Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(5), 2053-2061
Published Online May 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.135192

一类带变号权 Kirchhoff-Poisson 系统非平凡解的存在性

马银兰

兰州理工大学理学院，甘肃 兰州

收稿日期：2024年4月23日；录用日期：2024年5月17日；发布日期：2024年5月28日

摘　要

应用山路引理, 本文研究 Kirchhoff-Poisson 系统

$$\begin{cases} -(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2dx)\Delta u+u+K(x)\phi u=P(x)|u|^{p-1}u, & x\in\mathbb{R}^3, \\ -\Delta\phi=K(x)u^2, & x\in\mathbb{R}^3, \end{cases}$$

非平凡解的存在性，其中 $a,b>0, 3<p<5$，$P(x)\in C(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ 且 $\lim_{|x|\to\infty}P(x)=P_\infty<0$，$K(x)\in C(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ 且 $K(x)\in L^2(\mathbb{R}^3)$。

关键词

Kirchhoff-Poisson系统，变号权，非平凡解

Existence of Nontrivial Solution for a Class of Kirchhoff-Poisson System with Sign-Changing Weight

Yinlan Ma

School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu

文章引用: 马银兰. 一类带变号权 Kirchhoff-Poisson 系统非平凡解的存在性[J]. 应用数学进展, 2024, 13(5): 2053-2061. DOI: 10.12677/aam.2024.135192

Received: Apr. 23^{rd}, 2024; accepted: May 17^{th}, 2024; published: May 28^{th}, 2024

Abstract

By using mountain pass theorem, we are concerned with the existence of nontrivial solution of Kirchhoff-Poisson system in this paper:

$$\begin{cases} -(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2dx)\Delta u+u+K(x)\phi u=P(x)|u|^{p-1}u, & x\in\mathbb{R}^3, \\ -\Delta\phi=K(x)u^2, & x\in\mathbb{R}^3, \end{cases}$$

where $a,b>0, 3<p<5$**,** $P(x)\in C(\mathbb{R}^3)$ **is a sign-changing function with** $\lim_{|x|\to\infty}P(x)=P_\infty<0$**,** $k(x)\in C(\mathbb{R}^3)\cap L^2(\mathbb{R}^3)$**.**

Keywords

Kirchhoff-Poisson System, Sign-Changing Weight, Nontrivial Solution

1. 引言

在本文中，考虑如下 Kirchhoff-Poisson 系统

$$\begin{cases} -(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2dx)\Delta u+u+K(x)\phi u=P(x)|u|^{p-1}u, & x\in\mathbb{R}^3, \\ -\Delta\phi=K(x)u^2, & x\in\mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{1}$$

非平凡解的存在性, 其中 $a,b>0, 3<p<5$, $P(x)$ 是可变号的连续函数, $K(x)$ 是非负的连续函数.

当 $K(x)=0$ 时问题 (1) 源于如下的 Kirchhoff 方程

$$-(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2dx)\Delta u=f(x,u). \tag{2}$$

自 Lions 的先驱性工作 [1]以来, 许多学者讨论了 Kirchhoff 问题 [2]或类似问题的基态解, 束缚态解, 半经典态解的存在性、多解性等问题, 可以参考文献 [2–5].然而, 据我们所知对于带有变号权的

Kirchhoff 方程非平凡解的存在性的研究比较少. Xie 和 Chen 在文献 [6]中考虑了下面的 Kirchhoff 方程

$$\begin{cases} -M(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)\Delta u = Q_\lambda(x)|u|^{q-2}u + K(x)|u|^{2^*-2}u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^N(N \geq 3)$ 中的有界光滑区域, $1 < q < 2$, $M(s) = a + bs^\beta$, $\beta > 0$, a, $b > 0$, $Q_\lambda(x)$, $K(x)$ 是连续的变号权. Xie 与 Chen 利用 Nehari 流形、纤维映射、Ljusternik-Schnirelmann 范畴、山路引理和 Ekeland 变分原理等方法, 证明了方程 (3) 至少存在两个正解或者三个正解的存在性.

在文献 [7]中, Xu 等人考虑了下面的 Kirchhoff 方程

$$\begin{cases} -(a(x) + b(x)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx)\Delta u = \lambda m(x)u + h(x)u^p, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^N(N = 2, 3)$ 中的有界区域且是 C^2 的, a, b, m, $h \in L^\infty(\Omega)$, 对 $x \in \overline{\Omega}$ 有 $a(x)$, $b(x) > 0$. 当 m 和 h 可变号时, 作者研究了方程 (4) 正解集的局部和全局分岔结构, 并得到了方程 (4) 正解的存在性和多重性结果.

我们注意到, 文献 [6, 7]中主要针对了有界区域上的带有变号权的 Kirchhoff 方程. 然而, 对于全空间上带有变号权的非平凡解的研究却很少. 在文献 [8]中, Yu 考虑了全空间上的 Schrödinger-Poisson 系统

$$\begin{cases} -\Delta u + u + \phi u = a(x)|u|^{p-1}u, \ x \in \mathbb{R}^3, \\ -\Delta\phi = k(x)u^2, \ x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

其中 $3 \leq p < 5$, $k(x) \in L^2(\mathbb{R}^3) \cap C(\mathbb{R}^3)$, $a(x)$ 是一个连续的变号函数且 $\lim\limits_{|x|\to\infty} a(x) = a_\infty < 0$. 作者利用山路引理论证了该方程至少存在一个非平凡解.

最近, 当 $K(x) = 0$ 且 $P(x)$ 是可变号的连续函数时, 受文献 [8]的启发, Chen 在 [9] 中考虑了如下的 Kirchhoff 方程

$$-(a + b\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx)\Delta u + u = V(x)|u|^{p-1}u, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

其中 $a, b > 0$, $3 < p < 5$, $V(x)$ 是一个连续的变号权. 作者利用山路引理和 Sobolev 不等式证明了该方程至少存在一个非平凡解.

受以上文献的启发, 本文考虑全空间上 Kirchhoff-Poisson 系统 (1) 非平凡解的存在性.

本文的主要结果为如下定理:

定理1.1. 假设 $P(x)$ 和 $K(x)$ 满足

(A1) $P(x) \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ 且满足 $P_\infty = \lim_{|x|\to\infty} P(x) < 0$,

(A2) $K(x) \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $K(x) \geq 0$ 且 $K(x) \in L^2(\mathbb{R}^3)$,

则 Kirchhoff-Poisson 系统 (1) 至少存在一个非平凡解.

2. 定理1.1的证明

$H^1(\mathbb{R}^3)$ 是 Sobolev 空间, 其内积和范数定义如下

$$(u,v)=\int_{\mathbb{R}^3}\nabla u\nabla v+uvdx,\qquad \|u\|=(u,u)^{\frac{1}{2}}.$$

令

$$P(x)=P^+(x)-P^-(x),$$

其中

$$P^+(x)=\begin{cases}P(x), & \text{如果}P(x)\geq 0,\\ 0, & \text{如果}P(x)<0,\end{cases}\tag{5}$$

和

$$P^-(x)=\begin{cases}0, & \text{如果}P(x)\geq 0,\\ -P(x), & \text{如果}P(x)<0.\end{cases}\tag{6}$$

对于固定的 $u\in H^1(\mathbb{R}^3)$, 定义 $D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 上的线性算子

$$L_u(v)=\int_{\mathbb{R}^3}K(x)u^2vdx,$$

那么就有

$$\begin{aligned}|L_u(v)|&\leq\int_{\mathbb{R}^3}K(x)u^2|v|dx\\&\leq(\int_{\mathbb{R}^3}K(x)^2dx)^{\frac{1}{2}}(\int_{\mathbb{R}^3}u^6dx)^{\frac{1}{3}}(\int_{\mathbb{R}^3}v^6dx)^{\frac{1}{6}}\\&\leq C\|K(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^3)}\|v\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)}.\end{aligned}$$

因此由 Riesz 表示定理可知, 存在唯一的 $\phi_u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, 使得

$$\langle\phi_u,v\rangle_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)}=L_u(v),\ \ \forall v\in D^{1,2}(\mathbb{R}^3),$$

即

$$\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\phi_u\nabla vdx=\int_{\mathbb{R}^3}K(x)u^2vdx,\ \ \forall v\in D^{1,2}(\mathbb{R}^3),$$

也就是说 ϕ_u 是 (1) 中第二个方程的弱解. 将 ϕ_u 带入第一个方程就得到

$$-(a+b\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u|^2dx)\Delta u+u+K(x)\phi_u u=P(x)|u|^{p-1}u.\tag{7}$$

因此求解方程 (1) 等价于求解方程 (5). 而方程 (5) 对应能量泛函

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} a|\nabla u|^2 + u^2 dx + \frac{b}{4}(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx)^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_u u^2 dx$$
$$- \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3} P(x)|u|^{p+1}dx,\ \ u \in H^1(\mathbb{R}^3)$$

的临界点.

定义 Φ: $H^1(\mathbb{R}^3) \to D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ 为 $\Phi(u) = \phi_u$, 则有下面引理.

引理2.1

(i) Φ 连续.

(ii) Φ 将有界集映到有界集.

(iii) 若 $\{u_n\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中有界且 $u_n \rightharpoonup u$, 那么有

$$\int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_{u_n} u_n^2 dx \to \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_u u^2 dx.$$

证: 此引理的证明可见文献 [8], 为了读者便于阅读在此给出详细证明. **(i)** 对任意的 $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$, 有

$$|L_u| = \|\phi_u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)} = \|\Phi(u)\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)}$$

成立. 因此, 为了证明 Φ 连续, 接下来只需要证明: $u \mapsto L_u$ 是连续的.

$$\begin{aligned}|L_{u_n}(v) - L_u(v)| &\le \int_{\mathbb{R}^3} K(x)|v||u_n^2 - u^2|dx \\ &\le C\|K\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|v\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)}\|u_n^2 - u^2\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\end{aligned}$$

由于 v 是任意的, 则当 $n \to \infty$ 时, 有 $|L_{u_n}(v) - L_u(v)| \to 0$.

(ii) 由于 $\|\phi_u\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)} = |L_u| \le C\|K\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^3)}$, 所以 (ii) 成立.

(iii) 根据文献 [8], 下面仅需要证明

$$\int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_{u_n} u_n^2 dx \to \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_u u^2 dx.$$

由于 $\phi_{u_n} \rightharpoonup \phi_u$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^3} K(x)(\phi_{u_n} - \phi_u)u^2 dx \to 0. \tag{8}$$

下面证明

$$\int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_{u_n}|u_n^2 - u^2|dx \to 0. \tag{9}$$

由于 $K(x) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ 且连续, 因此对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在$\rho = \rho(\varepsilon) > 0$, 使得当 $|x| \geq \rho$ 时 $K(x) \leq \varepsilon$, 从而

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geq\rho} K(x)\phi_{u_n}|u_n^2 - u^2|dx &\leq \varepsilon[\int_{|x|\geq\rho}\phi_{u_n}u_n^2dx + \int_{|x|\geq\rho}\phi_{u_n}u^2dx] \\ &\leq \varepsilon C\|\phi_{u_n}\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)}(\|u_n\|^2 + \|u\|^2) \\ &\leq C\varepsilon.\end{aligned}$$

又由于 $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$, 则

$$\begin{aligned}&\int_{|x|\leq\rho} K(x)\phi_{u_n}|u_n^2 - u^2|dx \\ &\leq \|K\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}[\int_{|x|\leq\rho}\phi_{u_n}|u_n^2 - u^2|dx] \\ &\leq \|K\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}C\|\phi_{u_n}\|_{D^{1,2}(\mathbb{R}^3)}[\int_{|x|\leq\rho}|u_n^2 - u^2|^{\frac{6}{5}}dx]^{\frac{5}{6}} \\ &\to 0.\end{aligned}$$

这样就证明了 (7). 综合 (6) 和 (7), 我们得到 $\int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_{u_n}u_n^2dx \to \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_u u^2dx$.

引理2.2. 泛函 Ψ 满足(PS)条件.

证: 设 $u_n \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ 且满足 $|\Psi(u_n)| \leq c$ 和 $\Psi'(u_n) \to 0$, 即

$$\int_{\mathbb{R}^3} a|\nabla u_n|^2 + u_n^2dx + b(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2dx)^2 + \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_{u_n}u_n^2dx - \int_{\mathbb{R}^3} P(x)|u_n|^{p+1}dx = o(1)\|u_n\| \tag{10}$$

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} a|\nabla u_n|^2 + u_n^2dx + \frac{b}{4}(\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2dx)^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_{u_n}u_n^2dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3} P(x)|u_n|^{p+1}dx \leq c. \tag{11}$$

结合 (8) 和 (9) 得到

$$\begin{aligned}&[\frac{a}{2} - \frac{a}{p+1}]\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2dx + [\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}]\int_{\mathbb{R}^3} u_n^2dx + [\frac{b}{4} - \frac{b}{p+1}](\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla u_n|^2dx)^2 \\ &+ [\frac{1}{4} - \frac{1}{p+1}]\int_{\mathbb{R}^3} P(x)\phi_{u_n}u_n^2 \leq c + o(1)\|u_n\|.\end{aligned}$$

考虑到 $p > 3$, 则有

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right)\min\{a, 1\}\|u_n\|^2 \leq c + o(1)\|u_n\|.$$

这意味着 $\{u_n\}$ 是有界的. 因此设 $u_n \rightharpoonup u$ 和

$$\|\nabla u_n\|_2^2 \to A^2, \quad n \to \infty.$$

接下来证明 $u_n \to u$. 由(3), (4) 及 (8), 有

$$a\|\nabla u_n\|_2^2 + b\|\nabla u_n\|_2^4 + \|u_n\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_{u_n} u_n^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} P^-(x)|u_n|^{p+1}dx = \int_{\mathbb{R}^3} P^+(x)|u_n|^{p+1}dx + o(1).$$

又由 $\Psi'(u_n) \to 0$ 得到

$$\begin{aligned}&a\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u\cdot\nabla v dx + bA^2\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u\cdot\nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^3} uv dx + \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_u u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} P^-(x)|u|^{p-1}uv dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^3} P^+(x)|u|^{p-1}uv dx + o(1).\end{aligned}$$

令 $v = u$, 有

$$a\|\nabla u\|_2^2 + bA^2\|\nabla u\|_2^2 + \|u_n\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_u u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} P^-(x)|u|^{p+1}dx = \int_{\mathbb{R}^3} P^+(x)|u|^{p+1}dx + o(1).$$

因为 $\lim_{|x|\to\infty} P(x) = P_\infty < 0$, 所以 $P^+(x)$ 有紧支集. 从而应用索伯列夫嵌入定理可得到

$$\int_{\mathbb{R}^3} P^+(x)|u_n|^{p+1}dx = \int_{\mathbb{R}^3} P^+(x)|u|^{p+1}dx + o(1).$$

即有

$$\begin{aligned}&a\|\nabla u_n\|_2^2 + b\|\nabla u_n\|_2^4 + \int_{\mathbb{R}^3} u_n^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_{u_n} u_n^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} P^-(x)|u_n|^{p+1}dx\\ =&a\|\nabla u\|_2^2 + bA^2\|\nabla u\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}^3} u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_u u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} P^-(x)|u|^{p+1}dx + o(1).\end{aligned} \tag{12}$$

接下来断言

$$\int_{\mathbb{R}^3} P^-(x)|u|^{p+1}dx \le \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^3} P^-(x)|u_n|^{p+1}dx. \tag{13}$$

事实上, 由于

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3} P^-(x)\left||u_n|^{p+1} - |u|^{p+1} - |u_n - u|^{p+1}\right| dx\\ &\le \|P(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\int_{\mathbb{R}^3} \left||u_n|^{p+1} - |u|^{p+1} - |u_n - u|^{p+1}\right| dx\\ &= o(1),\end{aligned}$$

则可得

$$\int_{\mathbb{R}^3} P^-(x)|u_n|^{p+1}dx = \int_{\mathbb{R}^3} P^-(x)|u|^{p+1}dx + \int_{\mathbb{R}^3} P^-(x)|u_n - u|^{p+1}dx + o(1).$$

如果 $u_n \nrightarrow u$, 那么 $\|u\| + o(1) < \|u_n\|$, 从而下面两式至少有一个是成立

$$\|u\|_{L^2} + o(1) < \|u_n\|_{L^2}$$

和

$$\|\nabla u\|_{L^2} + o(1) < \|\nabla u_n\|_{L^2}.$$

再由引理2.1 (iii) 和 (11) 知

$$\begin{aligned} &a\|\nabla u_n\|_2^2 + b\|\nabla u_n\|_2^4 + \int_{\mathbb{R}^3} u_n^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_{u_n} u_n^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} P^-(x)|u_n|^{p+1} dx \\ &> a\|\nabla u\|_2^2 + bA^2\|\nabla u\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}^3} u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_u u^2 dx + \int_{\mathbb{R}^3} P^-(x)|u|^{p+1} dx + o(1). \end{aligned}$$

根据 (10) , 得到一个矛盾, 因此 $u_n \to u$.

定理1的证明: 首先证明, 存在 $\alpha, \rho > 0$ 使得 $\Psi_{\partial B_\rho} > \alpha > 0$. 事实上, 由索伯列夫嵌入定理和 $p > 3$ 可得

$$\Psi(u) \geq \frac{1}{2}\min\{a,1\}\|u\|^2 - C\|P\|_{L^\infty}\|u\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^3)}^{p+1},$$

从而存在 $\rho > 0$, 使得 $\Psi_{\partial B_\rho} > \alpha > 0$.

接下来证明, 存在 $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3)$, $\|\varphi\| > \rho$, 使得 $\Psi(\varphi) < 0$. 事实上, 选取函数 $\eta \in H^1(\mathbb{R}^3)$, 使得 $supp\eta \subset suppP^+$, 有

$$\Psi(s\eta) = \frac{as^2}{2}\|\nabla\eta\|_2^2 + \frac{s^2}{2}\|\eta\|_2^2 + \frac{s^4 b}{4}\|\eta\|_2^4 + \frac{s^4}{4}\int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_\eta \eta^2 dx - \frac{s^{p+1}}{p+1}\int_{\mathbb{R}^3} P(x)|\eta|^{p+1} dx.$$

因为 $p > 3$, 则根据 (A1) 和 (A2) 知存在 s_0 使得 $\Psi(s_0\eta) < 0$. 因此，泛函 Ψ 满足山路几何结构 [10, 11], 进而根据引理 2.2 可知系统 (1) 至少存在一个非平凡解.

3. 总结

本文研究的是一类带变号权 Kirchhoff-Poisson 系统非平凡解的存在性, 全文主要是通过泛函 Ψ 满足 (PS) 条件得到序列 u_n 存在强收敛的子列, 进而利用山路定理证明了非平凡解的存在. 同文献 [8]相比, 本文研究的对象是既带有 Kirchhoff 算子的系统, 又带有 Poisson 项所对应的非局部项, 由于多个非局部项的存在, 给研究本论文中的问题增加了一定的难度. 在本文中, 我们讨论了全空间上 $P(x)$ 是可变号的连续函数且 $K(x)$ 是非负的连续函数的条件下, 系统 (1) 至少存在一个非平凡解. 今后, 我们将考虑在全空间上 $K(x)$ 是可变号的连续函数且 $P(x)$ 是非负的连续函数的情况下, 系统 (1) 至少存在一个非平凡解的存在性.

参考文献

[1] Lions, J.L. (1978) On Some Questions in Boundary Value Problems of Mathematical Physics. *North-Holland Mathematics Studies*, **30**, 284-346. https://doi.org/10.1016/S0304-0208(08)70870-3

[2] Alves, C.O., Corréa, F.J. and Ma, T. (2005) Positive Solutions for a Quasilinear Elliptic Equation of Kirchhoff Type. *Computers & Mathematics with Applications*, **49**, 85-93. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2005.01.008

[3] Deng, Y.B., Peng, S.J. and Shuai, W. (2015) Existence and Asymptotic Behavior of Nodal Solutions for the Kirchhoff-Type Problems in R^3. *Journal of Functional Analysis*, **269**, 3500-3527. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2015.09.012

[4] Tang, X.H. and Cheng, B.T. (2016) Ground State Sign-Changing Solutions for Kirchhoff Type Problems in Bounded Domains. *Journal of Differential Equations*, **261**, 2384-2402. https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.04.032

[5] Li, G.B. and Ye, H.Y. (2014) Existence of Positive Ground State Solutions for the Nonlinear Kirchhoff Type Equations in $\mathbb{R}^3$. *Journal of Differential Equations*, **257**, 566-600. https://doi.org/10.1016/j.jde.2014.04.011

[6] Xie, W. and Chen, H. (2019) Multiple Positive Solutions for the Critical Kirchhoff Type Problems Involving Sign-Changing Weight Functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **479**, 135-161. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.06.020

[7] Xu, X., Qin, B. and Chen, S. (2020) Bifurcation Results for a Kirchhoff Type Problem Involving Sign-Changing Weight Functions. *Nonlinear Analysis*, **195**, Article 111718. https://doi.org/10.1016/j.na.2019.111718

[8] 余晓辉. 一类薛定谔-泊松方程解的存在性[J]. 应用数学, 2010, 23(3): 648-652.

[9] 陈莉萍. 一类带变号权Kirchhoff方程解的存在性[J]. 应用数学进展, 2023, 12(4): 1567-1573. https://doi.org/10.12677/AAM.2023.124161

[10] Willem, M. (1996) Minimax Theorems. Birkhäuser, Bosten.

[11] 宣本金. 变分法理论与应用[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2006.