

$(\mathcal{M}, i)$ -quasi-Stirling 排列的欧拉多项式的实根性

陈梦瑜

浙江师范大学数学系, 浙江 金华

收稿日期: 2024 年 5 月 28 日; 录用日期: 2024 年 6 月 22 日; 发布日期: 2024 年 6 月 29 日

摘要

多重集上的 quasi-Stirling 排列作为 Stirling 排列的推广, 其关于统计量的计数多项式的 γ -正性、实根性等组合性质引起了众多学者的广泛关注。本文通过应用由 Yan-Zhu 引入的 quasi-Stirling 排列与相关标号树之间的组合双射给出了 $(\mathcal{M}, i)$ -quasi-Stirling 排列的欧拉多项式的递归关系, 并在此基础上证明了该类多项式的实根性, 从而得到了 Ma-Pan 关于 $(\mathcal{M}, i)$ -多重集排列的欧拉多项式实根性结论的类比结果。

关键词

quasi-Stirling 排列, 标号树, 实根性

Real-Rootedness of Eulerian Polynomials on $(\mathcal{M}, i)$ -quasi-Stirling Permutations

Mengyu Chen

Department of Mathematics, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: May 28th, 2024; accepted: Jun. 22nd, 2024; published: Jun. 29th, 2024

Abstract

quasi-Stirling permutations were introduced as a generalization of Stirling permutations. The combinatorial properties of associated polynomials on quasi-Stirling permutations including the gamma-positivity and the real-rootedness have been extensively exploited in the literature. The main objective of this paper is to prove that the Eulerian polynomial on $(\mathcal{M}, i)$ -quasi-Stirling permutations is real-rooted. This is accomplished by deriving the recurrence relations on the related polynomials via the bijection between quasi-Stirling permutations and certain labeled trees introduced by Yan-Zhu. Our result is an analogue of the result due to Ma-Pan concerning the real-rootedness of the Eulerian polynomial on $(\mathcal{M}, i)$ -permutations.

Keywords

quasi-Stirling Permutation, Labeled Tree, Real-Rootedness

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

设一般多重集 $\mathcal{M} = \{1^{p_1}, 2^{p_2}, \dots, n^{p_n}\}$, 其中 p_i 为数字 i 出现的次数, 且 $p_i \geq 1$. 记 $\mathcal{M}$ 上的全体排列 $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N$ ($N = p_1 + p_2 + \dots + p_n$) 构成的集合为 $\mathfrak{S}_{\mathcal{M}}$. 特别地, 当 $\mathcal{M} = [n] = \{1, 2, \dots, n\}$ 时, 用 $\mathfrak{S}_n$ 来表示. 若给定排列 σ 满足 $\sigma_i > \sigma_{i+1}$, 其中 $i \in [N]$, $\sigma_0 = \sigma_{N+1} = 0$, 则称指标 i 为下降位, 记 σ 的下降位的个数为 $\text{des}(\sigma)$. 对于给定的 $i \in \mathcal{M}$, 所有满足 $\sigma_1 = i$ 的多重集排列构成的集合记作 $\mathfrak{S}_{\mathcal{M}, i}$, 并且 $(\mathcal{M}, i)$ -多重集排列的欧拉多项式定义如下:

$$A_{\mathcal{M}, i}(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathcal{M}, i}} x^{\text{des}(\sigma)},$$

特别地, $A_{\mathcal{M}}(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathcal{M}}} x^{\text{des}(\sigma)}$. 当 $\mathcal{M} = [n]$ 时, $A_{\mathcal{M}, i}(x)$ 和 $A_{\mathcal{M}}(x)$ 可以简记作 $A_{n, i}(x)$ 和 $A_n(x)$, 其中 $A_n(x)$ 是经典的欧拉多项式.

若一个多重集 $\mathcal{M}$ 上的排列 σ 中不存在四个指标 $i < j < k < l$ 使得 $\sigma_i = \sigma_k$, $\sigma_j = \sigma_l$,

$\sigma_i \neq \sigma_j$, 则称其为 *quasi-Stirling* 排列 [1]. 我们用 $\overline{\mathcal{Q}}_{\mathcal{M}}$ 表示 $\mathcal{M}$ 上全体 quasi-Stirling 排列构成的集合, 用 $\overline{\mathcal{Q}}_{\mathcal{M},i}$ 表示满足 $\sigma_1 = i$ 的全体 quasi-Stirling 排列构成的集合. 如 $\mathcal{M} = \{1^2, 2^2\}$, 则 $\overline{\mathcal{Q}}_{\mathcal{M},1} = \{1122, 1221\}$. 类似地, $(\mathcal{M}, i)$ - quasi-Stirling 排列多项式定义为:

$$\overline{\mathcal{Q}}_{\mathcal{M},i}(x) = \sum_{\sigma \in \overline{\mathcal{Q}}_{\mathcal{M},i}} x^{des(\sigma)},$$

研究多项式的对称性、对数凹性、实根性和单峰性等性质是组合学领域一项重要的工作. 由于 Foata, Schützenberger [2] 和 Strehl [3] 对经典欧拉多项式 γ -正性的研究, 多项式的 γ -正性也开始受到广泛的关注.

1984 年, Simon [4] 给出了多重集上欧拉多项式 $A_{\mathcal{M}}(x)$ 实根性的证明. 后来, Savage 和 Visontai [5] 给出了欧拉多项式的另一种推广形式, 并证明了多项式 $A_{n,i}(x)$ 的实根性. Brändén 在文献 [6] 中证明了若回文多项式的系数为非负且它只有实根, 那么它就是 γ -正多项式. 受 Ma-Pan [7] 给出的多项式 $A_{\mathcal{M},i}(x)$ 实根性研究的启发, 本文得到了一般多重集上的 quasi-Stirling 排列中关于该结论的类比结果.

2. quasi-Stirling 排列对应的标号树

Yan-Zhu [8] 引入了一类新的有序标号树, 并建立了标号树与 quasi-Stirling 排列之间的双射 ϕ . 这样的标号树满足如下要求:

1. 树上的顶点标号取自于 $\{0\} \cup \mathcal{M}$;
2. 根节点标为 0;
3. 定义点 v 到根节点的距离为点 v 的层数. 对于一个奇数层标号为 i 的顶点 v , 其恰好有 $p_i - 1$ 个孩子, 并且每个孩子标号与 v 相同.

设 $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ 为满足上述条件的有序标号树的集合. 图 1 是一棵有序标号树 $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$, 其中 $\mathcal{M} = \{1, 2^2, 3, 4, 5^3, 6, 7\}$.

对于排列 σ , 它的最左端 (最右端) 用 $\text{first}(\sigma)$ ($\text{last}(\sigma)$) 表示. 类似地, 对于一个标号树 T , 我们用 $\text{first}(T)$ ($\text{last}(T)$) 表示根的最左端 (最右端) 的孩子. 下面我们来介绍这个双射 ϕ . 如果 T 仅有一个顶点, 令 $\phi(T) = \epsilon$, 其中 ϵ 表示空排列. 否则, 假设 $\text{first}(T) = r$.

1. 当根的最左端孩子为叶子时. 设 T_0 为将 T 去除掉以它的最左端孩子为根的子树所得到的树. 定义 $\phi(T) = r\phi(T_0)$.
2. 当根的最左端孩子有 k 个孩子. 对于 $1 \leq i \leq k$, 设 T_i 为根的最左端孩子的第 i 个孩子为根的子树. 用 T'_i 表示将 T_i 的根标号为 0 所得到的树. 设 T_0 为将 T 去除掉所有的子树 $T_1, T_2, \dots, T_k$ 以及所有标号为 r 的顶点和关联的边所得到的树. 定义 $\phi(T) = r\phi(T'_1)r\phi(T'_2)\dots r\phi(T'_k)r\phi(T_0)$.

例如, 对于图 1 的树 T , 有 $\phi(T) = 2275164553$.

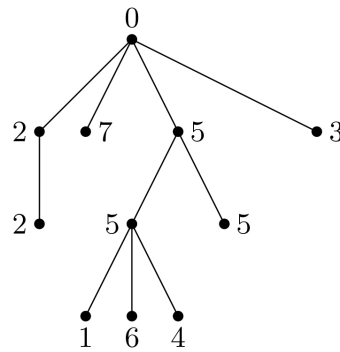


Figure 1. Labeled tree $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ where $\mathcal{M} = \{1, 2^2, 3, 4, 5^3, 6, 7\}$

图 1. 标号树 $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$, 其中 $\mathcal{M} = \{1, 2^2, 3, 4, 5^3, 6, 7\}$

对于一个排列 $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N$, 令 $\sigma_{N+1} = \sigma_1$, $\sigma_0 = \sigma_N$. 定义 σ_i 为 σ 的循环下降 (循环上升), 若满足 $\sigma_i > \sigma_{i+1}$ ($\sigma_i < \sigma_{i+1}$), 其中 $i \in [N]$. 记 σ 上循环下降 (循环上升) 的个数为 $\text{cdes}(\sigma)$ ($\text{casc}(\sigma)$). 记 σ 中循环下降构成的集合为 $\text{CDES}(\sigma)$.

对于标号树 $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$, 设 T 的一个顶点 u 标号为 v_0 , 假设点 u 的孩子标号从左到右依次为 $v_1, v_2, \dots, v_l$. 点 u 的循环下降数 $\text{cdes}(u)$ (循环上升数 $\text{casc}(u)$) 定义为 $\text{cdes}(v_0 v_1 v_2 \dots v_l)$ ($\text{casc}(v_0 v_1 v_2 \dots v_l)$). 树 T 的循环下降数以及循环上升数分别定义为 $\text{cdes}(T) := \sum_{u \in V(T)} \text{cdes}(u)$, $\text{casc}(T) := \sum_{u \in V(T)} \text{casc}(u)$, 其中 $V(T)$ 表示 T 的点集. 如图 1, $\text{cdes}(T) = 5$, $\text{casc}(T) = 4$.

对于双射 ϕ , 我们有如下性质.

引理 2.1. [8] 对于非空多重集 $\mathcal{M}$, ϕ 为 $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ 与 $\overline{\mathcal{Q}}_{\mathcal{M}}$ 之间的一个双射使得

$$(\text{cdes}, \text{first}, \text{last})T = (\text{des}, \text{first}, \text{last})\phi(T),$$

其中 $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$.

设 $\mathcal{M} = \{1^{p_1}, 2^{p_2}, \dots, n^{p_n}\}$, 其中 $1 \leq i \leq n$, $p_i \geq 1$. Yan [9] 等人建立了标号树 $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ 与标号树 $\mathcal{T}_{\mathcal{M}_j}$ 之间的双射 ψ_j , 其中 $\mathcal{M}_j$ 是通过改变 $\mathcal{M}$ 中的元素 j 到 $j-1$ 得到的多重集, 换言之, 若存在 $p_j > 1$ ($j \geq 2$), 则 $\mathcal{M}_j = \{1^{p_1}, 2^{p_2}, \dots, (j-1)^{p_{j-1}+1}, j^{p_j-1}, \dots, n^{p_n}\}$. 下面我们给出 $\psi_j(T)$ 的构造.

1. 当奇数层顶点 $j-1$ 是最右边偶数层顶点 j 的后代时, 假设最右边的偶数层顶点 j 有 k 个孩子, 依次标号为 $x_1, x_2, \dots, x_k$. 设 T_p 是第 p (从左到右数) 个偶数层顶点以 $j-1$ 为根的子树, 其中 $1 \leq p \leq k_{j-1}-1$. 类似的, 设 T'_q 是第 q (从左到右数) 个偶数层顶点以 j 为根的子树, 其中 $1 \leq q \leq k_j-2$. 首先, 我们从 T 中移除子树 T_p 和 T'_q . 然后, 用 $j-1$ 重新标记最右边的偶数层顶点 j , 并且奇数层顶点 j 由 $j-1$ 标记, $j-1$ 由 j 标记. 最后, 我们将 T_p 附加到奇数层顶点 $j-1$ 使其成为它的第 p 个子树 (从左到右数), 将 T'_q 附加到奇数层顶点 j 使其成为它的第 q 个子树 (从左到右数). 令 T^* 为所得到的树. 下面我们将展示如何从 T^* 变化成树 $\psi_j(T)$.

- (a) 若存在 $1 \leq l \leq k$, $x_l = j-1$, 则通过 T^* 的构造, 奇数层顶点 j 是 T^* 中最右边的偶数层顶

点 $j-1$ 的第 l 个孩子. 令 $\psi_j(T)$ 是通过重新安排 T^* 中最右边的偶数层顶点 $j-1$ 的孩子使得奇数层顶点 $x_{l+1}, \dots, x_k, j, x_1, x_2, \dots, x_{l-1}$ 是它从左到右的孩子而形成的树. 如图 2 所示.

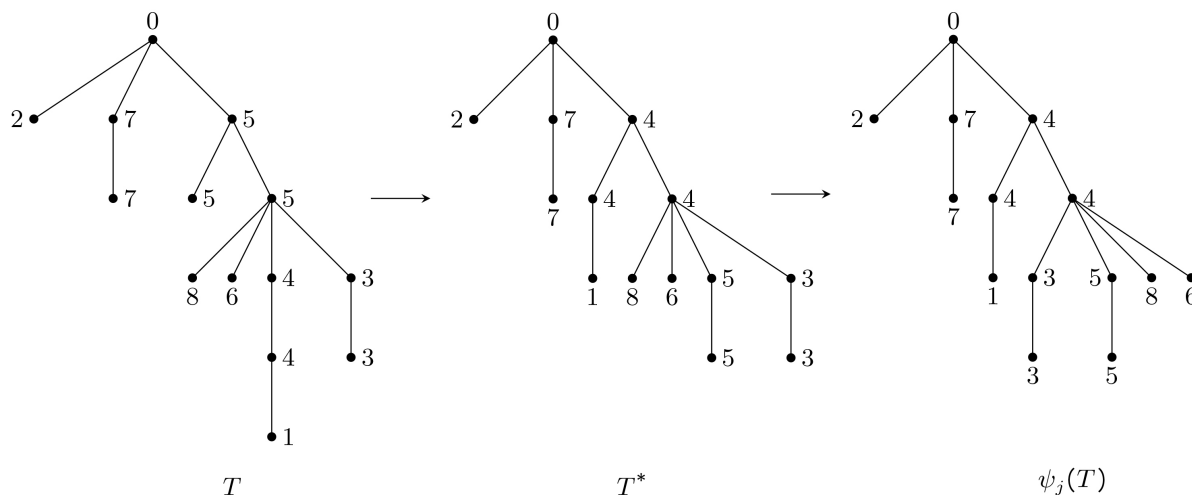


Figure 2. Subcase (a)

图 2. 子情形 (a)

(b) 若对任意的 $1 \leq l \leq k$, $x_l \neq j-1$, 令 $\psi_j(T) = T^*$. 如图 3 所示.

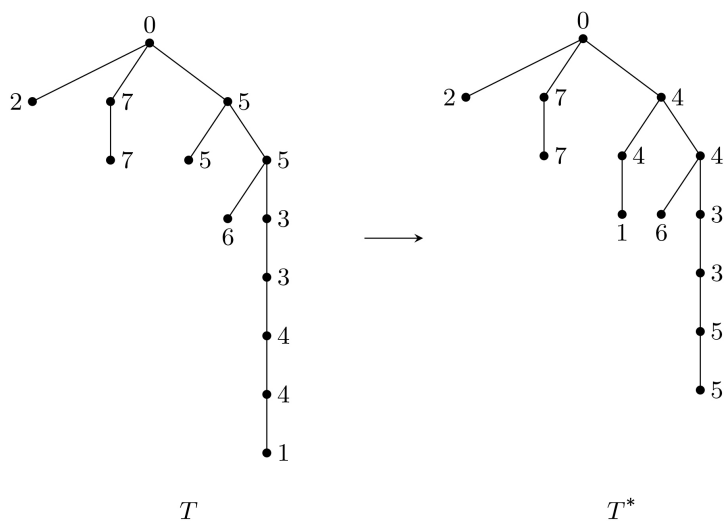


Figure 3. Subcase (b)

图 3. 子情形 (b)

2. 否则. 令 T' 是以最右边偶数层顶点 j 为根的子树. 从 T 中移除子树 T' , 用 $j-1$ 重新标记 T' 的根, 并将其附加到奇数层顶点 $j-1$ 作为它的最右边子树. 令 $\psi_j(T) = T^*$ 为所得到的树. 如图 4 所示.

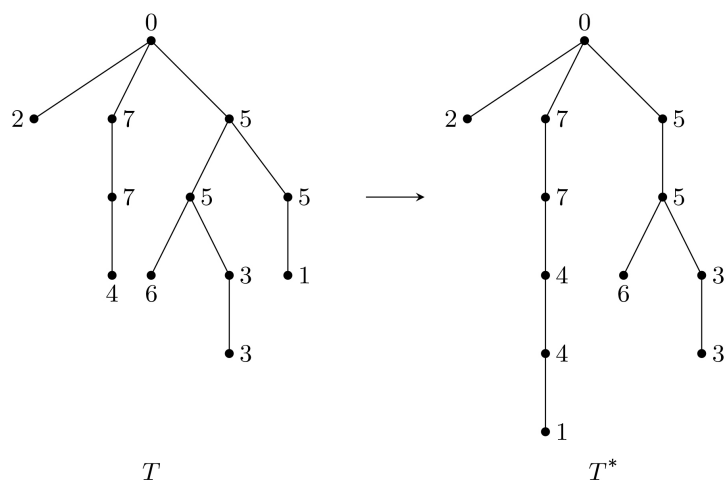


Figure 4. Case 2

图 4. 情形 2

同理可以建立标号树 $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ 与标号树 $\mathcal{T}_{\mathcal{M}'_j}$ 之间的双射 $\bar{\psi}_j$, 其中 $\mathcal{M}'_j$ 是通过改变 $\mathcal{M}$ 中的元素 j 到 $j+1$ 得到的多重集. 对于双射 ψ_j , 我们有如下性质.

引理 2.2. 设 $\mathcal{M} = \{1^{p_1}, 2^{p_2}, \dots, n^{p_n}\}$, 其中 $1 \leq i \leq n$, $p_i \geq 1$. 若存在 $p_j > 1 (j \geq 2)$, 则 $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ 和 $\mathcal{T}_{\mathcal{M}_j}$ 之间存在双射 ψ_j 使得对任意的 $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$, 有

$$(\text{cdes}, \text{casc})T = (\text{cdes}, \text{casc})\psi_j(T).$$

在上述双射的基础上, 我们可以构造出 $\bar{\mathcal{Q}}_{\mathcal{M},i}(x)$ 与 $\bar{\mathcal{Q}}_{\mathcal{M}',i}(x)$ 之间的双射 Φ ,

$$\Phi = \phi \circ \bar{\psi}_{i-2}^{p_1 + \dots + p_{i-2} - (i-2)} \circ \dots \circ \bar{\psi}_1^{p_1 - 1} \circ \psi_{i+2}^{p_{i+2} + \dots + p_n - (n-i-1)} \circ \dots \circ \psi_n^{p_n - 1} \circ \phi,$$

其中 $\mathcal{M} = \{1^{p_1}, \dots, (i-1)^{p_{i-1}}, i^{p_i}, (i+1)^{p_{i+1}}, \dots, n^{p_n}\}$, $\mathcal{M}' = \{1, \dots, (i-2), (i-1)^a, i^{p_i}, (i+1)^b, (i+2), \dots, n\}$, $a = p_1 + \dots + p_{i-1} - (i-2)$, $b = p_{i+1} + \dots + p_n - (n-i-1)$.

3. $(\mathcal{M}, i)$ -quasi-Stirling 排列多项式的实根性

Ma-Pan 将欧拉多项式推广至一般多重集, 证明了 $(\mathcal{M}, i)$ -多重集欧拉多项式的实根性. 受 Yan 等人证明的启发, 本文将 Ma-Pan 的结果推广至一般多重集上的 quasi-Stirling 排列. 下面是本文的主要结论:

定理 3.1. 设 $\mathcal{M} = \{1^{p_1}, 2^{p_2}, \dots, n^{p_n}\}$ 是一个多重集, 对于任意的 $i \in \mathcal{M}$, 多项式 $\bar{\mathcal{Q}}_{\mathcal{M},i}(x)$ 是实根的.

首先我们讨论 $n \leq 3$ 的情况. 当 $\mathcal{M} = \{1^{p_1}\}$ 时, $\bar{\mathcal{Q}}_{\mathcal{M},1}(x) = x$ 显然只有实根. 当 $\mathcal{M} = \{1^{p_1}, 2^{p_2}\}$ 时, 考虑 $\bar{\mathcal{Q}}_{\mathcal{M},1}(x)$ 的展开式, 任意 $\bar{\mathcal{Q}}_{\mathcal{M},1}$ 中的排列 σ 可以表示成如下的形式:

$$111 \dots 11$$

根据 *quasi-Stirling* 排列的定义, 排列中所有的 2 只能同时出现在其中一个方框内,

1. 若 2 出现在前 $p_1 - 1$ 个方框内, 则 $des(\sigma) = 2$.
2. 若 2 出现在第 p_1 个方框内, 则 $des(\sigma) = 1$.

因此 $\overline{Q}_{\mathcal{M},1}(x) = (p_1 - 1)x^2 + x$ 只有实根. 类似地 $\overline{Q}_{\mathcal{M},2}(x) = p_2x^2$ 也只有实根.

当 $\mathcal{M} = \{1^{p_1}, 2^{p_2}, 3^{p_3}\}$ 时, 任意 $\overline{Q}_{\mathcal{M},1}$ 中的排列 σ 同样可以表示成如下的形式:

$$111 \dots 11$$

其中排列中所有的 2 和 3 只能分别同时出现在其中一个方框内,

1. 若 2 和 3 出现在不同的方框内,
 - (a) 2 和 3 均出现在前 $p_1 - 1$ 个方框内, 则共有 $(p_1 - 1)(p_1 - 2)$ 种排列方式, 此时 $des(\sigma) = 3$.
 - (b) 2 和 3 中有一个出现在第 p_1 个方框内, 则共有 $2(p_1 - 1)$ 种排列方式, 此时 $des(\sigma) = 2$.
2. 若 2 和 3 出现在同一个方框内, 并且所有的 3 在 2 之后, 则 3 只有 1 种排列方式, 即

$$22 \dots 233 \dots 3$$

- (a) 2 和 3 出现在前 $p_1 - 1$ 个方框内, 则 $des(\sigma) = 2$.
- (b) 2 和 3 出现在第 p_1 个方框内, 则 $des(\sigma) = 1$.
3. 若 2 和 3 出现在同一个方框内, 并且所有的 3 介于两个 2 之间, 则 2 和 3 之间会产生一个下降并且 3 共有 $p_2 - 1$ 种排列方式, 即

$$222 \dots 22$$

- (a) 2 和 3 出现在前 $p_1 - 1$ 个方框内, 则 $des(\sigma) = 3$.
- (b) 2 和 3 出现在第 p_1 个方框内, 则 $des(\sigma) = 2$.
4. 若 2 和 3 出现在同一个方框内, 并且以 3 为首, 则 2 和 3 之间会产生一个下降并且 2 共有 p_3 种排列方式, 即

$$333 \dots 33$$

- (a) 2 和 3 出现在前 $p_1 - 1$ 个方框内, 则 $des(\sigma) = 3$.
- (b) 2 和 3 出现在第 p_1 个方框内, 则 $des(\sigma) = 2$.

因此有 $\overline{Q}_{\mathcal{M},1}(x) = (p_1 - 1)(p_1 + p_2 + p_3 - 3)x^3 + (3p_1 + p_2 + p_3 - 4)x^2 + x$, 同样的方法可以得到

$$\begin{aligned}\overline{Q}_{\mathcal{M},2}(x) &= [p_2(p_1 + p_2 + p_3) - 3p_2 - p_3 + 1]x^2 + (2p_2 + p_3 - 1)x, \\ \overline{Q}_{\mathcal{M},3}(x) &= p_3(p_1 + p_2 + p_3 - 2)x^3 + p_3x^2.\end{aligned}$$

为了证明一般的 (M, i) -*quasi-Stirling* 排列多项式的实根性, 本文需要用到 Wang-Yeh [10] 给出的关于两个相互作用的实多项式线性扩展的实根性的命题.

定义 3.1. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是两个实根多项式, 其中 $s_1 \geq \dots \geq s_n$ 和 $r_1 \geq \dots \geq r_m$ 分别是 f 和 g 的根, 若 $m = n - 1$ 并且

$$r_1 \geq s_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_{n-1} \geq s_{n-1} \geq r_n$$

则称 g 交替于 f .

命题 3.1. [10] 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是两个非负系数的实根多项式, 并且 g 交替于 f , 若 $ad \geq bc$, 则 $(ax + b)f(x) + x(cx + d)g(x)$ 是实根的.

在第二节中我们已经构造出了 $\overline{\mathcal{Q}}_{\mathcal{M},i}(x)$ 与 $\overline{\mathcal{Q}}_{\mathcal{M}',i}(x)$ 之间保持下降数不变的双射 Φ , 因此只需证明 $\overline{\mathcal{Q}}_{\mathcal{M}',i}(x)$ 的实根性.

定理 3.2. 设多重集 $\mathcal{M} = \{1^{p_1}, 2^{p_2}, \dots, n^{p_n}\}$, 其中 $p_i \geq 1$, $N = p_1 + \dots + p_n$. 对于任意的 $i \in \mathcal{M}$, 多项式 $\overline{\mathcal{Q}}_{\mathcal{M},i}(x)$ 是实根的, $\mathcal{M}' = \{1, \dots, (i-2), (i-1)^a, i^{p_i}, (i+1)^b, (i+2), \dots, n\}$, $a = p_1 + \dots + p_{i-1} - (i-2)$, $b = p_{i+1} + \dots + p_n - (n-i-1)$.

证明. 当 $n \leq 3$ 时, $\overline{\mathcal{Q}}_{\mathcal{M},i}(x)$ 的实根性已经给出, 下面考虑 $n \geq 4$ 的情况.

对重数 N 进行归纳证明. 当 $N = 1$ 时, $\overline{\mathcal{Q}}_{\mathcal{M}',i}(x) = x$ 显然只有实根. 假设重数为 $N - 1$ 时, 多项式 $\overline{\mathcal{Q}}_{\mathcal{M}',i}(x)$ 只有实根成立.

1. 当 $i \leq n - 2$ 时, 令 $\mathcal{M}'' = \{1, \dots, i-2, (i-1)^a, i^{p_i}, (i+1)^b, i+2, \dots, n-1\}$, 则任意的 $\sigma \in \overline{\mathcal{Q}}_{\mathcal{M}',i}$ 都可以通过 $\overline{\mathcal{Q}}_{\mathcal{M}'',i}$ 中的排列 σ' 插入一个 n 得到.

(a) 若 n 插在 σ' 的下降位, 则 $des(\sigma) = des(\sigma')$.

(b) 若 n 插在 σ' 中除第一个位置以外的上升位, 则 $des(\sigma) = des(\sigma') + 1$.

记 $\overline{\mathcal{Q}}_{\mathcal{M}',i}(x) = \sum_{m>0} a_m x^m$, $\overline{\mathcal{Q}}_{\mathcal{M}'',i}(x) = \sum_{m>0} b_m x^m$, 则 a_m, b_m 满足

$$a_m = mb_m + [N - 1 - (m - 1)]b_{m-1}.$$

从而

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{Q}}_{\mathcal{M}',i}(x) &= \sum_{m>0} a_m x^m \\ &= \sum_{m>0} mb_m x^m + \sum_{m>0} (N-1)b_{m-1} x^m - \sum_{m>0} (m-1)b_{m-1} x^m \\ &= x \sum_{m>0} mb_m x^{m-1} + x \sum_{m>0} (N-1)b_{m-1} x^{m-1} - x^2 \sum_{m>0} (m-1)b_{m-1} x^{m-2} \\ &= (N-1)x \cdot \overline{\mathcal{Q}}_{\mathcal{M}'',i}(x) + (x-x^2)\overline{\mathcal{Q}}'_{\mathcal{M}'',i}(x) \end{aligned}$$

2. 当 $i > n - 2$ 时, 令 $\mathcal{M}'' = \{2, \dots, i-2, (i-1)^a, i^{p_i}, (i+1)^b, i+2, \dots, n\}$, 则任意的 $\sigma \in \overline{\mathcal{Q}}_{\mathcal{M}',i}$ 都可以通过 $\overline{\mathcal{Q}}_{\mathcal{M}'',i}$ 中的排列 σ' 插入一个 1 得到. 此时 a_m, b_m 同样满足

$$a_m = mb_m + [N - 1 - (m - 1)]b_{m-1}.$$

根据归纳假设以及实根判定定理可知, 多项式 $\overline{Q}_{\mathcal{M}', i}(x)$ 是实根的.

参考文献

- [1] Archer, K., Gregory, A., Pennington, B. and Slayden, S. (2019) Pattern Restricted Quasi-Stirling Permutations. *The Australasian Journal of Combinatorics*, **74**, 389-407.
- [2] Foata D. and Schützenberger, M.-P. (1970) Théorie Géométrique des Polynômes Eulériens. In: *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 138, Springer-Verlag. <https://doi.org/10.1007/BFb0060799>
- [3] Foata, D. and Strehl, V. (1974) Rearrangements of the Symmetric Group and Enumerative Properties of the Tangent and Secant Numbers. *Mathematische Zeitschrift*, **137**, 257-264. <https://doi.org/10.1007/BF01237393>
- [4] Simon, R. (1984) A Multi-Indexed Sturm Sequence of Polynomials and Unimodality of Certain Combinatorial Sequences. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **36**, 15-22. [https://doi.org/10.1016/0097-3165\(84\)90075-X](https://doi.org/10.1016/0097-3165(84)90075-X)
- [5] Savage, C.D. and Visontai, M. (2015) The s -Eulerian Polynomials Have Only Real Roots. *Transactions of the AMS*, **367**, 1441-1466. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2014-06256-9>
- [6] Brändén, P. (2015) Unimodality, Log-Concavity, Real-Rootedness and Beyond. In: Bona, M., Ed., *Handbook of Enumerative Combinatorics*, Chapman and Hall/CRC, 437-483.
- [7] Ma, J. and Pan, K. (2023) (M, i) -Multiset Eulerian Polynomials. *Advances in Applied Mathematics*, **149**, Article 102547. <https://doi.org/10.1016/j.aam.2023.102547>
- [8] Yan, S.H.F. and Zhu, X. (2022) Quasi-Stirling Polynomials on Multisets. *Advances in Applied Mathematics*, **141**, Article 102415. <https://doi.org/10.1016/j.aam.2022.102415>
- [9] Yan, S.H.F., Yang, L., Huang, Y. and Zhu, X. (2022) Statistics on Quasi-Stirling Permutations of Multisets. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **55**, 1265-1277. <https://doi.org/10.1007/s10801-021-01093-z>
- [10] Wang, Y. and Yeh, Y.N. (2015) Polynomials with Real Zeros and Polya Frequency Sequences. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **109**, 63-74. <https://doi.org/10.1016/j.jcta.2004.07.008>