Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(6), 2984-2995
Published Online June 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.136285

$\mathbb{R}^N$上一类带有凹凸项的 p-Kirchhoff 方程无穷多解的存在性

刘立华

盐城师范学院数学与统计学院，江苏 盐城

收稿日期：2024年5月28日；录用日期：2024年6月22日；发布日期：2024年6月29日

摘　要

本文中，我们研究如下一类p-**Kirchhoff**椭圆方程

$$M(\|u\|^p)(-\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u) = \lambda H(x)|u|^{m-2}u + \mu K(x)|u|^{q-2}u,\ \ x \in \mathbb{R}^N,$$

解的存在性，其中$1 < p < N$，$1 < m$，$q < p^* = \frac{pN}{N-p}$，$M(t) = a + ct^\tau$。$V(x)$，$H(x)$，$K(x)$是非负的权函数。利用喷泉引理和对偶喷泉引理，我们得到了上述问题存在无穷多解。

关键词

p-**Kirchhoff**方程，喷泉引理，对偶喷泉引理，无穷多解

Infinitely Many Solutions for a Class of p-Kirchhoff Equations with Concave-Convex Terms on $\mathbb{R}^N$

Lihua Liu

School of Mathematics and Statistics, Yancheng Teachers University, Yancheng Jiangsu

Received: May 28th, 2024; accepted: Jun. 22nd, 2024; published: Jun. 29th, 2024

文章引用: 刘立华. $\mathbb{R}^N$上一类带有凹凸项的 p-Kirchhoff 方程无穷多解的存在性[J]. 应用数学进展, 2024, 13(6): 2984-2995. DOI: 10.12677/aam.2024.136285

Abstract

In this paper, we prove the multiplicity of solutions for the following p-Kirchhoff elliptic equation

$$M(\|u\|^p)(-\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u) = \lambda H(x)|u|^{m-2}u + \mu K(x)|u|^{q-2}u, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

where $1 < p < N$, $1 < m$, $q < p^* = \frac{pN}{N-p}$, $M(t) = a + ct^\tau$. $V(x)$, $H(x)$, $K(x)$ are weight functions which may be unbounded or decaying to zero at infinity. By the methods of Fountain Theorem and Dual Fountain Theorem, we prove that above problem admits infinitely many solutions.

Keywords

p-Kirchhoff Equation, Fountain Theorem, Dual Fountain Theorem, Infinitely Many Solutions

1. 引言

本文,我们研究如下一类p-Kirchhoff 椭圆问题

$$\begin{cases} M(\|u\|^p)(-\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u) = \lambda H(x)|u|^{m-2}u + \mu K(x)|u|^{q-2}u, & x \in \mathbb{R}^N \\ u(x) \to 0, \quad |x| \to \infty, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中$\Delta_p = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ 是$p - Laplacian$算子,$1 < p < N$.该方程的(1.1)源于在文献 [1]中提出的一个著名物理模型.

近年来，Kirchhoff方程解的存在性和多解性研究已经得到了广泛关注.在有界域上，可参见 [2–5], 在无界域以及全空间$\mathbb{R}^N$上, 可参见 [6–9] 及相关文献. 在文献 [10] 中，学者研究如下带有

非线性边界的椭圆方程

$$\begin{cases} -div(a(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{p-2}u = \lambda g(x)|u|^{r-2}u, & \in \Omega \\ a(x)|\nabla u|^{p-2}\partial_v u + b(x)|u|^{p-2}u = 0, & on\partial\Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

其中Ω 是一带有$C^{1,\delta}$边界的有界区域在全空间$(R)^N$上的外补，显然Ω 是无界区域,在适当的条件假设下,利用临界点理论和喷泉引理 [11]) 得到当$p \le q < r < p^*$时，对于任意的$\lambda > 0$,方程(1.2)存在并且其能量泛函满足$J(u_k) \to \infty$,而当$1 < r < p$ 和$1 < q < p$时，方程(1.2)存在无穷多个解u_k ,并且其能量泛函满足$J(v_k) \to 0$.注意到条件$p \le q < r < p^*$ 意味着泛函的非线性项是超线性的，条件$1 < r < p$和$1 < q < p$意味着泛函中的非线性项是次线性的.受到文献 [10] 的启发，本文我们尝试讨论一类在全空间$(R)^N$ 上带有次线性项又带有超线性项条件（简称凹凸项）的p-Kirchhoff方程无穷多解的存在性. 近年来关于利用喷泉定理得到含有$p-Laplacian$算子的椭圆方程无穷多解的方程的研究已经有不少的文献，部分可参见 [10,12–14]，然后在上述的文件中，通常需要假设非线性项满足某种类似于由著名学者Ambrosetti 和Rabinowitz提出的（AR）条件 [15]条件,

(AR): 存在$\mu > p$,使得

$$0 < \mu F(x,t) \le tf(x,t), \quad t \ne 0.$$

(AR)条件一方面保证了解序列的有界性，另一方面该条件意味着这非线性项$f(x,u)$是超线性的.而本文的所研究的方程带有凹凸非线性项不满足(AR) 条件.

由于$\mathbb{R}^N$ 是无界区域, 通常嵌入定理的紧性缺失, 因此受到文献 [16,17]的启发, 我们需要对权函数$V(x)$, $H(x)$, $K(x)$作一些假设，使得嵌入定理的紧性保持.设$B_r = B_r(0)$ 是$\mathbb{R}^N$的一个球面，其半径为$r > 0$, $B_r^c = \mathbb{R}^N \setminus \bar{B_r}$, 以及有

(A_1) 设非负权函数$V(x), H(x), K(x) \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$.

(A_2) 对于$1 < m < p$, 存在$H_1(x) > 0$ $x \in \mathbb{R}^N$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^N} H^\sigma(x)H_1^{1-\sigma}(x)dx < \infty, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^N}(H_1(x)V^{-1}(x)) < \infty.$$

以及$\sup\limits_{x\in B_r^c}(H_1(x)V^{-1}(x)) \to 0,\ r \to \infty$, 其中$\sigma = p/(p-m)$.

(A_3) 对于$p < q < p^*$, 假设

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N}(K(x))^{p*-p}(V(x))^{q-p*} < \infty.$$

以及$\sup\limits_{x\in B_r^c}(K(x))^{p*-p}(V(x))^{q-p*} \to 0$, $r \to \infty$.

列出如下的著名Sobolev 不等式 [1]

$$S(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p*})^{\frac{1}{p^*}} \le (\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p dx)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N), \tag{1.3}$$

$1 < p < N$, S 是一个正的常数.

本文的主要结果如下.

定理1.1. *假设$1 < m < p < p(\tau+1) < q < p^*$ 以及$(A_1)-(A_3)$，那么,*

(i) 对于所有的$\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$, 问题(1.1)在X上存在无穷多个解u_k，并且其能量泛函满足$J(u_k) \to \infty$，$k \to \infty$.

(ii) 对于所有的$\lambda > 0$, $\mu \in R$, 问题(1.1)在X上存在无穷多个解u_k，并且其能量泛函满足$J(v_k) \to 0$，$k \to \infty$.

注1.2. *满足$(A_1)-(A_3)$ 的权函数具体例子可参见文献 [16, 17].值得注意的是势函数$V(x)$在无穷远处可以退化为零或者无界.另外$1 < m < p < p(\tau+1) < q < p^*$ 意味着右端的非线性项是凹凸项. 据我所知, 关于全空间上$\mathbb{R}^N$ 上带有非线性凹凸项以及复杂权函数的p-Kirchhoff 椭圆方程无穷多解的研究较为少见.*

在本段末, 我们给出本文的框架: 在第2部分,针对两种情况$1 < m < p$和$p < q < p$，首先证明了两个相应的紧嵌入定理,然后在第3部分我们给出了定理1.1的证明.

2. 预备工作

我们通常定义$\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$为$C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$的完备空间，其范数为

$$||u||_{\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)} = (\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx)^{1/p}. \tag{2.1}$$

以及定义带权的勒贝格空间$L^s(\mathbb{R}^N, V)$，其半范数为

$$\|u\|_{s,V} = (\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^s dx)^{1/s}.$$

为了研究问题(1.1)，通常的泛函空间为$X = D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N, V)$，其范数为

$$||u|| = ||u||_X = (\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + V(x)|u|^p)dx)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.2}$$

其X是自反可分的巴纳赫空间. 我们说$u \in X$ 是问题的(1.1)弱解当且仅当$v \in E$满足

$$(a+c\|u\|^{p\tau})\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + V(x)|u|^{p-2}uvdx = \int_{\mathbb{R}^N}(\lambda H(x)|u|^{m-2}u + \mu K(x)|u|^{q-2}u)vdx. \tag{2.3}$$

易得问题(1.1) 具有变分结构, 即其能量泛函$J(u) : X \to R$定义为

$$J(u) = \frac{a}{p}\|u\|^p + \frac{c}{p(\tau+1)}\|u\|^{p(\tau+1)} - \frac{\lambda}{m}\|u\|^m_{m,H} - \frac{\mu}{q}\|u\|^q_{q,K}. \tag{2.4}$$

J 属于空间$C^1(X,\mathbb{R})$ 以及对于任意的$v \in X$, 其Gateaux 导数可定义为

$$J'(u)v = M(\|u\|^p)\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v + V(x)|u|^{p-2}uvdx \\ -\int_{\mathbb{R}^N}(\lambda H(x)|u|^{m-2}u + \mu K(x)|u|^{q-2}u)vdx. \tag{2.5}$$

显然, 问题的(1.1)的弱解对应这泛函在J在X内的临界点.

接下来, 对于$1 < m < p$ and $p < q < p^*$ 两个情形分别建立相应的紧嵌入定理.

引理2.1. 当$1 < m < p$时, 设条件(A_1) 和(A_2) 满足, 则嵌入$X \hookrightarrow L^m(\mathbb{R}^N, H)$ 是连续且紧的.

证明: 利用Hölder 不等式以及条件和(A_1), (A_2) 得

$$\begin{aligned}\|u\|_{m,H}^m &= \int_{\mathbb{R}^N} H(x)|u|^m dx = \int_{R^N}(V(x)|u|^p)^{\frac{m}{p}}(H(x)^{\frac{p}{p-m}}H_1^{\frac{-m}{p-m}})^{\frac{p-m}{p}}(V(x)^{-1}H_1)^{\frac{m}{p}}dx \\ &\le (\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^p dx)^{\frac{m}{p}}(\int_{\mathbb{R}^N} H(x)^{\frac{m}{p-m}}H_1(x)^{\frac{p}{p-m}}dx)^{\frac{p-m}{p}}(\sup_{x\in\mathbb{R}^N}(H_1(x)V^{-1}(x)))^{\frac{m}{p}} \\ &\le C\|u\|^m\end{aligned} \tag{2.6}$$

(1.2) 意味着嵌入$X \hookrightarrow L^m(\mathbb{R}^N, H)$ 是连续得.

接下来证明该嵌入是紧的. 定义$Y = L^m(\mathbb{R}^N, H)$ 和$B_r = \{x \in \mathbb{R}^N||x| < r\}$. 令$X(\Omega)$ 和$Y(\Omega)$ 是定义在Ω上的泛函空间. 设$\{u_n\}$是X内的有界列,那么$\{u_n\}$ 在$X(B_r)$ 内有界. 容易知道该嵌入$X(B_r) \hookrightarrow Y(B_r)$ 对于任意的$r > 0$ 是紧的, 那么存在$u \in Y(B_r)$ 和一子序列$\{u_{n_k}\}$ 使得$\|u_{n_k} - u\|_{Y(B_r)} \to 0$ ($k \to \infty$), 不失一般性, 我们设$\|u_n - u\|_{Y(B_r)} \to 0$, $n \to \infty$. 我们将证明

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{u\in X\setminus\{0\}}\frac{\|u\|_{Y(B_r^c)}}{\|u\|_X} = 0 \tag{2.7}$$

事实上, 类似于(2.6), 有

$$\|u\|_{Y(B_r^c)}^m \le \|u\|_X^m(\int_{B_r^c} H(x)^{\frac{m}{p-m}}H_1(x)^{\frac{p}{p-m}}dx)^{\frac{p-m}{p}}(\sup_{x\in B_r^c}(H_1(x)V^{-1}(x)))^{\frac{m}{p}}$$

以及由(A_2)得

$$\begin{aligned}\frac{\|u\|_{Y(B_r^c)}}{\|u\|_X} &\le (\int_{B_r^c} H(x)^{\frac{m}{p-m}}H_1(x)^{\frac{p}{p-m}}dx)^{\frac{p-m}{p}}(\sup_{x\in B_r^c}(H_1(x)V^{-1}(x)))^{\frac{m}{p}} \\ &\to 0,\ \ as\ \ n\to\infty.\end{aligned} \tag{2.8}$$

故而(2.7)成立,于是对于任意的$\varepsilon > 0$, 存在r_ε 使得

$$\|u_n\|_{Y(B_{r_\varepsilon}^c)} \le D^{-1}\varepsilon\|u_n\|_X \le \varepsilon,\ for\ n = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{2.9}$$

这里我们设$\|u_n\|_X \le D$. 由于嵌入$X(B_r) \hookrightarrow Y(B_r)$ 对于任意的$r > 0$ 是紧的,我们有

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{Y(B_{r_\varepsilon})} = 0,\ as\ n \to \infty. \tag{2.10}$$

于是,存在$N_1 > 0$, 使得

$$\|u_n - u\|_{Y(B_{r_\varepsilon})} < \varepsilon.$$

上述的估计意味着

$$\|u_n - u\|_Y \le \|u_n\|_{Y(B_{r_\varepsilon})} + \|u\|_{Y(B_{r_\varepsilon})} + \|u_n - u\|_{Y(B_{r_\varepsilon})} \le 3\varepsilon,$$

于是嵌入$X \hookrightarrow Y$ 是紧嵌入. 这样我们完成引理2.1的证明.

引理2.2. 对于$p < q < p^*$, 设(A_1)和(A_3) 满足, 那么嵌入$X \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N, K)$ 是连续和紧的.

证明: 由Hölder 不等式和(1.3),我们有

$$\begin{aligned}\|u\|_{q,K}^q &= \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|u|^q dx = \int_{\mathbb{R}^N} (V(x)|u|^p)^{\frac{1}{\lambda_1}} (V(x)^{1-\lambda_2} Q(x)^{\lambda_2} |u|^{p^*})^{\frac{1}{\lambda_2}} \\ &\le (\sup_{x\in\mathbb{R}^N} ((V(x))^{1-\lambda_2} (K(x))^{\lambda_2})^{\frac{1}{\lambda_2}} (\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^p dx)^{\frac{1}{\lambda_1}} (\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx)^{\frac{1}{\lambda_2}} \\ &\le (S^{-1})^{\frac{q}{\lambda_1}} (\sup_{x\in\mathbb{R}^N} ((V(x))^{1-\lambda_2} (K(x))^{\lambda_2})^{\frac{1}{\lambda_2}} \|u\|_X^q = C_1 \|u\|_X^q,\end{aligned} \tag{2.11}$$

其中$\lambda_1 = \frac{p^*-p}{p^*-q}$, $\lambda_2 = \frac{p^*-p}{q-p}$, $\mu_1 = \frac{p(p^*-q)}{p^*-p}$ S 在1.3 中给出. 那么(2.11) 意味着嵌入$X \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N, K)$ 是连续的. 接下来的证明类似于2.1, 于是嵌入$X \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N, K)$ 是紧的，于是我们完成了引理2.2的证明. □

3. 定理1.1的证明

首先给出$(PS)_c$ 条件和$(PS)_c^*$条件的定义,该条件在定理证明中起着重要的作用.

定义3.1. 设$J \in C^1(X, \mathbb{R}^1)$ and $c \in \mathbb{R}^1$. 称泛函J 满足$(PS)_c$条件如果当序列$\{u_n\} \subset X$ 满足

$$J(u_n) \to c, \quad J'(u_n) \to 0\ \ in\ X^*\ \ as\ n \to \infty. \tag{3.1}$$

其在X包含一个收敛的子序列. 进一步地,如果对于所有的$c \in \mathbb{R}^1$, J 均满足$(PS)_c$条件,我们说J 满足Palais-Smale 条件,（简称(PS) 条件）.

定义3.2. 设$J \in C^1(X, \mathbb{R}^1)$ 以及$c \in \mathbb{R}^1$. 泛函J 满足$(PS)_c^*$ 条件(相应于(Y_n))当前仅当$\{u_{n_j}\} \subset Y_{n_j}$ 使得

$$J(u_n) \to c, \quad J|'_{Y_{n_j}}(u_{n_j}) \to 0\ \ in\ X^*\ \ as\ n_j \to \infty. \tag{3.2}$$

在X包含一收敛子列.

接下来我们有以下引理.

引理3.1. 泛函$J(u)$ 在X中满足$(PS)_c$条件.

证明: 令$\{u_n\}$ 是泛函$J(u)$ 在X上的一个$(PS)_c$ 序列,那么

$$J(u_n) \to c, \quad J'(u_n) \to 0 \ \ in\ X^* \ \ as\ n \to \infty. \tag{3.3}$$

我们首先证$\{u_n\}$ 在X上有界. 事实上,由于$q > p(\tau+1)$, 那么当n充分大时有

$$\begin{aligned} c+1+\|u_n\|_X &\geq J(u_n) - \frac{\mu}{q}J'(u_n)u_n \\ &= a(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})\|u\|_X^p + c(\frac{1}{p(\tau+1)}-\frac{1}{q})\|u\|_X^{p(\tau+1)} - \lambda(\frac{1}{m}-\frac{1}{q})\|u\|_{m,H}^m \\ &\geq a(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})\|u\|_X^p - \lambda(\frac{1}{m}-\frac{1}{q})b_1\|u_n\|_X^m, \end{aligned} \tag{3.4}$$

其中b_1 是一正常数. 由于$p > 1$, 那么$\{u_n\}$ 在X上有界.由于X 是自反可分的Banach 空间, 那么由引理2.1和引理2.2 得存在序列$\{u_n\}$得子序列(仍定义$\{u_n\}$)和u 使得

$$u_n \rightharpoonup u, \ \ in\ X; \quad u_n \to u, \ \ in\ L^m(\mathbb{R}^N, H) \cap L^q(\mathbb{R}^N, K); \quad u_n \to u\ \ a.e\ in\ \mathbb{R}^N. \tag{3.5}$$

借助于(1.15),可以看出

$$(J'(u_n) - J'(u))(u_n - u) = A_n + B_n - C_n - D_n, \tag{3.6}$$

其中

$$\begin{aligned} A_n &= (a + c\|u\|_X^{p\tau}) \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2})\nabla(u_n - u)dx \\ &\quad + V(x)(|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u)(u_n - u)dx; \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$B_n = c(\|u_n\|_X^{p\tau} - \|u\|_X^{p\tau}) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla(u_n - u) + V(x)|u|^{p-2}u(u_n - u)dx; \tag{3.8}$$

$$C_n = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} H(x)(|u_n|^{m-2}u_n - |u|^{m-2}u)(u_n - u)dx; \tag{3.9}$$

$$D_n = \mu \int_{\mathbb{R}^N} K(x)(|u_n|^{q-2}u_n - |u|^{q-2}u)(u_n - u)dx. \tag{3.10}$$

显然$(J'(u_n) - J'(u))(u_n - u) \to 0$, $n \to \infty$.另一方面，由Hölder 不等式和$u_n \to u$ 于$L^m(\mathbb{R}^N, H)$, 我们有

$$\begin{aligned} |C_n| &= |\lambda| \int_{\mathbb{R}^N} H(x)(|u_n|^{m-2}u_n - |u|^{m-2}u)(u_n - u)dx \\ &\leq |\lambda| \int_{\mathbb{R}^N} H(|u_n|^{m-1} + |u|^{m-1})|u_n - u|dx \\ &\leq |\lambda|(\|u_n\|_{m,H}^{m-1} + \|u\|_{m,H}^{m-1})\|u_n - u\|_{m,H} \to 0\ \ as\ \ n \to \infty. \end{aligned} \tag{3.11}$$

类似的我们有$|D_n| \to 0$, $n \to \infty$. 现在考虑$g : X \to \mathbb{R}$ 定义为

$$g(\omega) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \omega + V(x)|u|^{p-2}u\omega dx. \tag{3.12}$$

由于$|g(\omega)| \leq 2\|u\|_X^{p-1}\|\omega\|_X$, 推得$g$在$X$上连续. 利用$u_n \rightharpoonup u$ 和序列$\{u_n\}$ 在X上的有界性, 结合(3.6)得

$$|B_n| \leq (\|u_n\|_X^{p\tau} + \|u\|_X^{p\tau})|g(u_n - u)| \to 0, \quad as\ n \to \infty, \tag{3.13}$$

根据上述得估计我们有$A_n \to 0$ as $n \to \infty$.于是利用$\mathbb{R}^N$ 上的标准不等式，如下给出

$$\begin{aligned} &\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y\rangle \geq C_p|x-y|^p, \quad p \geq 2, \\ &\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y\rangle \geq \frac{C_p|x-y|^p}{(|x|+|y|)^{2-p}}, \quad 2 > p > 1, \end{aligned} \tag{3.14}$$

其中$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是$\mathbb{R}^N$径向内积. 我们有$\|u_n - u\|_X \to 0$ as $n \to \infty$，证毕. □

为了定理的1.1的证明, 我们还需要如下的定理.

引理3.2. 定义

$$\beta_k = \sup_{u \in Z_k, u \neq 0} \tfrac{\|u\|_{q,K}}{\|u\|_X} = \sup_{u \in Z_k, \|u\|_X = 1} \|u\|_{q,K} \tag{3.15}$$

$$\sigma_k = \sup_{u \in Z_k, u \neq 0} \tfrac{\|u\|_{m,H}}{\|u\|_X} = \sup_{u \in Z_k, \|u\|_X = 1} \|u\|_{m,H} \tag{3.16}$$

那么

$$\|u\|_{q,K} \leq \beta_k \|u\|_X, \quad \|u\|_{m,H} \leq \sigma_k \|u\|_X, \quad \forall u \in Z_k, \tag{3.17}$$

以及$\beta_k \to 0,\ \sigma_k \to 0\ as\ k \to \infty.$

证明: 显然$0 < \beta_{k+1} < \beta_k$, 于是$\beta_{k+1} \to \beta \geq 0$, $k \to \infty$. 接着, 我们将看到$\beta = 0$. 由β_k的定义, 存在$u_k \in Z_k$ 且$\|u_k\|_X = 1$ 使得对所有的$k \geq 1$,$\frac{-1}{k} \leq \beta_k - \|u_k\|_{q,K} \leq \frac{1}{k}$. 于是存在$\{u_k\}$的子序列(仍定义为$u_k$) 使得$u \rightharpoonup u$ 以及对所有的$j \geq 1$,有$\langle u, e_j^* \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle u_k, e_j^* \rangle = 0$ 其中$e_j^* \in Z^*$. 这意味着$u = 0$ 以及$u_k \rightharpoonup 0$.因为嵌入$X \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N, K)$ 是紧的, 那么$u_k \to 0$ in $L^q(\mathbb{R}^N, K)$ 和$\beta = 0$. 类似的, 我们有$\sigma_k \to 0$ as $n \to \infty$. □

设X 是自反可分的Banach空间.于是存在$e_j \in X$ and $e_j^* \in X (j = 1, 2, ...)$ 使得

(i) $\langle e_i, e_j^* \rangle = \delta_{ij}$, where $\delta_{ij} = 1$ for $i = j$ and $\delta_{ij} = 0$ for $i \neq j$,

(ii) $X = \overline{span\{e_1, e_2, ..., \}}$, $X^* = \overline{span\{e_1^*, e_2^*, ..., \}}$.

为方便起见，我们记

$$X_j = span\{e_j\},\ \ Y_k = \bigoplus_{j=1}^{k} X_j,\quad Z_k = \overline{\bigoplus_{j=k}^{\infty} X_j},\ j,k=1,2,\cdots. \tag{3.18}$$

为了证明问题1.1无穷多解的存在性, 我们将引用喷泉引理和对偶喷泉引理 [11].

引理3.3. *(喷泉引理 [11]) 设$J \in C^1(X,\mathbb{R}^1)$是一偶泛函.如果对于所有的$k \in \mathbb{N}$, 存在$\rho_k > \gamma_k > 0$使得*

(B_1) $a_k = \inf\limits_{u\in Z_k,\|u\|_X=\gamma_k} J(u) \to \infty\ as\ k \to \infty,$

(B_2) $b_k = \sup\limits_{u\in Y_k,\|u\|_X=\rho_k} J(u) \le 0,$

(B_3) 对于每一个$c > 0$,泛函J 满足$(PS)_c$条件.

那么泛函J 具有有一列临界点趋于无穷大的的解序列.

引理3.4. *(对偶喷泉引理 [11]) 设$J \in C^1(X,R^1)$是一偶泛函.如果$\exists k_0 > 0$, 对于所有的$k \ge k_0$, 存在$\rho_k > \gamma_k > 0$ 使得*

(C_1) $a_k = \inf_{u\in Z_k,\|u\|_X=\rho_k} J(u) \ge 0,$

(C_2) $b_k = \sup_{u\in Y_k,\|u\|_X=\gamma_k} J(u) < 0,$

(C_3) $a_k = \inf_{u\in Z_k,\|u\|_X\ge\rho_k} J(u) \to 0,\ as\ k \to \infty,$

(C_4) 对于所有的$c \in [d_{k_0}, 0)$,J满足$(PS)_c^*$ 条件.

那么泛函J 具有有一列临界点趋于零的的解序列.

现在我们给出1.1的证明.

定理1.1的证明 对于结论(i), 我们需验证引理3.3的条件$(B_1)-(B_3)$. 条件(B_3)可以从引理3.1得到验证.设Y_k 和Z_k 如(3.18) 中的定义，以及$u \in Y_k$, 于是我们有

$$J(u) = \frac{a}{p}\|u\|_X^p + \frac{c}{p(\tau+1)}\|u\|_X^{p(\tau+1)} - \frac{\lambda}{m}\|u\|_{m,H}^m - \frac{\mu}{q}\|u\|_{q,K}^q. \tag{3.19}$$

由于有限维空间Y_k的上的范数等价, 所以假设$1 < m < p < p(\tau+1) < q < p^*$ 意味着对于充分大的$\rho_k > 0$ 和$\|u\|_X = \rho_k$,条件(B_2) 满足

我们现在验证(B_1),根据(3.15) 和(3.17) 得

$$J(u) \ge \frac{c}{p(\tau+1)}\|u\|_X^{p(\tau+1)} - \frac{\mu}{q}\beta_k^q\|u\|_X^q - S_1^{-\frac{m}{p}}\frac{|\lambda|}{m}\|u\|_X^m. \tag{3.20}$$

其中S_1 是正的常值，可定义为

$$S_1=\inf_{u\in X\setminus\{0\}}\frac{\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^p+V(x)|u|^p)dx}{(\int_{\mathbb{R}^N}H(x)|u|^m dx)^{\frac{p}{m}}}\tag{3.21}$$

接下来我们令$\|u\|_X=t$ 使得

$$\frac{c}{4p(\tau+1)}t^{p(\tau+1)}\geq\frac{|\lambda|}{m}S_1^{-\frac{m}{p}}t^m,\quad\frac{c}{4p(\tau+1)}t^{p(\tau+1)}\geq\frac{1}{q}\beta_k^q t^q.\tag{3.22}$$

故

$$t\geq\big(\frac{4|\lambda|p(\tau+1)}{mc}S_1^{\frac{-m}{p}}\big)^{\frac{1}{p(\tau+1)-m}},\tag{3.23}$$

以及

$$t\leq\big(\frac{4p(\tau+1)}{qc}\big)^{\frac{1}{p(\tau+1)-q}}\beta_k^{\frac{q}{p(\tau+1)-q}}\equiv\gamma_k\to\infty,\quad as\ k\to\infty.\tag{3.24}$$

取$\gamma_k=\big(\frac{4p(\tau+1)}{qc}\big)^{\frac{1}{p(\tau+1)}-q}\beta_k^{\frac{q}{p(\tau+1)-q}}$,我们得到如果$u\in Z_k$ 和$\|u\|_X=\gamma_k$, 于是由(3.24) 得

$$J(u)\geq\frac{c}{2p(\tau+1)}\big(\frac{4p(\tau+1)}{qc}\big)^{\frac{p(\tau+1)}{p(\tau+1)-q}}\beta_k^{\frac{qp(\tau+1)}{p(\tau+1)-q}}\to\infty,\quad as\ k\to\infty.\tag{3.25}$$

这就验证了(B_1). 于是由引理3.3, 我们得对于所有的$\lambda\in\mathbb{R}$问题(1.1) 存在无穷多个解$u_k\in X$ 使得$J(u_k)\to\infty$, $k\to\infty$.

接下来, 我们给出定理1.1第二个结论的证明, 由引理3.4, 所以我们需要验证$(C1)-(C_4)$.我们假定$\lambda>0$, 于是由(3.16) 和(3.17) 得

$$J(u)\geq\frac{a}{p}\|u\|_X^p-\frac{\lambda}{m}\sigma_k^m\|u\|_X^m-\frac{|\mu|}{q}S_2^{-\frac{q}{p}}\|u\|_X^q.\tag{3.26}$$

其中S_2 是正得常数，定义为

$$S_2=\inf_{u\in X\setminus\{0\}}\frac{\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p+V(x)|u|^p dx}{(\int_{\mathbb{R}^N}K(x)|u|^q dx)^{\frac{p}{q}}}\tag{3.27}$$

因为$q>p$,可选取适当小得$R>0$ 使得

$$\frac{a}{2p}\|u\|_X^p-\frac{|\mu|}{q}S_2^{-\frac{q}{p}}\|u\|_X^q\geq 0.\tag{3.28}$$

所以对于任意的$u\in X$ 以及$\|u\|_X\leq R$, 我们有

$$J(u)\geq\frac{a}{2p}\|u\|_X^p-\frac{\lambda}{m}\sigma_k^m\|u\|_X^m,\ for\ any\ u\in Z_k,\ \|u\|_X\leq R.\tag{3.29}$$

因为$\sigma_k \to 0,\ k \to \infty$,所以取$\rho_k = (\frac{2\lambda\sigma_k^m}{a})^{\frac{1}{p-m}}$.由引理3.2 得$\rho_k \to 0,\ k \to \infty$. 于是存在$k_0$ 使得当$k \geq k_0$ 时有$\rho \leq R$. 于是对于$k \geq k_0$ 和$\|u\|_X = \rho_k$, 我们有$J(u) \geq 0$, 这就验证了引理3.4中的条件(C_1) .

由于在有限维空间Y_k上的所有范数等价,那么根据$m < p < p(\tau+1) < q$，对于每一个充分大的$\gamma_k > 0$,条件(C_2) 满足. 由(3.29)以及$\sigma_k \to 0,\ k \to \infty$得,存在$k \geq k_0 \in N$,使得对于$k \geq k_0,\ u \in Z_k$, $\|u\|_X \leq \rho_k$有,$J(u) \geq \frac{\lambda}{m}\sigma_k^m\|u\|_X^m$, 于是$(C_3)$ 亦满足.

最后, 我们证明$(PS)_c^*$ 条件. 考虑一序列$\{u_{n_j}\} \subset X$ 使得$n_j \to \infty,\ u_{n_j} \in Y_{n_j},\ J(u_{n_j}) \to c$, $J|'_{Y_{n_j}}(u_{n_j}) \to 0 \in X^*$. 和前一个结论证明一样, 我们能够证得$\{u_{n_j}\}$ 在X上有界, 不失一般性，我们可假定$u_{n_j} \rightharpoonup u \in X$, 类似于引理3.1的证明思路, 得$u_{n_j} \to u \in X$ 和$J'(u) = 0$. 于是由(3.4)得问题(1.1) 存在无穷多个解$v_k \in X$ 使得$J(v_k) \to 0$, $k \to \infty$.证毕.

基金项目

江苏省高校自科面上基金(20KJD110001)。

参考文献

[1] Kirchhoff, G. (1883) Mechanik, Teubner, Leipzig.

[2] Alves, C.O., Corrêa, F.J.S.A. and Ma, T.F. (2005) Positive Solutions for a Quasilinear Elliptic Equation of Kirchhoff Type. *Computers & Mathematics with Applications*, **49**, 85-93. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2005.01.008

[3] Júlio, F., Corrêa, S.A. and Figueiredo, G.M. (2006) On an Elliptic Equation of p-Kirchhoff Type via Variational Methods. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **74**, 263-277. https://doi.org/10.1017/s000497270003570x

[4] Corrêa, F.J.S.A. and Figueiredo, G.M. (2009) On a p-Kirchhoff Equation via Krasnoselskii's Genus. *Applied Mathematics Letters*, **22**, 819-822. https://doi.org/10.1016/j.aml.2008.06.042

[5] Chen, C., Kuo, Y. and Wu, T. (2011) The Nehari Manifold for a Kirchhoff Type Problem Involving Sign-Changing Weight Functions. *Journal of Differential Equations*, **250**, 1876-1908. https://doi.org/10.1016/j.jde.2010.11.017

[6] Li, Y., Li, F. and Shi, J. (2012) Existence of a Positive Solution to Kirchhoff Type Problems without Compactness Conditions. *Journal of Differential Equations*, **253**, 2285-2294. https://doi.org/10.1016/j.jde.2012.05.017

[7] Liu, D. (2010) On p-Kirchhoff Equation via Fountain Theorem and Dual Fountain Theorem. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications*, **72**, 302-308. https://doi.org/10.1016/j.na.2009.06.052

[8] Liu, D. and Zhao, P. (2012) Multiple Nontrivial Solutions to p-Kirchhoff Equation. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **75**, 5032-5038. https://doi.org/10.1016/j.na.2012.04.018

[9] Wu, X. (2011) Existence of Nontrivial Solutions and High Energy Solutions for Schrödinger-Kirchhoff-Type Equations in $\mathbb{R}^N$. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **12**, 1278-1287. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2010.09.023

[10] Wu, T. (2006) On Semilinear Elliptic Equations Involving Concave-Convex Nonlinearities and Sign-Changing Weight Function. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **318**, 253-270. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.05.057

[11] Willem, M. (1996) Minimax Theorem. Birkhäuser Boston,.

[12] Zhao, L., Li, A. and Su, J. (2012) Existence and Multiplicity Results for Quasilinear Elliptic Exterior Problems with Nonlinear Boundary Conditions. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications*, **75**, 2520-2533. https://doi.org/10.1016/j.na.2011.10.046

[13] Lin, X. and Tang, X.H. (2013) Existence of Infinitely Many Solutions p-Laplacian Equations in $\mathbb{R}^N$. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **92**, 72-81. https://doi.org/10.1016/j.na.2013.06.011

[14] Zhao, J. and Zhao, P.H. (2007) Infinitely Many Weak Solutions for a p-Laplacian Equation with Nonlinear Boundary Conditions. *Electronic Journal of Differential Equations*, **2007**, 1-14.

[15] Ambrosetti, A. and Rabinowitz, P.H. (1973) Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications. *Journal of Functional Analysis*, **14**, 349-381. https://doi.org/10.1016/0022-1236(73)90051-7

[16] Chen, C., Chen, L. and Xiu, Z. (2013) Existence of Nontrivial Solutions for Singular Quasilinear Elliptic Equations $\mathbb{R}^N$. *Computers Mathematics with Applications*, **65**, 1909-1919. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2013.04.017

[17] Lyberopoulos, A.N. (2011) Quasilinear Scalar Field Equations with Competing Potentials. *Journal of Differential Equations*, **251**, 3625-3657. https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.08.011