

广义 CEV 模型下分数阶 BS 方程的亚式期权定价及反问题

沈诺晨, 许作良*

中国人民大学数学学院, 北京

收稿日期: 2024 年 5 月 28 日; 录用日期: 2024 年 6 月 22 日; 发布日期: 2024 年 6 月 29 日

摘要

本文主要研究广义 CEV 模型下分数阶 Black-Scholes 方程的亚式期权定价及反问题。首先介绍了广义 CEV 模型下分数阶 Black-Scholes 方程结合亚式期权的定价问题, 根据 Cox 和 Jumarie 提出的带有分红的广义 CEV 波动率模型, 推导出算术平均亚式期权满足的定价公式, 其次在空间和时间上进行差分离散, 并根据数值模拟验证了模型有效性。最后研究了时间分数阶广义 CEV 模型下亚式期权定价的反问题, 在正问题的基础上, 结合一种稳健的预测-校正线性化算法, 对波动率进行反演, 根据数值实验验证算法的有效性及稳定性。

关键词

广义 CEV 模型, 分数阶 BS 方程, 期权定价, 反问题

Pricing and Inverse Problem of Asian Options for Fractional Order BS Equations under the Generalized CEV Model

Nuochen Shen, Zuoliang Xu*

School of Mathematics, Renmin University of China, Beijing

* 通讯作者。

Received: May 28th, 2024; accepted: Jun. 22nd, 2024; published: Jun. 29th, 2024

Abstract

This article mainly studies the pricing and inverse problem of Asian options for fractional order Black Scholes equations under the generalized CEV model. Firstly, the pricing problem of fractional order Black Scholes equations combined with Asian options under the generalized CEV model is introduced. Based on the generalized CEV volatility model with dividends proposed by Cox and Jumarie, the pricing formula satisfied by arithmetic mean Asian options is derived. Secondly, the difference is separated in space and time, and the effectiveness of the model is verified through numerical simulation. Finally, the inverse problem of Asian option pricing under the time fractional generalized CEV model was studied. Based on the forward problem, a robust prediction correction linearization algorithm was combined to invert volatility. The effectiveness and stability of the algorithm were verified through numerical experiments.

Keywords

Generalized CEV Model, Fractional Order BS Equation, Option Pricing, Counterproblem

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

期权是指一种合约, 起源于十八世纪后期的美国和欧洲金融市场, 该合约赋予持有人在未来某一特定日期或该日之前的任何时间以约定价格购进或出售一种资产的权利。除了常规期权外, 还存在一种更复杂的衍生证券称为奇异期权, 奇异期权的价格是偏微分方程的定解问题, 总体上可分为亚式期权、障碍期权、回望期权和百慕大期权等。期权作为金融的一种衍生物, 其定价问题很早就受到人们的广泛关注, 定价是金融数学和金融工程的一个关键问题 [1]。1973 年, Black 和 Scholes 导出了最著名的 Black-Scholes 模型, 具有欧式期权定价问题的简单性和解析解, 该模型广泛适用于欧式的看涨期权和看跌期权, 但该模型存在一些严格的假设, 如恒定波动率和利率, 无法捕捉到一些典型特征, 如波动性集群和随机波动性, 因此与金融市场中股票价格的表现不一

致 [2]。在此基础上, 研究者们对于期权定价的模型进行了研究与发展。偏微分方程方法在期权定价理论中发挥了重要作用 [3], 且基于分数阶导数和积分为描述不同物质的记忆和遗传特性提供了强大的工具这一事实, 越来越多的研究人员将 Black-Scholes 方程推广到了分数阶: Wyss [4] 考虑了时间分数阶 Black-Scholes 方程下期权的定价, 并导出了欧式常规期权的闭式解, Kumar 等人 [5] 进一步探讨了该框架。后来, 通过使用逐点数据, Cartea [6] 发现欧式期权的导数可以用分数阶偏微分方程来描述, 包括一个名为 Caputo 分数导数的非局部成熟时间算子, Leonenko [7] 等人利用谱方法给出了分数阶 Pearson 扩散的显式强解。

波动率指金融资产价格的波动程度, 是对资产收益率不确定性的衡量, 用于反映金融资产的风险水平。常用的波动率模型有 Heston 模型、SABR 模型、CEV 模型等。CEV 模型是几何布朗运动的自然扩展, 最初由 Cox 和 Ross [8] 提出, 是欧式期权定价的替代扩散过程。Jo 等人 [9] 研究了在 CEV 模型下对美式看跌期权进行估值的拉普拉斯逆变换的收敛性。Wang 等人 [10] 研究了具有跳跃扩散风险的保险公司和再保险公司的最优投资策略。Jumarie [11] 于 2008 年将 CEV 模型推广为分数 CEV 模型, 即广义 CEV 波动率模型, 引入了分数阶微积分的概念以捕捉长记忆效应。该广义 CEV 模型是对传统 CEV 模型的扩展和深化, 可以为金融风险管理、资产定价和交易策略的制定提供重要的理论依据。

在著名的 Black-Scholes 期权定价模型中, 波动率对确定无套利期权价格至关重要, 但无法从金融交易市场直接观察到。金融工程中的一个常见问题是在市场真实数据的支持下校准波动率模型, 这个计算问题就是波动率的反问题 [12]。许多研究者对 Black-Scholes 方程的波动率反问题进行了深入的研究。在 [13] 中, Isakov 将波动率的识别简化为具有终端观测的反抛物型问题, 并通过使用 Carleman 估计给出了唯一性和稳定性的证明。

对于分数阶 Black-Scholes 期权定价的反问题, Jiang 和 Xu 在 [14] 中假设隐含波动率与基础价格相关联, 通过线性化方法得到了未知波动率的第一类 Fredholm 积分方程, 证明了反问题的唯一性。Flint 和 Mare 在 [15] 中讨论了当 Hurst 指数不为 0.5 时, 分数阶 Black-Scholes 模型关于隐含波动率的反演。Djeutcha 和 Kamdem 在 [16] 中研究了 Hurst 指数为 $[\frac{1}{2}, 1]$ 时的混合修正分数阶 Black-Scholes 模型的期权定价问题, 给出了隐含波动率与局部波动率之间的显式关系。

基于分数阶 Black-Scholes 方程期权定价及反问题的相关文献研究, 本文研究了时间分数阶广义 CEV 模型下亚式期权的定价及反问题, 第一部分根据带有分红的广义 CEV 波动率模型, 结合 Ito 引理、对冲原理等推导出算术平均亚式期权满足的定价模型, 在空间和时间上进行差分离散, 根据数值实验验证了模型有效性。第二部分研究了时间分数阶广义 CEV 模型下亚式期权定价的反问题, 在正问题的基础上, 结合预测-校正线性化算法, 假设波动率为与时间相关的函数, 对波动率进行反演, 根据数值计算验证算法的有效性及稳定性。

2. 时间分数阶广义 CEV 模型下亚式期权定价问题

2.1. 时间分数阶广义 CEV 模型下亚式期权定价

Cox 提出了 CEV 扩散过程, 它基于一个基本假设, 即资产价格的波动率是和价格本身呈弹性相关的, 该过程由以下随机微分方程 (SDE) 控制

$$dS(t) = rS(t)dt + \delta S^{\beta+1}(t)dW(t),$$

其中 δ 和 β 是常数, r 是无风险利率, W_t 是标准布朗运动。对于 $\beta < 0$, 局部波动率函数为 $\sigma(S) = \delta S^\beta$ 随着资产价格的上涨而减少, 在该模型中, β 是弹性系数, δ 是比例参数, 弹性系数是决定波动率如何随着资产价格变化的重要参数, 反映了波动率对于资产价格变化的敏感程度, 通过调整弹性系数, 可以模拟出不同波动率随价格变化的情况, 从而更准确地评估投资风险。

Jumarie 进一步地介绍了以下 SDE

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)\omega(t)(dt)^{\frac{\alpha}{2}},$$

其中 $\alpha(0 < \alpha \leq 1)$ 是分数阶, $\omega(t)$ 是归一化的 Gauss 白噪声, 具有 $E(\omega(t)) = 0, E(\omega^2(t)) = 1$ 的性质。令其中的局部波动率函数为 $\sigma(S) = \delta S^\beta$, D 为股息收益率, 因此本文研究的基础资产价格由以下广义 CEV 模型控制

$$dS(t) = (r - D)S(t)dt + \delta S^{\beta+1}(t)\omega(t)(dt)^{\frac{\alpha}{2}}. \quad (1)$$

利用数学期望的定义, 可得

$$\begin{aligned} (dS)^2 &= (r - D)^2 S^2(t)(dt)^2 + (r - D)\delta S^{\beta+2}(t)\omega(t)(dt)^{1+\frac{\alpha}{2}} + \delta^2 S^{2\beta+2}(t)\omega^2(t)(dt)^\alpha \\ &\rightarrow \delta^2 S^{2\beta+2}(t)(dt)^\alpha. \end{aligned} \quad (2)$$

用 $C(S, I, t)$ 表示亚式期权的资产价格, 亚式期权是一种强路径依赖型期权, 其中 $I(t)$ 表示路径因子

$$I(t) = \int_0^t S(\tau)d\tau.$$

路径因子代表了标的资产价格路径对期权价格的影响, 根据 Ito 公式, dC 满足

$$dC = \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{\partial C}{\partial S}dS + \frac{\partial C}{\partial I}dI + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} (dS)^2. \quad (3)$$

根据以上推导以及参考文献 [11] 中公式 (4.11), $(dt)^\alpha = \Gamma(1 + \alpha)\Gamma(2 - \alpha)t^{\alpha-1}dt$, 代入公式 (3) 可得

$$\begin{aligned} dC &= \left[\frac{\Gamma(1 + \alpha)\Gamma(2 - \alpha)}{2} \delta^2 S^{2\beta+2}(t)t^{\alpha-1} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \frac{\partial C}{\partial t} + (r - D)S(t) \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial t} \right] dt \\ &\quad + \delta S^{\beta+1}(t)\omega(t) \frac{\partial C}{\partial S} (dt)^{\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned} \quad (4)$$

假设市场是无套利的, 构建无风险投资组合 $\Pi(t)$ 如下

$$\Pi(t) = \Delta S(t) - C(S, I, t), \quad (5)$$

其中 Δ 是用于对冲投资组合的基础资产份额, 使得

$$d\Pi(t) = r\Pi(t)dt. \quad (6)$$

定义分红过程 $\varpi(t)$ 为

$$\begin{aligned}\varpi(t) &= DS(t), \\ d\varpi(t) &= DS(t)dt.\end{aligned}\quad (7)$$

因此, 套期保值组合满足的随机微分方程为

$$d\Pi(t) = \Delta(dS(t) + d\varpi(t)) - dC(S, I, t). \quad (8)$$

根据对冲原理可以推导出期权价格满足的偏微分方程为

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(2-\alpha)}{2}\delta^2 S^{2\beta+2} t^{\alpha-1} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r-D)S \frac{\partial C}{\partial S} + S \frac{\partial C}{\partial I} - rC = 0. \quad (9)$$

对于该二维偏微分方程, 通过以下变量替换

$$x = \frac{E - \frac{I}{T}}{S}, C(S, I, t) = SV(t, x), \quad (10)$$

得到一维偏微分方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(2-\alpha)}{2}\delta^2 t^{\alpha-1} x^{2-2\beta} \left(E - \frac{I}{T}\right)^{2\beta} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \left[(r-D)x + \frac{1}{T}\right] \frac{\partial V}{\partial x} - DV = 0. \quad (11)$$

将时间导数推广至分数阶, 得到时间分数阶广义 CEV 模型下算术平均亚式期权的偏微分方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha V}{\partial t^\alpha} + \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(2-\alpha)}{2}\delta^2 t^{\alpha-1} x^{2-2\beta} \left(E - \frac{I}{T}\right)^{2\beta} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \\ \quad - \left[(r-D)x + \frac{1}{T}\right] \frac{\partial V}{\partial x} - DV = 0, (t, x) \in [0, T) \times (0, X), \\ V(T, x) = \max(-x, 0), x \in [0, X]. \end{cases} \quad (12)$$

时间分数导数是右修正的 Riemann-Liouville 导数, 其定义如下

$$\frac{\partial^\alpha V}{\partial t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^T \frac{V(\xi, x) - V(T, x)}{(\xi - t)^\alpha} d\xi, 0 < \alpha < 1, \\ \frac{\partial V}{\partial t}, \alpha = 1. \end{cases} \quad (13)$$

对公式 (12) 进行进一步化简 $\tau = T - t$, 将向后的问题转化为向前的问题, 对 $0 < \alpha < 1$ 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\alpha V}{\partial t^\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^T \frac{V(\xi, x) - V(T, x)}{(\xi - t)^\alpha} d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{-d}{d\tau} \int_{T-\tau}^T \frac{V(\xi, x) - V(T, x)}{(\xi - (T - \tau))^\alpha} d\xi \\ &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \frac{V(T - \eta, x) - V(T, x)}{(\tau - \eta)^\alpha} d\eta.\end{aligned}\quad (14)$$

通过 $U(\tau, x) = V(T - \tau, x)$ 将模型 (12) 变换为

$$\begin{cases} D_{\tau}^{\alpha} U = \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(2-\alpha)}{2} \delta^2 (T - \tau)^{\alpha-1} x^{2-2\beta} (E - \frac{I}{T})^{2\beta} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ \quad - \left[(r - D)x + \frac{1}{T} \right] \frac{\partial U}{\partial x} - DU, (\tau, x) \in [0, T] \times (0, X), \\ U(0, x) = \max(-x, 0), x \in [0, X]. \end{cases} \quad (15)$$

此时时间分数阶微分 $D_{\tau}^{\alpha} U(\tau, x)$ 恰是左修正的 Riemann-Liouville 导数, 即

$$D_{\tau}^{\alpha} U = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\tau} \frac{U(\eta, x) - U(0, x)}{(\tau - \eta)^{\alpha}} d\eta, 0 < \alpha < 1. \quad (16)$$

2.2. 亚式期权定价的离散化

2.2.1. 差分离散

对于时间上的离散, 首先在时域 $[0, T]$ 中进行均匀离散, 令 $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = T, \tau_n = n\Delta\tau, \Delta\tau = T/N$.

根据式 (16), 有

$$\begin{aligned} D_{\tau}^{\alpha} U &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\tau} \frac{U(\eta, x) - U(0, x)}{(\tau - \eta)^{\alpha}} d\eta \\ &= \frac{U(0, x)\tau^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{\tau} \frac{\partial U(\eta, x)}{\partial \eta} (\tau - \eta)^{-\alpha} d\eta - \frac{U(0, x)\tau^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \\ &= {}_0^C D_{\tau}^{\alpha} U(\tau, x), \end{aligned} \quad (17)$$

其中 ${}_0^C D_{\tau}^{\alpha} U(\tau, x)$ 是 Caputo 分数导数, 鉴于 Caputo 导数的定义, 在时间 $\tau = \tau_n$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} {}_0^C D_{\tau}^{\alpha} U(\tau_n, x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=1}^n \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} (\tau_n - \eta)^{-\alpha} \frac{\partial U(\eta, x)}{\partial \eta} d\eta \\ &= \frac{(\Delta\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^n [U(\tau_k, x) - U(\tau_{k-1}, x)] [(n-k+1)^{1-\alpha} - (n-k)^{1-\alpha}] + O((\Delta\tau)^{2-\alpha}) \\ &= v \sum_{k=1}^n b_k [U(\tau_{n-k+1}, x) - U(\tau_{n-k}, x)] + O((\Delta\tau)^{2-\alpha}), \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $v = \frac{(\Delta\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}, b_k = k^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha}$.

容易验证, b_k 具有以下性质:

- (i) $b_1 = 1$,
- (ii) $b_k > 0, 0 \leq k \leq N$,
- (iii) $b_{k-1} > b_k, 1 \leq k \leq N$.

对于空间上的离散, 在空间 $[0, X]$ 中进行均匀离散, 令 $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_M = X, x_m = m\Delta x, \Delta x = X/M$.

使用有限差分方法对于空间的离散如下

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{(\tau_n, x_j)} &= \frac{U(\tau_n, x_{j-1}) - 2U(\tau_n, x_j) + U(\tau_n, x_{j+1}))}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2), \\ \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{(\tau_n, x_j)} &= \frac{U(\tau_n, x_{j+1}) - U(\tau_n, x_{j-1}))}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2).\end{aligned}\quad (19)$$

初始条件和边界条件的选取: 考虑 $x \rightarrow +\infty$ 的边界条件, 此时 $S \rightarrow 0$, 意味着风险资产为 0, 即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} U(\tau, x) = 0$. 将无穷区域 $(0, +\infty)$ 转化为 $(0, X)$, 在 $x = X$ 时边值条件有 $U(\tau, X) = 0$.

考虑 $x = 0$, 此时为动态边界条件, 将 $x = 0$ 代入方程 (11) 中, 根据参考文献 [17] 的式 (2.1b), $S \rightarrow S_{max}$ 等价于 $x = \frac{E-I/T}{S} \rightarrow 0$, 故给 $\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow 0}$ 赋值为 0, 求解得到的常微分方程即可得出 $x = 0$ 时的边界条件为: $U(\tau, 0) = ce^{D(T-\tau)} - \frac{1}{DT}$.

$\tilde{U}_j^n$ 是差分格式的精确解, U_j^n 是方程 (15) 的精确解, 则差分格式可以写为如下矩阵形式

$$\begin{cases} A^1 \tilde{U}^1 = -v \tilde{U}^0 - G^1, & n = 1, \\ A^n \tilde{U}^n = v \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) \tilde{U}^{n-k} - v b_n \tilde{U}^0 - G^n, & n \geq 2. \end{cases} \quad (20)$$

其中

$$A^n = \begin{bmatrix} b_1^n & c_2^n & & 0 \\ a_1^n & b_2^n & c_3^n & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & c_{M-1}^n \\ 0 & & a_{M-2}^n & b_{M-1}^n \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\tilde{U}^n = (\tilde{U}_1^n, \tilde{U}_2^n, \dots, \tilde{U}_{M-1}^n)^T,$$

$$G^n = (a_0^n \tilde{U}_0^n, 0, \dots, 0, c_M^n \tilde{U}_M^n)^T.$$

$$\begin{cases} a_{j-1}^n = \varphi_n x_j^{2-2\beta} + \mu x_j + \theta, \\ b_j^n = -\left(v + 2\varphi_n x_j^{2-2\beta} + D\right), \\ c_{j+1}^n = \varphi_n x_j^{2-2\beta} - \mu x_j - \theta. \end{cases} \quad \begin{cases} \mu = \frac{r-D}{2\Delta x}, \\ \theta = \frac{1}{2T\Delta x}, \\ \varphi_n = \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(2-\alpha)\delta^2(T-\tau_n)^{\alpha-1}(E-\frac{I}{T})^{2\beta}}{2(\Delta x)^2}. \end{cases}$$

2.2.2. 差分格式的稳定性

本节将通过 Fourier 分析证明差分格式的稳定性。假设 $\hat{U}_j^n$ 是差分格式的数值解, $\varepsilon_j^n = \tilde{U}_j^n - \hat{U}_j^n, n = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, M$ 为每一点处对应的误差值。

定义网格函数

$$\varepsilon^n(x) = \begin{cases} \varepsilon_j^n, & x \in (x_j - \frac{\Delta x}{2}, x_j + \frac{\Delta x}{2}], \\ 0, & x \in [0, \frac{\Delta x}{2}] \cup (X - \frac{\Delta x}{2}, X]. \end{cases} \quad (22)$$

对 $\varepsilon^n(x)$ 进行 Fourier 展开有

$$\varepsilon^n(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_j^n e^{i \frac{2\pi j x}{X}}, (i^2 = -1), n = 0, 1, \dots, N, \quad (23)$$

$$\gamma_j^n = \frac{1}{X} \int_0^X \varepsilon^n(x) e^{i \frac{2\pi j x}{X}} dx, j = 0, \pm 1, \dots$$

令 $\varepsilon^n = (\varepsilon_1^n, \varepsilon_2^n, \dots, \varepsilon_{M-1}^n)^T$, 定义以下范数为

$$\|\varepsilon^n(x)\|^2 = \sum_{j=1}^{M-1} \Delta x |\varepsilon^n(x)|^2 = \int_0^X |\varepsilon^n(x)|^2 dx. \quad (24)$$

根据 Parseval 定理有

$$\|\varepsilon^n(x)\|^2 = \sum_{j=1}^{M-1} \Delta x |\varepsilon_j^n|^2 = X \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\gamma_j^n|^2, j = 0, 1, \dots, M. \quad (25)$$

由于 $x_j = j\Delta x$, 假设具有以下形式

$$\varepsilon_j^n = \gamma^n e^{iqj\Delta x}, q = \frac{2k\pi}{X}, k = 0, \pm 1, \dots \quad (26)$$

则 ε_j^n 满足

$$\begin{cases} [a_{j-1}^1 e^{-iq\Delta x} + b_j^1 + c_{j+1}^1 e^{iq\Delta x}] \gamma^1 = -v\gamma^0, & n = 1, \\ [a_{j-1}^n e^{-iq\Delta x} + b_j^n + c_{j+1}^n e^{iq\Delta x}] \gamma^n = v \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) \gamma^{n-k} - vb_n \gamma^0, & n \geq 2. \end{cases} \quad (27)$$

下面讨论差分格式 (20) 的稳定性。

定理 1: 差分格式 (20) 是无条件稳定的。

证明： 首先采用数学归纳法来证明对于 $\forall n \geq 1$, 都有 $|\gamma^n| \leq |\gamma^0|$.

当 $n = 1$ 时, 根据运算 $e^{\pm i q \Delta x} = \cos(q \Delta x) \pm i \sin(q \Delta x)$ 代入 (27) 中可得

$$\begin{aligned} & \left[a_{j-1}^1 (1 - 2 \sin^2(\frac{q \Delta x}{2}) - i \sin(q \Delta x)) + b_j^1 + c_{j+1}^1 (i \sin(q \Delta x) + 1 - 2 \sin^2(\frac{q \Delta x}{2})) \right] \gamma^1 \\ &= -v \gamma^0 \Rightarrow - \left[4 \varphi_1 x_j^{2-2\beta} \sin^2(\frac{q \Delta x}{2}) + 2i(\mu x_j + \theta) \sin(q \Delta x) + v + D \right] \gamma^1 = -v \gamma^0. \end{aligned} \quad (28)$$

由 $v, \mu, \theta, \varphi_1, D > 0$, 可得出

$$\left| 4 \varphi_1 x_j^{2-2\beta} \sin^2(\frac{q \Delta x}{2}) + 2i(\mu x_j + \theta) \sin(q \Delta x) + v + D \right| \geq |v|.$$

所以有: $|\gamma^1| \leq |\gamma^0|$.

假设对于 $k = 2, 3, \dots, n-1$ 都有 $|\gamma^k| \leq |\gamma^0|$ 成立, 则当 $k = n$ 时, 根据 (27) 可得

$$\begin{aligned} & \left[a_{j-1}^n (1 - 2 \sin^2(\frac{q \Delta x}{2}) - i \sin(q \Delta x)) + b_j^n + c_{j+1}^n (i \sin(q \Delta x) + 1 - 2 \sin^2(\frac{q \Delta x}{2})) \right] \gamma^n \\ &= v \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) \gamma^{n-k} - v b_n \gamma^0 \\ &\Rightarrow - \left[4 \varphi_n x_j^{2-2\beta} \sin^2(\frac{q \Delta x}{2}) + 2i(\mu x_j + \theta) \sin(q \Delta x) + v + D \right] \gamma^n \\ &= v \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) \gamma^{n-k} - v b_n \gamma^0. \end{aligned} \quad (29)$$

再由绝对值不等式, 有

$$\begin{aligned} & \left| - \left[4 \varphi_n x_j^{2-2\beta} \sin^2(\frac{q \Delta x}{2}) + 2i(\mu x_j + \theta) \sin(q \Delta x) + v + D \right] \gamma^n \right| \\ &= \left| v \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) \gamma^{n-k} - v b_n \gamma^0 \right| \\ &\leq v \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) |\gamma^{n-k}| + v b_n |\gamma^0| \\ &= v \left(\sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) + b_n \right) |\gamma^0| \\ &= v |\gamma^0|. \end{aligned} \quad (30)$$

又因为

$$\left| 4 \varphi_n x_j^{2-2\beta} \sin^2(\frac{q \Delta x}{2}) + 2i(\mu x_j + \theta) \sin(q \Delta x) + v + D \right| \geq |v|,$$

可推出 $|\gamma^n| \leq |\gamma^0|$.

根据公式 (25), 可知对于 $\forall n \geq 1$ 都有

$$\|\varepsilon^n\|^2 = X \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\gamma_j^n|^2 \leq X \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\gamma_j^0|^2 = \|\varepsilon^0\|^2. \quad (31)$$

所以该差分格式是无条件稳定的。□

2.3. 期权定价的数值计算

本节利用 matlab 编程进行数值模拟, 改变不同的参数分析其对于期权价格的影响。设定时间和空间变量均为 100 份, 无风险利率 $r = 0.1$, 股息收益率 $D = 0.03$, 波动率中的比例参数取 $\delta = 0.45, \beta = -0.1$, 标的资产价格运行总和 I 为 1 美元, 设到期日 T 为 1 年。图 1 给出了不同 α 取值时的期权价格比较, 可知期权价格与标的资产价格之间存在着一定的正相关关系, 标的资产价格小于执行价格时, 随着分数阶 α 的增加, 期权价格在随之减少; 当标的资产价格大于执行价格时, 期权价格随着分数阶的增加而增加, 且都有两个比较明显的拐点, 验证了广义 CEV 模型下分数阶 Black-Scholes 方程定价的有效性。

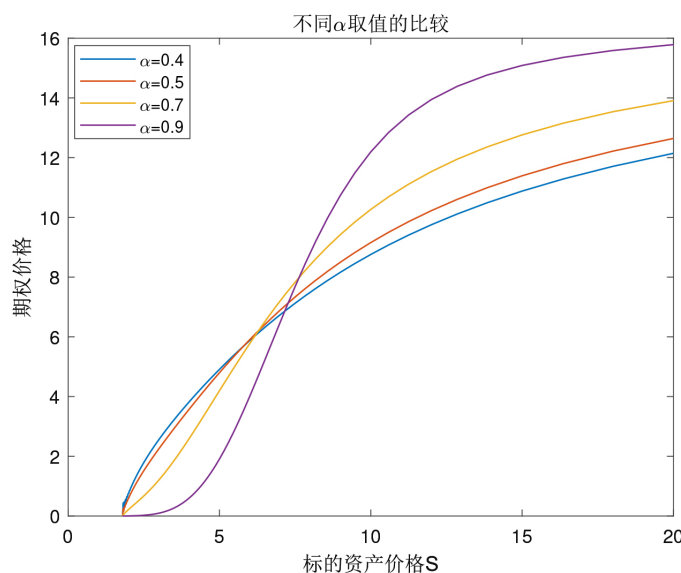


Figure 1. The impact of fractional order α on option prices

图 1. 分数阶 α 对期权价格的影响

3. 时间分数阶广义 CEV 模型下亚式期权定价反问题

3.1. 时间分数阶广义 CEV 模型下亚式期权定价反问题的提出

传统 Black-Scholes 方程中假设波动率 σ 为常数, 但实际情况中这是不合常理的, 根据实际的期权价格求得的隐含波动率不但不是定值, 反而是不断变化的, 它的图像具有波动率“微

笑”、“偏斜”等市场特征。所以在期权定价理论的发展当中, 研究者们致力于通过已知的期权市场价格恢复隐含的波动率参数, 由于反问题通常具有不适定性, 所以一般的反演方法为先通过一些正则化方法进行处理, 再进行迭代处理。本文是一种线性化的反演波动率方法, 根据一种简单而稳健的预测-校正数值方法 [18], 将波动率假设为是关于时间 t 的分段线性函数, 再由最速下降法迭代最小化函数反演波动率。

在上述时间分数阶广义 CEV 模型的基础上, 我们假设波动率 σ 是资产价格 S 和时间 t 的函数: $\sigma(S, t) = \delta S^{\beta(t)}, \sigma : [0, \infty) \times [0, T] \rightarrow R$.

如上所述, 局部波动率函数是资产价格和时间的函数, 然而, 为了求解算法的简单性和鲁棒性, 此处假设局部波动性函数仅取决于时间, 并且是相对于时间变量的分段线性函数, 以 $\sigma(t) = \delta(\frac{E-t}{x})^{\beta(t)}$ 表示。

3.2. 亚式期权定价反问题求解

给定到期日为 $T_i, i = 1, 2, \dots, \mathcal{N}$, 对于每个到期日 T_i , 期权以执行价格 $E_{i1}, E_{i2}, \dots, E_{iM_i}$ 进行交易, $T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_{\mathcal{N}}, E_{i1} \leq E_{i2} \leq \dots \leq E_{iM_i}$, 其中每个到期日的执行价格次数 M_i 可能不同, 此时观测到的市场期权价格为 $\hat{U}_{ij}$. 反问题的目的在于寻找局部波动率函数, 使得重构得到的期权价格落在市场的买价 $\hat{U}_{ij}^a$ 和卖价 $\hat{U}_{ij}^b$ 之间, 即

$$\hat{U}_{ij}^a \leq U(0, S_0, T_i, E_{ij}, \sigma(t)) \leq \hat{U}_{ij}^b. \quad (32)$$

需要反演的波动率函数为 $\sigma(t)$, 重构得到的期权价格为 $U(0, S_0, T_i, E_{ij}, \sigma(t))$, 期权价格对局部波动率函数特定选择的依赖性也在该符号中明确表示, 当波动率函数已知时, 可采用和正问题中同样的差分方法, 时变波动率反演问题可以重新表述为以下线性化波动率构造算法:

给定一组已知的市场期权观测值 $\hat{U}_{ij}, i = 1, 2, \dots, \mathcal{N}, j = 1, 2, \dots, M_i$, 其中 $\hat{U}_{ij} = \frac{\hat{U}_{ij}^a + \hat{U}_{ij}^b}{2}$ 是期权卖价和买价的平均值, 在最小二乘意义上, 反演波动率函数 $\sigma(t)$, 使得以下均方误差最小化

$$\Gamma_i(\sigma) = \frac{1}{M_i} \sum_{j=1}^{M_i} \left(U(0, S_0, T_i, E_{ij}, \sigma(t)) - \hat{U}_{ij} \right)^2 \mathcal{X}_{ij}, i = 1, 2, \dots, \mathcal{N}, \quad (33)$$

其中 $\mathcal{X}_{ij}$ 是特征函数, 当市场期权价格 $\hat{U}_{ij}$ 是可观测得到时取值为 1, 否则取值为 0. 在这里我们使用最速下降法最小化成本函数 $\Gamma_i(\sigma)$, 反演出最优的波动率 σ , 我们定义 $T_{i+\frac{1}{2}} = \frac{T_i + T_{i+1}}{2}, i = 0, 1, \dots, \mathcal{N} - 1, T_0 = 0$. 下面详细地介绍算法的迭代过程。

步骤 1: 假设波动率 $\sigma(t)$ 是区间 $[0, T_1]$ 上的恒定常数。

即设 $\sigma(t) = c_1, t \in [0, T_1]$, 此时需要找到最优的 c_1 使得以下成本函数最小化

$$\Gamma_1(\sigma) = \frac{1}{M_1} \sum_{j=1}^{M_1} \left(U(0, S_0, T_1, E_{1j}, \sigma(t)) - \hat{U}_{1j} \right)^2 \mathcal{X}_{1j}. \quad (34)$$

通过最速下降法迭代求解 c_1 , 确定恒定的波动率函数之后, 记为: $\sigma_1(t) := \sigma(t)$.

步骤 2: 求 $[0, T_2]$ 上的线性波动率函数。

根据从步骤 1 中求出的最优常数值 c_1 , 定义 $[0, T_2]$ 上的线性波动率函数为

$$\sigma(t) = \frac{c_2 - c_1}{T_2 - T_{\frac{1}{2}}}(t - T_2) + c_2, t \in [0, T_2]. \quad (35)$$

式 (35) 表示的线性函数经过点 $(T_{\frac{1}{2}}, c_1)$, 其中的 c_2 是我们通过最小化以下成本函数得到的

$$\Gamma_2(\sigma) = \frac{1}{M_2} \sum_{j=1}^{M_2} \left(U(0, S_0, T_i, E_{2j}, \sigma(t)) - \hat{U}_{2j} \right)^2 \mathcal{X}_{2j}. \quad (36)$$

根据波动率函数 (36) 的构成, 在已知 c_1 的基础上只需要最小化求解一个常数参数 c_2 即可求出波动率, 记为: $\sigma_2(t) := \sigma(t)$.

步骤 3: 求 $[0, T_3]$ 上的线性波动率函数。

首先假设 $[T_{\frac{3}{2}}, T_3]$ 上的线性波动率函数为

$$\sigma_3(t) = \frac{c_3 - \sigma_2(T_{\frac{3}{2}})}{T_3 - T_{\frac{3}{2}}}(t - T_3) + c_3, t \in [T_{\frac{3}{2}}, T_3]. \quad (37)$$

该线性方程通过定点 $(T_{\frac{3}{2}}, \sigma_2(T_{\frac{3}{2}}))$ 以及未知的 (T_3, c_3) . 结合线性函数 σ_3 , 设定以下分段线性波动函数为

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_2(t), t \in [0, T_{\frac{3}{2}}], \\ \sigma_3(t), t \in [T_{\frac{3}{2}}, T_3]. \end{cases} \quad (38)$$

根据波动率函数 (38) 的构成, 在已知 c_1, c_2 的基础上只需要最小化求解一个参数 c_3 即可求出波动率, c_3 通过以下成本函数最小化获得

$$\Gamma_3(\sigma) = \frac{1}{M_3} \sum_{j=1}^{M_3} \left(U(0, S_0, T_i, E_{3j}, \sigma(t)) - \hat{U}_{3j} \right)^2 \mathcal{X}_{3j}. \quad (39)$$

步骤 4: 求 $[0, T_{\mathcal{N}}]$ 上的线性波动率函数。

依照前 3 步所示, 我们在 $4 \leq i \leq \mathcal{N}$ 上重复迭代。根据上一步得到的 c_{i-1} , 设定 $[T_{i-\frac{3}{2}}, T_i]$ 上的线性波动率函数为

$$\sigma_i(t) = \frac{c_i - \sigma_{i-1}(T_{i-\frac{3}{2}})}{T_i - T_{i-\frac{3}{2}}}(t - T_i) + c_i, t \in [T_{i-\frac{3}{2}}, T_i]. \quad (40)$$

基于此, 设定 $[0, T_i]$ 上的分段线性波动率函数为

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_2(t), t \in [0, T_{\frac{3}{2}}], \\ \sigma_k(t), t \in [T_{k-\frac{3}{2}}, T_{k-\frac{1}{2}}], 2 < k < i, \\ \sigma_i(t), t \in [T_{i-\frac{3}{2}}, T_i]. \end{cases} \quad (41)$$

在已知 $c_1, c_2, \dots, c_{i-1}$ 的基础上只需要最小化求解一个参数 c_i 即可求出波动率, c_i 通过以下成本函数最小化获得

$$\Gamma_i(\sigma) = \frac{1}{M_i} \sum_{j=1}^{M_i} \left(U(0, S_0, T_i, E_{ij}, \sigma(t)) - \widehat{U}_{ij} \right)^2 \mathcal{X}_{ij}. \quad (42)$$

在以上所提出的算法中, 直接根据观测到的市场期权价格和期权定价模型反演时间相关的波动率函数, 重构得到的波动率函数是分段线性的, 使用该预测-校正算法计算波动率是非常简洁且稳健的, 只需要在每一步计算中通过最速下降法迭代收敛出一个最优参数即可, 该方法收敛快速且具有普适性, 对于一般的期权定价模型都可以通过该方法求解。

3.3. 数值实验

在该部分中我们通过两个已知准确解的数值实验, 验证线性化的方法对于反演波动率的可行性和准确性。

例 1: 考虑以下模型

$$\begin{cases} {}_0^C D_\tau^\alpha U = \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(2-\alpha)}{2} (T-\tau)^{\alpha-1} x^2 \sigma^2 (T-\tau) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ \quad - \left[(r-D)x + \frac{1}{T} \right] \frac{\partial U}{\partial x} - DU, (\tau, x) \in [0, T) \times (0, X), \\ U(0, x) = \max(-x, 0), x \in [0, X], \\ U(\tau, X) = 0, \\ U(\tau, 0) = 100e^{D(T-\tau)} - \frac{1}{DT}. \end{cases} \quad (43)$$

Table 1. Example 1: Asian call option prices

表 1. 例 1: 亚式看涨期权价格

K	17	19	21	23	25
$T_1 = \frac{60}{360}$	18.3376	16.8284	15.2602	13.6558	12.0423
$T_2 = \frac{120}{360}$	33.3450	28.4941	23.7749	19.3181	15.2442
$T_3 = \frac{180}{360}$	31.6256	25.4762	19.8298	14.8595	10.6810
$T_4 = \frac{240}{360}$	28.1402	21.5287	15.7716	11.0161	7.3059
$T_5 = \frac{300}{360}$	24.7950	18.1228	12.5874	8.2694	5.1165
$T_6 = \frac{360}{360}$	21.8832	15.3480	10.1622	6.3218	3.6795

在此选取参数为: $\alpha = 0.7, r = 0.15, D = 0.08, I = 1$, 标的资产价格 $S_0 = 10$, 考虑以下波动率函数为

$$\sigma(t) = 0.3 \times 10^{0.01-0.03t}.$$

到期日 $T = [\frac{60}{360}, \frac{120}{360}, \frac{180}{360}, \frac{240}{360}, \frac{300}{360}, \frac{360}{360}]$, 执行价格 $E = [17, 19, 21, 23, 25]$, 空间离散个数为

$M = 100$, 时间离散步长为 $\Delta\tau = \frac{1}{360}$, 假设给定条件下期权均为可观测, 即 $\mathcal{X}_{ij} = 1$. 根据给定的波动率函数计算得出的亚式期权价格见表 1, 将此作为期权的市场价格。

假设需迭代得到的常数 $c_i, i = 1, 2, \dots, 6$ 的初始猜测值为 0.3, 迭代停止条件为 $TOL = 1 \times 10^{-10}$, 图 2展示了真实波动率和反演波动率的效果, 令 σ 和 $\hat{\sigma}$ 分别表示真实波动率和重构得到的波动率, 二者的最大误差为 $error_{max} = \max_{1 \leq i \leq N} |\sigma_i - \hat{\sigma}_i| = 0.0077$, 均方误差为 $error_{L_2} = (\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\sigma_i - \hat{\sigma}_i|^2)^{\frac{1}{2}} = 0.0026$, 验证了该方法的有效性。

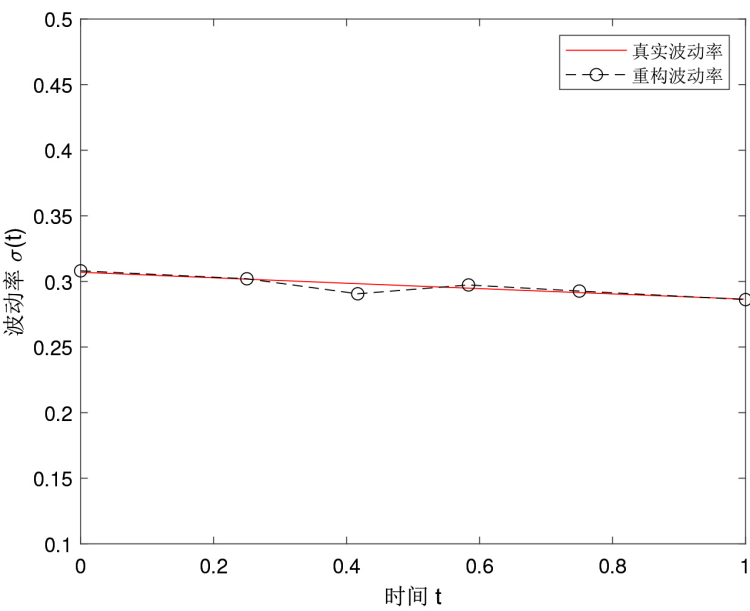


Figure 2. Example 1: Real volatility and reconstructed volatility

图 2. 例 1: 真实波动率和重构波动率

Table 2. Example 1: Iteration result of minimizing function

表 2. 例 1: 最小化函数的迭代结果

到期日	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
最小化函数值	4.2×10^{-8}	1.8×10^{-5}	4.1×10^{-6}	4.9×10^{-8}	6.3×10^{-7}	1.5×10^{-6}
各层迭代次数	2	1	3	2	3	2
用时 (s)	7.25	22.10	60.20	73.27	131.86	108.74
求得常数 c_i	0.30605	0.3	0.28485	0.30067	0.29031	0.28615

表 2展示了在求解最小化函数的过程中, 得到的最优值以及迭代次数, 可以看出各层迭代的最小化函数值接近于 0, 说明算法反演效果较好, 且该算法迭代的次数较少, 能够比较快速地给出反

演结果，是一种有效且快速的迭代算法。但算法也存在一定的缺点：虽然算法原理简单直接，但每一层迭代所需用时较长，时间消耗较多，且易受期权定价模型复杂度的影响，当期权定价模型复杂时，所需时间也会增多，有赖于后续的研究与改进。

接下来验证算法的稳定性。在期权价格上增加相应的噪声，验证该算法反演波动率的稳定性，添加噪声后的期权价格如下

$$U^\delta = U + \delta \times rand(-1, 1),$$

不同噪声强度 δ 下反演波动率的效果如图 3 和图 4 所示，当噪声强度为 $\delta = 0.01$ 时二者的最大误差为 $error_{max} = \max_{1 \leq i \leq N} |\sigma_i - \hat{\sigma}_i| = 0.0286$ ，均方误差为 $error_{L_2} = (\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\sigma_i - \hat{\sigma}_i|^2)^{\frac{1}{2}} = 0.01$ ，在求解最小化函数的过程中，数值结果如表 3，可以发现迭代得到的常数值与不带噪声时相差很小，最小化函数值也均接近于 0，此时反演效果平稳。但当噪声强度为 $\delta = 0.03$ 时，均方误差为 0.129，最大误差为 0.391，真实波动率和重构波动率之间的误差较大，此时反演效果不佳。

Table 3. Example 1: Iteration result of minimizing function at noise intensity $\delta = 0.01$

表 3. 例 1：噪声强度 $\delta = 0.01$ 时最小化函数的迭代结果

到期日	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
最小化函数值	2.6×10^{-5}	4.0×10^{-4}	7.1×10^{-5}	3.0×10^{-5}	1.9×10^{-5}	8.1×10^{-5}
各层迭代次数	3	2	2	3	2	3
用时 (s)	10.93	14.33	32.52	58.58	47.20	126.11
求得常数 c_i	0.30813	0.29625	0.25441	0.32142	0.29587	0.27996

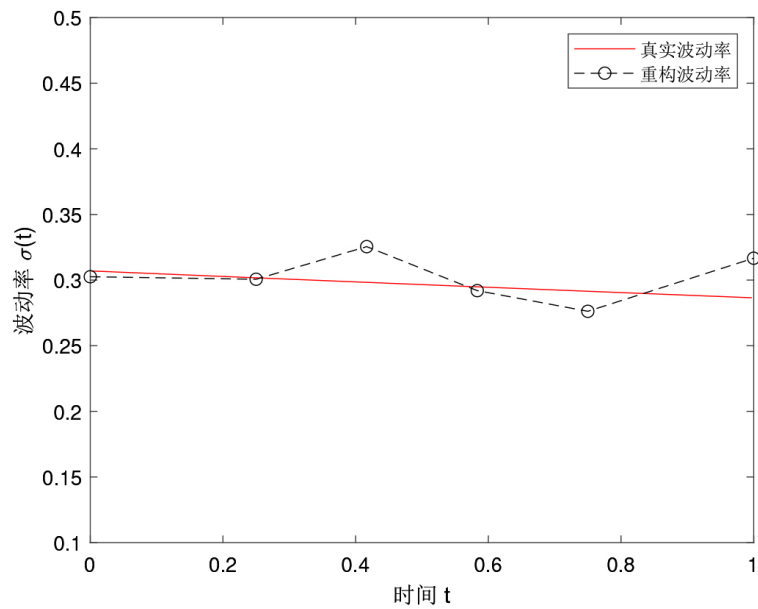


Figure 3. Noise $\delta = 0.01$

图 3. 噪声 $\delta = 0.01$

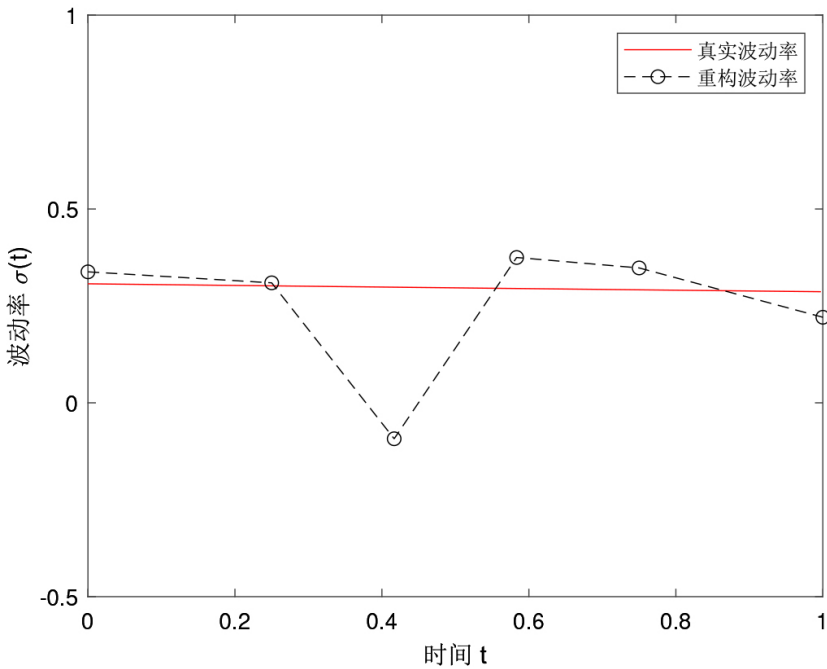


Figure 4. Noise $\delta = 0.03$
图 4. 噪声 $\delta = 0.03$

例 2：考虑波动率函数

$$\sigma(t) = 0.2 \times 10^{0.01 - 0.05t}.$$

初始猜测值为 0.2，其余参数均和例 1 一致，真实波动率图像和重构得到的波动率图像如图 5，二者的最大误差为 $error_{max} = \max_{1 \leq i \leq N} |\sigma_i - \hat{\sigma}_i| = 0.0155$ ，均方误差为 $error_{L_2} = (\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\sigma_i - \hat{\sigma}_i|^2)^{\frac{1}{2}} = 0.0053$ 。求解最小化函数的数值结果如表 4，可以发现该算法在各个时间层中经过较少次数的迭代即可获得最优值，且和真实波动率的误差较小，验证了算法的有效性。

Table 4. Example 2: Iteration result of minimizing function

表 4. 例 2：最小化函数的迭代结果

到期日	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
最小化函数值	2.2×10^{-8}	2.8×10^{-5}	1.2×10^{-5}	8.1×10^{-8}	3.9×10^{-6}	9.4×10^{-6}
各层迭代次数	2	2	3	2	2	3
用时 (s)	7.55	19.74	36.15	52.21	71.94	102.67
求得常数 c_i	0.20432	0.1949	0.1703	0.20479	0.1875	0.18209

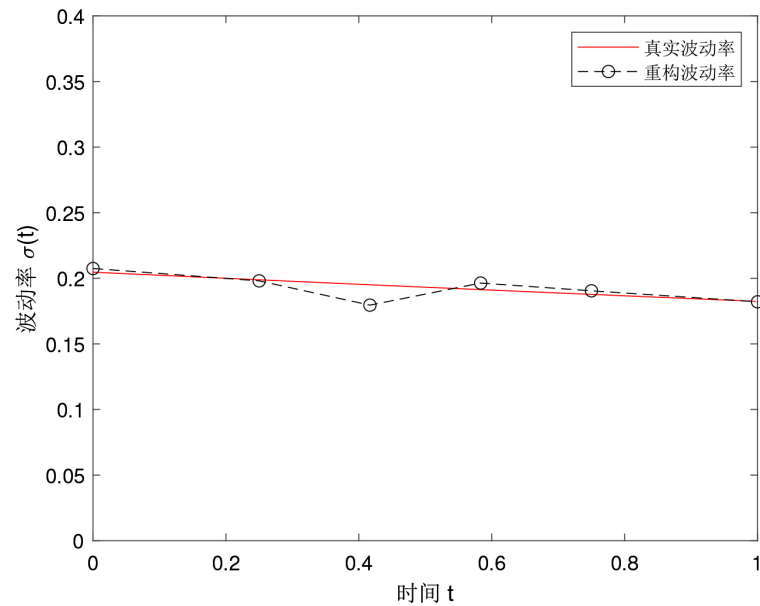


Figure 5. Example 2: Real volatility and reconstructed volatility

图 5. 例 2: 真实波动率和重构波动率

4. 结论

本文首先研究了广义 CEV 模型下分数阶 Black-Scholes 方程结合亚式期权的定价问题, 推导出算术平均亚式期权满足的定价模型, 通过差分方法离散求解, 并进行数值模拟, 研究了模型中改变不同参数时对于期权定价的影响, 验证了该方法的有效性。最后在正问题的基础上, 研究了广义 CEV 模型下分数阶 Black-Scholes 方程结合亚式期权对于波动率的反演, 通过一种稳健的预测-矫正算法迭代求解最小化函数反演出最优的波动率分段线性函数, 最后结合数值实验验证了该算法的有效性和稳定性。

基金项目

国家自然科学基金项目 (No.12071479).

参考文献

- [1] Edeki, S., Ugbebor, O. and Owoloko, E. (2015) Analytical Solutions of the Black-Scholes Pricing Model for European Option Valuation via a Projected Differential Transformation Method. *Entropy*, **17**, 7510-7521. <https://doi.org/10.3390/e17117510>
- [2] An, X., Liu, F., Zheng, M., Anh, V.V. and Turner, I.W. (2021) A Space-Time Spectral Method for Time-Fractional Black-Scholes Equation. *Applied Numerical Mathematics*, **165**, 152-166. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2021.02.009>

-
- [3] 姜礼尚. 金融衍生产品定价的数学模型与案例分析 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.
 - [4] Wyss, W. (2000) The fractional Black-Scholes Equation. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **3**, 51-61.
 - [5] Kumar, S., Yildirim, A., Khan, Y. and Jafari, H. (2012) Analytical Solution of Fractional Black-Scholes European Option Pricing Equation by Using Laplace Transform. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **2**, 1-9.
 - [6] Cartea, Á. (2013) Derivatives Pricing with Marked Point Processes Using Tick-by-Tick Data. *Quantitative Finance*, **13**, 111-123. <https://doi.org/10.1080/14697688.2012.661447>
 - [7] Leonenko, N.N., Meerschaert, M.M. and Sikorskii, A. (2013) Fractional Pearson Diffusions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **403**, 532-546. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.02.046>
 - [8] Cox, J.C. and Ross, S.A. (1976) The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes. *Journal of Financial Economics*, **3**, 145-166. [https://doi.org/10.1016/0304-405x\(76\)90023-4](https://doi.org/10.1016/0304-405x(76)90023-4)
 - [9] Jo, S., Yang, M. and Kim, G. (2016) On Convergence of Laplace Inversion for the American Put Option under the CEV Model. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **305**, 36-43. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2016.03.030>
 - [10] Wang, Y., Rong, X. and Zhao, H. (2018) Optimal Investment Strategies for an Insurer and a Reinsurer with a Jump Diffusion Risk Process under the CEV Model. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **328**, 414-431. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2017.08.001>
 - [11] Jumarie, G. (2008) Stock Exchange Fractional Dynamics Defined as Fractional Exponential Growth Driven by (Usual) Gaussian White Noise. Application to Fractional Black-Scholes Equations. *Insurance: Mathematics and Economics*, **42**, 271-287. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2007.03.001>
 - [12] 许作良, 马青华. 金融中的反问题及数值方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2018.
 - [13] Bouchouev, I. and Isakov, V. (1997) The Inverse Problem of Option Pricing. *Inverse Problems*, **13**, L11-L17. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/13/5/001>
 - [14] Jiang, X. and Xu, X. (2020) On Implied Volatility Recovery of a Time-Fractional Black-Scholes Equation for Double Barrier Options. *Applicable Analysis*, **100**, 3145-3160. <https://doi.org/10.1080/00036811.2020.1712369>
 - [15] Flint, E.J. and Mare, E. (2016) Fractional Black-Scholes Option Pricing, Volatility Calibration and Implied Hurst Exponents. *SSRN Electronic Journal*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.2793927>
 - [16] Djetcha, E. and Kamdem, J.S. (2021) Local and Implied Volatilities with the Mixed-Modified-Fractional-Dupire Model. *Chaos, Solitons & Fractals*, **152**, Article 111328. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.111328>

- [17] Haentjens, T. and Hout, K. (2010) ADI Finite Difference Discretization of the Heston-Hull-White PDE. *AIP Conference Proceedings*, **1281**, 1995-1999.
<https://doi.org/10.1063/1.3498329>
- [18] Jin, Y., Wang, J., Kim, S., Heo, Y., Yoo, C., Kim, Y., *et al.* (2018) Reconstruction of the Time-Dependent Volatility Function Using the Black-Scholes Model. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2018**, 1-9. <https://doi.org/10.1155/2018/3093708>