. (2016) Variational Methods for Nonlocal Fractional Problems. Cambridge University Press, Cambridge.