

三个恒等式的坐标表示及应用

李丽丽, 张群力*

菏泽学院数学与统计学院, 山东 菏泽

收稿日期: 2024年5月26日; 录用日期: 2024年6月21日; 发布日期: 2024年6月26日

摘要

基于有向距离、行列式等理论, 推导直线上、平面内、空间内三个恒等式的坐标表达式, 从而使中学数学中几何内的求解和证明问题变成简捷、系统的代数问题, 实例的应用展示所得结论的可靠性和实用价值。

关键词

有向距离, 行列式, 坐标

Coordinate Representation and Application of Three Identities

Lili Li, Qunli Zhang*

School of Mathematics and Statistics, Heze University, Heze Shandong

Received: May 26th, 2024; accepted: Jun. 21st, 2024; published: Jun. 26th, 2024

Abstract

Based on the theory of directed distance and determinant, the coordinate expressions of three identities on a line, in a plane and in space are derived, thus, the problem of solving and proving in geometry in middle school mathematics becomes a simple and systematic algebra problem. The application of examples shows the reliability and practical value of the proposed conclusions.

Keywords

Directed Distance, Determinant, Coordinate

*通讯作者 Email: qunli-zhang@126.com



1. 简介

对抽象、复杂的空间几何问题的简化计算的研究已有了多种方法。[1]对空间几何问题转化为线性代数问题再求解进行了分析,同时举例进行了阐述,但是并没有对此转化所需的基础理论知识进行说明。[2]一文中,举例使用向量恒等式对抽象几何问题进行解决,优化解题过程。本文提出使用向量、行列式性质解决几何问题,是一种全新的方法。

文献[3] [4]中提到,对于直线 AB 上的点 P ,用向量表示 $OP = tOA + (1-t)OB$ 或 $OP = \frac{xOA + yOB}{x+y}$

(在线性代数中,称 OP 为 OA 和 OB 的线性组合),两者实质一样, OA 和 OB 的系数和为 1,但是其中的 t, x, y 具体等于多少,没有明确给出,能否将这种直线上的度量关系拓展到平面、空间中去,均没有相应结果。

相当多的中学几何问题均可以用向量去证明、计算,使问题简捷化。向量法解决问题的关键是点的数值化,就是用点的坐标去量化、推理、演算等,从而将几何问题变成代数问题。

本文在文献[3] [4]内容的基础上,利用有向距离、行列式的性质得到直线上、平面内、空间内点坐标恒等式的坐标表示。

2. 基础知识及主要结论

设 O 为原点(记为 $O=0$), 向量 $OA, AB = OB - OA$, 分别简记为 $A, B - A$; 向量的内积 $OA \cdot OB$ 简记为 $A \cdot B$ 。

定义 设点 A, B 在平面内, 点 A 指向点 B 的距离称为 A 到 B 的有向距离, 记为 $\delta(A, B)$ 。

注: 根据有向距离的定义知, $\delta(A, B) = -\delta(B, A)$ 。

引理 1 [5] [6]: 在 $\triangle ABC$ 中, 设 $A(x_0, y_0), B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$, 令 $B - A = (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = (a, b)$, $C - A = (x_2 - x_0, y_2 - y_0) = (c, d)$, 则有 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |ad - bc|$, 其中外层的 $|\cdot|$ 表示绝对值, 内层的 $|\cdot|$ 表示行列式。

引理 2 [7] [8]: 行列式的性质:

- 1) 行列式 D 与其转置行列式 D^T 相等。
- 2) 交换行列式两行(列), 行列式改变符号。
- 3) 把一个行列式的某一行(列)的所有元素同乘以数 k , 则等于用数 k 乘以这个行列式。
- 4) 若行列式的某一行(列)的所有元素都是两项之和, 则该行列式可以表示成如下两个行列式的和,

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

5) 把一个行列式的某一行(列)的所有元素同乘以数 k 后, 加到另一行(列)的对应元素上, 所得行列式与原行列式相等。

6) 行列式中两行(列)对应元素成比例, 则该行列式的值为零。

7) 行列式按一行(列)展开定理: n 阶行列式 D_n 等于它的一行(列)元素与其相应的代数余子式乘积之和。

定理 1 空间线段 AB 所在的直线上任意一点 P , 设 $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $P(x_P, y_P, z_P)$, 则有 $P \cdot \delta(A, B) = A \cdot \delta(P, B) + B \cdot \delta(A, P)$ 。

证明: 1) 当线段 AB 平行于 x 轴时, $\delta(A, B) = x_B - x_A$, $\delta(A, P) = x_P - x_A$, $\delta(P, B) = x_B - x_P$, 如图 1 所示。

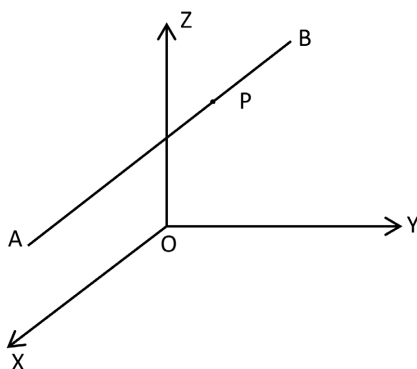


Figure 1. Line segment AB is parallel to the x -axis

图 1. 线段 AB 平行于 x 轴

$y_A = y_B = y_P$, $z_A = z_B = z_P$, 满足 $x_P \cdot (x_B - x_A) = x_A \cdot (x_B - x_P) + x_B \cdot (x_P - x_A)$,
 $y_P \cdot (x_B - x_A) = y_A \cdot (x_B - x_P) + y_B \cdot (x_P - x_A)$, $z_P \cdot (x_B - x_A) = z_A \cdot (x_B - x_P) + z_B \cdot (x_P - x_A)$,
 所以有 $P \cdot \delta(A, B) = A \cdot \delta(P, B) + B \cdot \delta(A, P)$ 成立。

同理, 当线段 AB 平行于 y, z 轴时, 也有 $P \cdot \delta(A, B) = A \cdot \delta(P, B) + B \cdot \delta(A, P)$ 成立。

2) 当线段 AB 不平行于坐标轴时, 如图 2 所示。

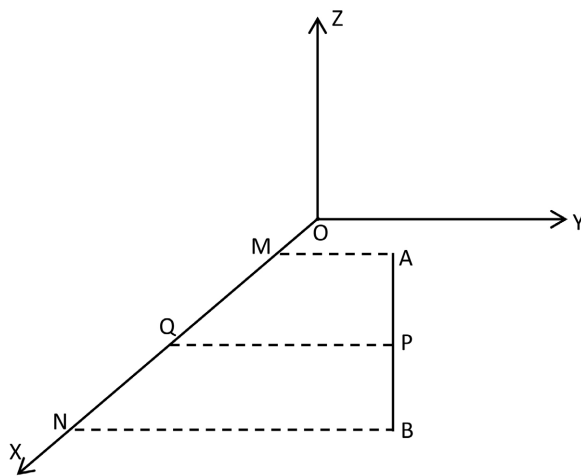


Figure 2. Line segment AB is not parallel to the axis

图 2. 线段 AB 不平行于坐标轴

若线段 AB 在 xOy 平面内, 过点 A, B, P 向 x 轴作垂线, 垂足分别为 M, N, Q , 则由平行线分线段成比例定理知, $\frac{\delta(A, B)}{\delta(M, N)} = \frac{\delta(P, B)}{\delta(Q, N)} = \frac{\delta(A, P)}{\delta(M, Q)}$, $x_A = x_M$, $x_B = x_N$, $x_P = x_Q$ 。

由上述证明, 得: $x_Q \cdot \delta(M, N) = x_M \cdot \delta(Q, N) + x_N \cdot \delta(M, Q)$ 。

所以 $x_P \cdot \delta(A, B) = x_A \cdot \delta(P, B) + x_B \cdot \delta(A, P)$ 。

同理, 过点 A, B, P 向 y 轴作垂线, 得到 $y_P \cdot \delta(A, B) = y_A \cdot \delta(P, B) + y_B \cdot \delta(A, P)$ 。

$z_P \cdot \delta(A, B) = z_A \cdot \delta(P, B) + z_B \cdot \delta(A, P)$ 。

所以有 $P \cdot \delta(A, B) = A \cdot \delta(P, B) + B \cdot \delta(A, P)$ 成立。

3) 当线段 AB 为空间直线时, 将线段 AB 分别向 xOy, yOz, zOx 面内作投影, 仿照上述推理, 可得到类似结论。如图 3 所示。

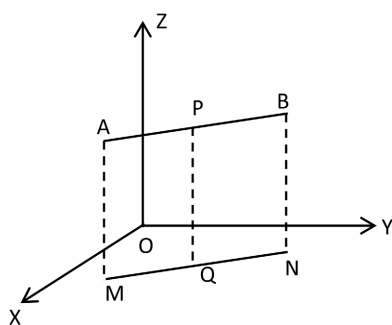


Figure 3. Line segment AB is a spatial straight line

图 3. 线段 AB 为空间直线

说明: 1) 当线段 AB 为平面线段时, $P \cdot \delta(A, B) = A \cdot \delta(P, B) + B \cdot \delta(A, P)$ 两端同除以 $\delta(A, B)$ 时, 所得公式为高中课本《解析几何》中的定比分点坐标公式。

2) 当 $\delta(A, B)$, $\delta(P, B)$, $\delta(A, P)$ 分别为点 A 和 B 、点 P 和 B 、点 A 和 P 之间的距离时, 结论同样正确。

3) 利用本公式可以推导出文献[4]中的性质 2~性质 5。

定理 2 在 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 三点的坐标分别为 $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$, A, B, C 确定的平面上任意一点 P 的坐标为 $P(x_P, y_P)$, 则有 $P \cdot \hbar = A \cdot \hbar_1 + B \cdot \hbar_2 + C \cdot \hbar_3$, 其中 $\hbar = \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix}$,

$\hbar_1 = \begin{vmatrix} x_B - x_P & y_B - y_P \\ x_C - x_P & y_C - y_P \end{vmatrix}$, $\hbar_2 = \begin{vmatrix} x_C - x_P & y_C - y_P \\ x_A - x_P & y_A - y_P \end{vmatrix}$, $\hbar_3 = \begin{vmatrix} x_A - x_P & y_A - y_P \\ x_B - x_P & y_B - y_P \end{vmatrix}$, $\hbar, \hbar_1, \hbar_2, \hbar_3$ 中点的坐标排列依照逆时针顺序, $|\cdot|$ 表示行列式。如图 4 所示。

证明: 由引理 2 知,

$$\begin{aligned} & x_A \cdot \hbar_1 + x_B \cdot \hbar_2 + x_C \cdot \hbar_3 \\ &= \begin{vmatrix} x_A & x_A - x_P & y_A - y_P \\ x_B & x_B - x_P & y_B - y_P \\ x_C & x_C - x_P & y_C - y_P \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_A & x_A - x_P & y_A - y_P \\ x_B - x_A & x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_A & -x_P & y_A - y_P \\ x_B - x_A & 0 & y_B - y_A \\ x_C - x_A & 0 & y_C - y_A \end{vmatrix} = -x_P \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} = x_P \cdot \hbar, \end{aligned}$$

同理有 $y_A \cdot \vec{h}_1 + y_B \cdot \vec{h}_2 + y_C \cdot \vec{h}_3 = y_P \cdot \vec{h}$ 。
 所以有 $P \cdot \vec{h} = A \cdot \vec{h}_1 + B \cdot \vec{h}_2 + C \cdot \vec{h}_3$ 成立。

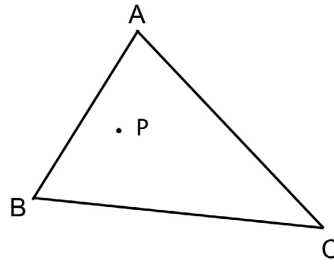


Figure 4. Three points of A, B, C in the plane
 图 4. 平面中的 A, B, C 三点

说明: 1) $\vec{h}, \vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3$ 中点的坐标排列也可以按照顺时针顺序;

2) 由行列式性质, $\vec{h} = \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix}$ 换成 $\vec{h} = \begin{vmatrix} x_C - x_B & y_C - y_B \\ x_A - x_B & y_A - y_B \end{vmatrix}$, $\vec{h} = \begin{vmatrix} x_A - x_C & y_A - y_C \\ x_B - x_C & y_B - y_C \end{vmatrix}$ 均可以。

3) 如果本定理采取如下证法:

$$\begin{aligned} x_A \cdot \vec{h}_1 &= x_A \cdot \begin{vmatrix} x_B - x_P & y_B - y_P \\ x_C - x_P & y_C - y_P \end{vmatrix} = x_A \cdot \left(\begin{vmatrix} x_B & y_B - y_P \\ x_C & y_C - y_P \end{vmatrix} - x_P \begin{vmatrix} 1 & y_B - y_P \\ 1 & y_C - y_P \end{vmatrix} \right) \\ &= x_A \cdot \left(\begin{vmatrix} x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{vmatrix} - y_P \begin{vmatrix} x_B & 1 \\ x_C & 1 \end{vmatrix} - x_P \begin{vmatrix} 1 & y_B \\ 1 & y_C \end{vmatrix} - x_P y_P \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= x_A \cdot \left(\begin{vmatrix} x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{vmatrix} - y_P \begin{vmatrix} x_B & 1 \\ x_C & 1 \end{vmatrix} - x_P \begin{vmatrix} 1 & y_B \\ 1 & y_C \end{vmatrix} \right), \\ x_B \cdot \vec{h}_2 &= x_B \cdot \left(\begin{vmatrix} x_C & y_C \\ x_A & y_A \end{vmatrix} - y_P \begin{vmatrix} x_C & 1 \\ x_A & 1 \end{vmatrix} - x_P \begin{vmatrix} 1 & y_C \\ 1 & y_A \end{vmatrix} \right), \\ x_C \cdot \vec{h}_3 &= x_C \cdot \left(\begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix} - y_P \begin{vmatrix} x_A & 1 \\ x_B & 1 \end{vmatrix} - x_P \begin{vmatrix} 1 & y_A \\ 1 & y_B \end{vmatrix} \right), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} &x_A \cdot \vec{h}_1 + x_B \cdot \vec{h}_2 + x_C \cdot \vec{h}_3 \\ &= x_A \begin{vmatrix} x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{vmatrix} + x_B \begin{vmatrix} x_C & y_C \\ x_A & y_A \end{vmatrix} + x_C \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix} - y_P \left(x_A \begin{vmatrix} x_B & 1 \\ x_C & 1 \end{vmatrix} + x_B \begin{vmatrix} x_C & 1 \\ x_A & 1 \end{vmatrix} + x_C \begin{vmatrix} x_A & 1 \\ x_B & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &\quad - x_P \left(x_A \begin{vmatrix} 1 & y_B \\ 1 & y_C \end{vmatrix} + x_B \begin{vmatrix} 1 & y_C \\ 1 & y_A \end{vmatrix} + x_C \begin{vmatrix} 1 & y_A \\ 1 & y_B \end{vmatrix} \right) \\ &= \begin{vmatrix} x_A & x_A & y_A \\ x_B & x_B & y_B \\ x_C & x_C & y_C \end{vmatrix} - y_P \begin{vmatrix} x_A & x_A & 1 \\ x_B & x_B & 1 \\ x_C & x_C & 1 \end{vmatrix} - x_P \begin{vmatrix} x_A & 1 & y_A \\ x_B & 1 & y_B \\ x_C & 1 & y_C \end{vmatrix} \\ &= -x_P \begin{vmatrix} x_A & 1 & y_A \\ x_B & 1 & y_B \\ x_C & 1 & y_C \end{vmatrix} = -x_P \begin{vmatrix} x_A & 1 & y_A \\ x_B - x_A & 0 & y_B - y_A \\ x_C - x_A & 0 & y_C - y_A \end{vmatrix} = x_P \cdot \vec{h}. \end{aligned}$$

同理有 $y_A \cdot \vec{h}_1 + y_B \cdot \vec{h}_2 + y_C \cdot \vec{h}_3 = y_P \cdot \vec{h}$ 。

从上述证明过程得知:

$$x_A \cdot \vec{h}_1 + x_B \cdot \vec{h}_2 + x_C \cdot \vec{h}_3 = x_P \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{vmatrix},$$

$$y_A \cdot \vec{h}_1 + y_B \cdot \vec{h}_2 + y_C \cdot \vec{h}_3 = y_P \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{vmatrix}.$$

4) 由文献[9]知: 设三角形 $\triangle ABC$ 的三个顶点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 和 $C(x_3, y_3)$, 那么三角形的面积为

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

参考上述说明 2 可以得到: 当 P 点在 $\triangle ABC$ 内时, 有

$$P \cdot S_{\triangle ABC} = A \cdot S_{\triangle PBC} + B \cdot S_{\triangle PAC} + C \cdot S_{\triangle PAB}. \quad (1)$$

5) 当 P 点在 $\triangle ABC$ 的边上时, 上述结论也成了, 并且(1)式成立的充分必要条件为 P 点在 $\triangle ABC$ 的内部或者边上。

定理 3 在空间直角坐标系中, A, B, C, P 四点不共面, 坐标分别为 $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$, $P(x_P, y_P, z_P)$, 空间任意一点 Q 的坐标为 $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$, 则有

$$Q \cdot \vec{h} = A \cdot \vec{h}_1 + B \cdot \vec{h}_2 + C \cdot \vec{h}_3 + P \cdot \vec{h}_4,$$

$$\text{其中 } \vec{h} = \begin{vmatrix} x_A - x_P & y_A - y_P & z_A - z_P \\ x_B - x_P & y_B - y_P & z_B - z_P \\ x_C - x_P & y_C - y_P & z_C - z_P \end{vmatrix}, \quad \vec{h}_1 = \begin{vmatrix} x_B - x_Q & y_B - y_Q & z_B - z_Q \\ x_P - x_Q & y_P - y_Q & z_P - z_Q \\ x_C - x_Q & y_C - y_Q & z_C - z_Q \end{vmatrix}, \quad \vec{h}_2 = \begin{vmatrix} x_A - x_Q & y_A - y_Q & z_A - z_Q \\ x_C - x_Q & y_C - y_Q & z_C - z_Q \\ x_P - x_Q & y_P - y_Q & z_P - z_Q \end{vmatrix},$$

$$\vec{h}_3 = \begin{vmatrix} x_A - x_Q & y_A - y_Q & z_A - z_Q \\ x_P - x_Q & y_P - y_Q & z_P - z_Q \\ x_B - x_Q & y_B - y_Q & z_B - z_Q \end{vmatrix}, \quad \vec{h}_4 = \begin{vmatrix} x_A - x_Q & y_A - y_Q & z_A - z_Q \\ x_B - x_Q & y_B - y_Q & z_B - z_Q \\ x_C - x_Q & y_C - y_Q & z_C - z_Q \end{vmatrix},$$

$\vec{h}, \vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3, \vec{h}_4$ 中点的坐标排列依照右手系顺序, $|\cdot|$ 表示行列式。如图 5 所示。

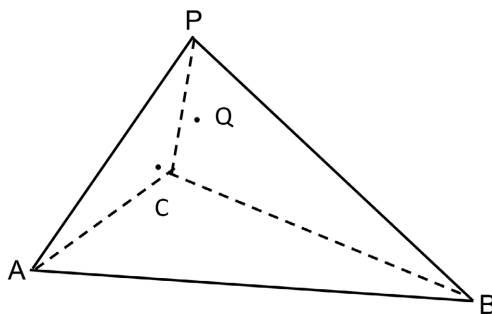


Figure 5. Right hand spatial four points

图 5. 右手系空间四点

证明: 由引理 2 知,

$$\begin{aligned}
& x_A \cdot \dot{h}_1 + x_B \cdot \dot{h}_2 + x_C \cdot \dot{h}_3 + x_P \cdot \dot{h}_4 \\
&= \begin{vmatrix} x_A & x_A - x_Q & y_A - y_Q & z_A - z_Q \\ x_B & x_B - x_Q & y_B - y_Q & z_B - z_Q \\ x_P & x_P - x_Q & y_P - y_Q & z_P - z_Q \\ x_C & x_C - x_Q & y_C - y_Q & z_C - z_Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_A - x_P & x_A - x_P & y_A - y_P & z_A - z_P \\ x_B - x_P & x_B - x_P & y_B - y_P & z_B - z_P \\ x_P & x_P - x_Q & y_P - y_Q & z_P - z_Q \\ x_C - x_P & x_C - x_P & y_C - y_P & z_C - z_P \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_A - x_P & 0 & y_A - y_P & z_A - z_P \\ x_B - x_P & 0 & y_B - y_P & z_B - z_P \\ x_P & -x_Q & y_P - y_Q & z_P - z_Q \\ x_C - x_P & 0 & y_C - y_P & z_C - z_P \end{vmatrix} = -x_Q \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} x_A - x_P & y_A - y_P & z_A - z_P \\ x_B - x_P & y_B - y_P & z_B - z_P \\ x_C - x_P & y_C - y_P & z_C - z_P \end{vmatrix} = x_Q \cdot \dot{h}.
\end{aligned}$$

同理有 $y_A \cdot \dot{h}_1 + y_B \cdot \dot{h}_2 + y_C \cdot \dot{h}_3 + y_P \cdot \dot{h}_4 = y_Q \cdot \dot{h}$, $z_A \cdot \dot{h}_1 + z_B \cdot \dot{h}_2 + z_C \cdot \dot{h}_3 + z_P \cdot \dot{h}_4 = z_Q \cdot \dot{h}$ 。

所以有 $Q \cdot \dot{h} = A \cdot \dot{h}_1 + B \cdot \dot{h}_2 + C \cdot \dot{h}_3 + P \cdot \dot{h}_4$ 成立。

说明: 1) 由行列式的性质知, $\dot{h} = \begin{vmatrix} x_A - x_P & y_A - y_P & z_A - z_P \\ x_B - x_P & y_B - y_P & z_B - z_P \\ x_C - x_P & y_C - y_P & z_C - z_P \end{vmatrix}$ 也可以换成其他的表示形式。

2) 如果本定理作如下证明: 首先有 $x_A \cdot \dot{h}_1 + x_B \cdot \dot{h}_2 + x_C \cdot \dot{h}_3 + x_P \cdot \dot{h}_4 = x_Q \cdot \dot{h}$ 。

由引理 2 得,

$$\begin{aligned}
x_A \cdot \dot{h}_1 &= x_A \cdot \begin{vmatrix} x_B - x_Q & y_B - y_Q & z_B - z_Q \\ x_P - x_Q & y_P - y_Q & z_P - z_Q \\ x_C - x_Q & y_C - y_Q & z_C - z_Q \end{vmatrix} \\
&= x_A \cdot \left(\begin{vmatrix} x_B & y_B - y_Q & z_B - z_Q \\ x_P & y_P - y_Q & z_P - z_Q \\ x_C & y_C - y_Q & z_C - z_Q \end{vmatrix} - x_Q \cdot \begin{vmatrix} 1 & y_B - y_Q & z_B - z_Q \\ 1 & y_P - y_Q & z_P - z_Q \\ 1 & y_C - y_Q & z_C - z_Q \end{vmatrix} \right) \\
&= x_A \cdot \left(\begin{vmatrix} x_B & y_B & z_B - z_Q \\ x_P & y_P & z_P - z_Q \\ x_C & y_C & z_C - z_Q \end{vmatrix} - y_Q \cdot \begin{vmatrix} x_B & 1 & z_B - z_Q \\ x_P & 1 & z_P - z_Q \\ x_C & 1 & z_C - z_Q \end{vmatrix} - x_Q \cdot \begin{vmatrix} 1 & y_B & z_B - z_Q \\ 1 & y_P & z_P - z_Q \\ 1 & y_C & z_C - z_Q \end{vmatrix} + x_Q y_Q \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & z_B - z_Q \\ 1 & 1 & z_P - z_Q \\ 1 & 1 & z_C - z_Q \end{vmatrix} \right) \\
&= x_A \cdot \left(\begin{vmatrix} x_B & y_B & z_B \\ x_P & y_P & z_P \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} - z_Q \cdot \begin{vmatrix} x_B & y_B & 1 \\ x_P & y_P & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} - y_Q \cdot \begin{vmatrix} x_B & 1 & z_B \\ x_P & 1 & z_P \\ x_C & 1 & z_C \end{vmatrix} - x_Q \cdot \begin{vmatrix} 1 & y_B & z_B \\ 1 & y_P & z_P \\ 1 & y_C & z_C \end{vmatrix} \right). \\
x_B \cdot \dot{h}_2 &= x_B \cdot \left(\begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_C & y_C & z_C \\ x_P & y_P & z_P \end{vmatrix} - z_Q \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} - y_Q \cdot \begin{vmatrix} x_A & 1 & z_A \\ x_C & 1 & z_C \\ x_P & 1 & z_P \end{vmatrix} - x_Q \cdot \begin{vmatrix} 1 & y_A & z_A \\ 1 & y_C & z_C \\ 1 & y_P & z_P \end{vmatrix} \right). \\
x_C \cdot \dot{h}_3 &= x_C \cdot \left(\begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_P & y_P & z_P \\ x_B & y_B & z_B \end{vmatrix} - z_Q \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_P & y_P & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} - y_Q \cdot \begin{vmatrix} x_A & 1 & z_A \\ x_P & 1 & z_P \\ x_B & 1 & z_B \end{vmatrix} - x_Q \cdot \begin{vmatrix} 1 & y_A & z_A \\ 1 & y_P & z_P \\ 1 & y_B & z_B \end{vmatrix} \right). \\
x_P \cdot \dot{h}_4 &= x_P \cdot \left(\begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} - z_Q \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} - y_Q \cdot \begin{vmatrix} x_A & 1 & z_A \\ x_B & 1 & z_B \\ x_C & 1 & z_C \end{vmatrix} - x_Q \cdot \begin{vmatrix} 1 & y_A & z_A \\ 1 & y_B & z_B \\ 1 & y_C & z_C \end{vmatrix} \right).
\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}
& x_A \cdot \hbar_1 + x_B \cdot \hbar_2 + x_C \cdot \hbar_3 + x_P \cdot \hbar_4 \\
&= x_A \cdot \begin{vmatrix} x_B & y_B & z_B \\ x_P & y_P & z_P \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} + x_B \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_C & y_C & z_C \\ x_P & y_P & z_P \end{vmatrix} + x_C \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_P & y_P & z_P \\ x_B & y_B & z_B \end{vmatrix} + x_P \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} \\
&\quad - z_Q \left(x_A \cdot \begin{vmatrix} x_B & y_B & 1 \\ x_P & y_P & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} + x_B \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} + x_C \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_P & y_P & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} + x_P \cdot \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \right) \\
&\quad - y_Q \left(x_A \cdot \begin{vmatrix} x_B & 1 & z_B \\ x_P & 1 & z_P \\ x_C & 1 & z_C \end{vmatrix} + x_B \cdot \begin{vmatrix} x_A & 1 & z_A \\ x_C & 1 & z_C \\ x_P & 1 & z_P \end{vmatrix} + x_C \cdot \begin{vmatrix} x_A & 1 & z_A \\ x_P & 1 & z_P \\ x_B & 1 & z_B \end{vmatrix} + x_P \cdot \begin{vmatrix} x_A & 1 & z_A \\ x_B & 1 & z_B \\ x_C & 1 & z_C \end{vmatrix} \right) \\
&\quad - x_Q \left(x_A \cdot \begin{vmatrix} 1 & y_B & z_B \\ 1 & y_P & z_P \\ 1 & y_C & z_C \end{vmatrix} + x_B \cdot \begin{vmatrix} 1 & y_A & z_A \\ 1 & y_C & z_C \\ 1 & y_P & z_P \end{vmatrix} + x_C \cdot \begin{vmatrix} 1 & y_A & z_A \\ 1 & y_P & z_P \\ 1 & y_B & z_B \end{vmatrix} + x_P \cdot \begin{vmatrix} 1 & y_A & z_A \\ 1 & y_B & z_B \\ 1 & y_C & z_C \end{vmatrix} \right) \\
&= \begin{vmatrix} x_A & x_A & y_A & z_A \\ x_B & x_B & y_B & z_B \\ x_P & x_P & y_P & z_P \\ x_C & x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} - z_Q \cdot \begin{vmatrix} x_A & x_A & y_A & 1 \\ x_B & x_B & y_B & 1 \\ x_P & x_P & y_P & 1 \\ x_C & x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} - y_Q \cdot \begin{vmatrix} x_A & x_A & 1 & z_A \\ x_B & x_B & 1 & z_B \\ x_P & x_P & 1 & z_P \\ x_C & x_C & 1 & z_C \end{vmatrix} - x_Q \cdot \begin{vmatrix} x_A & 1 & y_A & z_A \\ x_B & 1 & y_B & z_B \\ x_P & 1 & y_P & z_P \\ x_C & 1 & y_C & z_C \end{vmatrix} \\
&= -x_Q \cdot \begin{vmatrix} x_A & 1 & y_A & z_A \\ x_B & 1 & y_B & z_B \\ x_P & 1 & y_P & z_P \\ x_C & 1 & y_C & z_C \end{vmatrix} = -x_Q \cdot \begin{vmatrix} x_A - x_P & 0 & y_A - y_P & z_A - z_P \\ x_B - x_P & 0 & y_B - y_P & z_B - z_P \\ x_P & 1 & y_P & z_P \\ x_C - x_P & 0 & y_C - y_P & z_C - z_P \end{vmatrix} \\
&= -x_Q \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} x_A - x_P & y_A - y_P & z_A - z_P \\ x_B - x_P & y_B - y_P & z_B - z_P \\ x_C - x_P & y_C - y_P & z_C - z_P \end{vmatrix} = x_Q \cdot \hbar.
\end{aligned}$$

同理有

$$\begin{aligned}
& y_A \cdot \hbar_1 + y_B \cdot \hbar_2 + y_C \cdot \hbar_3 + y_P \cdot \hbar_4 \\
&= \begin{vmatrix} y_A & x_A & y_A & z_A \\ y_B & x_B & y_B & z_B \\ y_P & x_P & y_P & z_P \\ y_C & x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} - z_Q \cdot \begin{vmatrix} y_A & x_A & y_A & 1 \\ y_B & x_B & y_B & 1 \\ y_P & x_P & y_P & 1 \\ y_C & x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} - y_Q \cdot \begin{vmatrix} y_A & x_A & 1 & z_A \\ y_B & x_B & 1 & z_B \\ y_P & x_P & 1 & z_P \\ y_C & x_C & 1 & z_C \end{vmatrix} - x_Q \cdot \begin{vmatrix} y_A & 1 & y_A & z_A \\ y_B & 1 & y_B & z_B \\ y_P & 1 & y_P & z_P \\ y_C & 1 & y_C & z_C \end{vmatrix} \\
&= -y_Q \cdot \begin{vmatrix} y_A - y_P & x_A - x_P & 0 & z_A - z_P \\ y_B - y_P & x_B - x_P & 0 & z_B - z_P \\ y_P & x_P & 1 & z_P \\ y_C - y_P & x_C - x_P & 0 & z_C - z_P \end{vmatrix} \\
&= -y_Q \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} y_A - y_P & x_A - x_P & z_A - z_P \\ y_B - y_P & x_B - x_P & z_B - z_P \\ y_C - y_P & x_C - x_P & z_C - z_P \end{vmatrix} = y_Q \cdot \hbar.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& z_A \cdot \vec{h}_1 + z_B \cdot \vec{h}_2 + z_C \cdot \vec{h}_3 + z_P \cdot \vec{h}_4 \\
&= \begin{vmatrix} z_A & x_A & y_A & z_A \\ z_B & x_B & y_B & z_B \\ z_P & x_P & y_P & z_P \\ z_C & x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} - z_Q \cdot \begin{vmatrix} z_A & x_A & y_A & 1 \\ z_B & x_B & y_B & 1 \\ z_P & x_P & y_P & 1 \\ z_C & x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} - y_Q \cdot \begin{vmatrix} z_A & x_A & 1 & z_A \\ z_B & x_B & 1 & z_B \\ z_P & x_P & 1 & z_P \\ z_C & x_C & 1 & z_C \end{vmatrix} - x_Q \cdot \begin{vmatrix} z_A & 1 & y_A & z_A \\ z_B & 1 & y_B & z_B \\ z_P & 1 & y_P & z_P \\ z_C & 1 & y_C & z_C \end{vmatrix} \\
&= -z_Q \cdot \begin{vmatrix} z_A - z_P & x_A - x_P & y_A - y_P & 0 \\ z_B - z_P & x_B - x_P & y_B - y_P & 0 \\ z_P & x_P & y_P & 1 \\ z_C - z_P & x_C - x_P & y_C - y_P & 0 \end{vmatrix} = z_Q \cdot \vec{h}.
\end{aligned}$$

所以有 $Q \cdot \vec{h} = A \cdot \vec{h}_1 + B \cdot \vec{h}_2 + C \cdot \vec{h}_3 + P \cdot \vec{h}_4$ 成立。

我们能得到:

$$\begin{aligned}
x_A \cdot \vec{h}_1 + x_B \cdot \vec{h}_2 + x_C \cdot \vec{h}_3 + x_P \cdot \vec{h}_4 &= x_Q \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A & z_A \\ 1 & x_B & y_B & z_B \\ 1 & x_P & y_P & z_P \\ 1 & x_C & y_C & z_C \end{vmatrix}, \\
y_A \cdot \vec{h}_1 + y_B \cdot \vec{h}_2 + y_C \cdot \vec{h}_3 + y_P \cdot \vec{h}_4 &= y_Q \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A & z_A \\ 1 & x_B & y_B & z_B \\ 1 & x_P & y_P & z_P \\ 1 & x_C & y_C & z_C \end{vmatrix}, \\
z_A \cdot \vec{h}_1 + z_B \cdot \vec{h}_2 + z_C \cdot \vec{h}_3 + z_P \cdot \vec{h}_4 &= z_Q \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A & z_A \\ 1 & x_B & y_B & z_B \\ 1 & x_P & y_P & z_P \\ 1 & x_C & y_C & z_C \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

3) 与定理 2 的说明 4 类似, 设 A, B, C, P 四点不共面, 坐标分别为 $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$,

$$C(x_C, y_C, z_C), P(x_P, y_P, z_P), \text{ 则三棱锥 } P-ABC \text{ 的体积(见文献[10] [11])为: } V_{P-ABC} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A & z_A \\ 1 & x_B & y_B & z_B \\ 1 & x_P & y_P & z_P \\ 1 & x_C & y_C & z_C \end{vmatrix}.$$

点 Q 在三棱锥 $P-ABC$ 的内部或者棱上的充分必要条件为

$$Q \cdot V_{P-ABC} = A \cdot V_{Q-PBC} + B \cdot V_{Q-PAC} + C \cdot V_{Q-PAB} + P \cdot V_{Q-ABC}.$$

3. 应用

例 1 (2021 年全国高考一卷)如图 6 所示, 在三棱锥 $A-BCD$, 平面 $ABD \perp$ 平面 BCD , $AB = AD$, O 为 BD 的中点, 1) 证明 $OA \perp CD$; 2) 若 $\triangle OCD$ 是边长为 1 的等边三角形, E 在棱 AD 上, $DE = 2EA$, 且二面角 $E-BC-D$ 的大小为 45° , 求棱锥 $A-BCD$ 的体积。

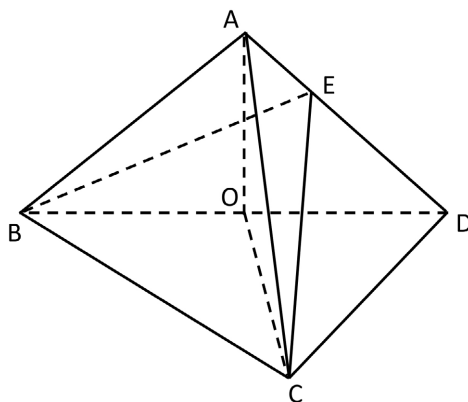


Figure 6. Diagram of example one

图 6. 例 1 图示

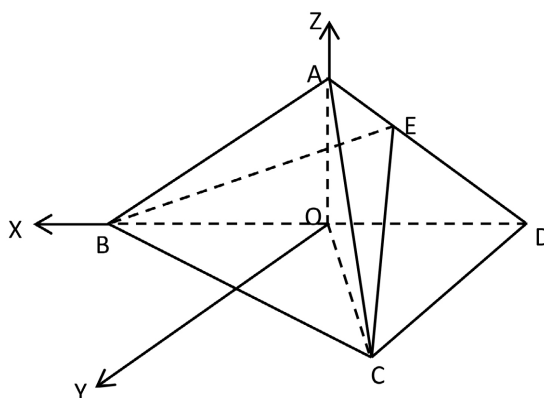


Figure 7. Right-hand coordinate system of example one

图 7. 建立右手系坐标后的例 1

证明: 以 O 为坐标原点, 射线 OB 为 x 轴正半轴, 按照右手法则建立如图 7 所示的坐标系, 则 $O(0,0,0)$ 。

1) 设 $A(0,0,b)$, $B(a,0,0)$, $D(-a,0,0)$, $C(x,y,0)$, 则 $A=OA=(0,0,b)$, $C-D=CD=(-a-x,-y,0)$ 。又 $(0,0,b) \cdot (-a-x,-y,0) = 0 \cdot (-a-x) + 0 \cdot (-y) + b \cdot 0 = 0$, 所以 $OA \perp CD$, 所以 $OA \perp CD$ 。

2) 由(1)得, $B(1,0,0)$, $D(-1,0,0)$, $C\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ 。设 $A(0,0,b)$, 则由定理 1 知: $E\left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}b\right)$ 。过点 E 在 $\triangle ABD$ 内作 $EF \perp BD$, 垂足为 F , 则 $F\left(-\frac{1}{3}, 0, 0\right)$, $\triangle BFC$ 是 $\triangle BEC$ 在平面 BCD 上的射影三角形。

所以 $B-F=\left(\frac{4}{3}, 0, 0\right)$, $C-F=\left(-\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $B-E=\left(\frac{4}{3}, 0, -\frac{2}{3}b\right)$, $C-E=\left(-\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{2}{3}b\right)$,

$$\text{所以 } S_{\triangle BFC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} k = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 0 & -\frac{2}{3}b \\ -\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{2}{3}b \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 0 & -\frac{2}{3}b \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{2}{3}b \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} -\frac{2}{3}b & \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3}b & -\frac{1}{6} \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} k \right) = \sqrt{\frac{1}{3}(b^2+1)},$$

其中 i, j, k 分别为 x, y, z 正半轴上的单位向量。

$$\text{所以 } \cos 45^\circ = \frac{S_{\triangle BFC}}{S_{\triangle BEC}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\frac{1}{3}(b^2+1)}}, \text{ 所以 } b = \pm 1.$$

不妨取 $b=1$, 则 $A(0,0,1)$, $B-A=(1,0,-1)$, $C-A=\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right)$, $D-A=(-1,0,-1)$ 。

$$\text{由引理得 } V_{A-BCD} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

例 2 [1][12] (《步步高大一轮复习讲义》配套《课时作业》(文科)第 244 页第 14 题)

在等腰直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC = 2$, M, N (不与 A, C 重合) 为 AC 边上的两个动点, 且满足 $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{2}$, 则 $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BN}$ 的取值范围为()

- (A) $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ (B) $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ (C) $\left[\frac{3}{2}, 2\right)$ (D) $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$

解: 以点 B 为坐标原点, 向量 $\overrightarrow{BA}$ 正方向为 x 轴正方向, 过点 B 与 BA 垂直的直线为 y 轴建系, 如图 8 所示, 则 $B(0,0)$, $A(2,0)$, $C(0,2)$ 。

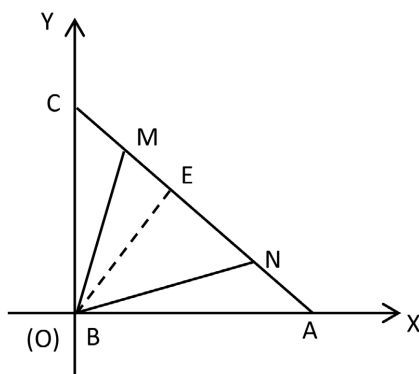


Figure 8. Diagram of example two

图 8. 例 2 图示

设 $|\overrightarrow{CM}| = \lambda$, $|\overrightarrow{AN}| = \mu$, 则有 $\lambda + \mu = \sqrt{2}$, $(\lambda + \sqrt{2})\overrightarrow{M} = \lambda\overrightarrow{N} + \sqrt{2}\overrightarrow{C}$, $(\mu + \sqrt{2})\overrightarrow{N} = \mu\overrightarrow{M} + \sqrt{2}\overrightarrow{A}$ 。

所以有 $(\lambda + \sqrt{2})\overrightarrow{M} - \lambda\overrightarrow{N} = \sqrt{2}\overrightarrow{C}$, $(\mu + \sqrt{2})\overrightarrow{N} - \mu\overrightarrow{M} = \sqrt{2}\overrightarrow{A}$ 。

于是得到: $(\sqrt{2}(\lambda + \mu) + 2)\overrightarrow{M} = \sqrt{2}(\mu + \sqrt{2})\overrightarrow{C} + \sqrt{2}\lambda\overrightarrow{A}$,
 $(\sqrt{2}(\lambda + \mu) + 2)\overrightarrow{N} = \sqrt{2}(\lambda + \sqrt{2})\overrightarrow{A} + \sqrt{2}\mu\overrightarrow{C}$,

所以 $(\sqrt{2}(\lambda+\mu)+2)^2 M \cdot N = 2\left[(\lambda+\sqrt{2})(\mu+\sqrt{2})+\lambda\mu\right] A \cdot C + 2\lambda(\lambda+\sqrt{2})A^2 + 2\mu(\mu+\sqrt{2})C^2$ 。

又 $A \cdot C = 0$, 所以 $16M \cdot N = 2\lambda(\lambda+\sqrt{2})A^2 + 2\mu(\mu+\sqrt{2})C^2$ 。

又 $A^2 = 4$, $C^2 = 4$, $\lambda + \mu = \sqrt{2}$, 所以 $M \cdot N = \frac{1}{2}(\lambda^2 + \mu^2) + 1 = \left(\lambda - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$ 。

又 $0 < \lambda < \sqrt{2}$, 所以 $\frac{3}{2} \leq M \cdot N < 2$ 。

即 $\mathbf{BM} \cdot \mathbf{BN}$ 的取值范围为 $\left[\frac{3}{2}, 2\right)$ 。

例3 已知三棱锥 $D-ABC$ 的顶点坐标分别为: $A(-1,3,1)$, $B(1,-1,2)$, $C(2,-2,-1)$, $D(3,1,-3)$, 点 P 在三棱锥 $D-ABC$ 的内部, 且三棱锥 $P-DBC$ 、三棱锥 $P-ADC$ 、三棱锥 $P-ABD$ 和三棱锥 $P-ABC$ 的体积比为 $1:2:3:4$, 求点 P 到 $\triangle ABC$ 所在平面的距离。

解 由题意知, 三棱锥 $D-ABC$ 的体积^{[10] [11]}为

$$V_{D-ABC} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \times 30 = 5,$$

所以 $V_{P-DBC} = \frac{1}{2}$, $V_{P-ADC} = 1$, $V_{P-ABD} = \frac{3}{2}$, $V_{P-ABC} = 2$ 。

设点 P 的坐标为 (x, y, z) , 则有

$$5 \cdot P = \frac{1}{2} \cdot A + 1 \cdot B + \frac{3}{2} \cdot C + 2 \cdot D,$$

即 $5 \cdot (x, y, z) = \frac{1}{2} \cdot (-1, 3, 1) + 1 \cdot (1, -1, 2) + \frac{3}{2} \cdot (2, -2, -1) + 2 \cdot (3, 1, -3)$, $(10x, 10y, 10z) = (19, -1, -10)$,

所以点 P 的坐标为 $\left(\frac{19}{10}, \frac{-1}{10}, -1\right)$ 。

由题意知, $\mathbf{AB} = (2, -4, 1)$, $\mathbf{AC} = (3, -5, -2)$ 。

设 $\triangle ABC$ 所在平面的法向量为 $\alpha = (m, n, r)$, 则有 $\alpha \perp \mathbf{AB}$, $\alpha \perp \mathbf{AC}$, 即

$$\begin{cases} 2m - 4n + r = 0, \\ 3m - 5n - 2r = 0. \end{cases}$$

取 $m = 13$, $n = 7$, $r = 2$, 得到 $\alpha = (13, 7, 2)$, 所以 $\triangle ABC$ 所在平面的方程为

$$13(x+1) + 7(y-3) + 2(z-1) = 0,$$

于是点 P 到 $\triangle ABC$ 所在平面的距离为 $\frac{\left|13\left(\frac{19}{10}+1\right)+7\left(\frac{-1}{10}-3\right)+2(-1-1)\right|}{\sqrt{13^2+7^2+2^2}} = \frac{6\sqrt{222}}{111}$ 。

4. 结论

文中提出的基于有向距离、行列式等理论基础, 对直线上、平面内和空间内的点坐标恒等式进行转化, 可以很好地将抽象的几何问题转化为代数问题, 进而进行求解。此时, 要求学生具有较好的行列式基础知识、知识转移能力, 这对于大多数中学生来说是有一定难度的。同时, 对中学教师的教学方法和教学知识的储备也有了更高的要求。文中只是列举了部分例题, 并没有对空间几何问题进行全面地分析

和分类, 因此应继续对空间几何问题进行归纳、总结、分类, 能够、对空间几何问题转化为可用行列式知识解决进行更全面的分析、研究和阐述。

参考文献

- [1] 陈晓明. 极化恒等式在平面向量中的应用举例[J]. 数理化学学习(高中版), 2021(12): 3-5.
- [2] 钱伟密, 张启兆. 三个向量恒等式在解题中的应用[J]. 中学生数理化(高一使用), 2022(6): 13+20.
- [3] 张景中, 彭翥成. 点几何的解题应用: 计算篇[J]. 数学通报, 2019, 58(3): 1-5+58.
- [4] 邓云春, 张传军, 左羽, 等. 点几何的线性运算及应用[J]. 高等数学研究, 2022, 25(1): 74-79+115.
- [5] 朱天龙, 郭美玉. 拉普拉斯三角形面积公式探索与几何解释[J]. 中学生数学, 2022(9): 21-23.
- [6] 朱天龙, 邢璐雪. 拉普拉斯二维化与三角形面积公式[J]. 中学生数学, 2021(21): 26-27.
- [7] 北京大学数学系前代数小组, 编. 高等代数[M]. 第 5 版. 王萼芳, 石生明, 修订. 北京: 高等教育出版社, 2021: 40-54.
- [8] 黄廷祝, 成孝予. 线性代数[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2009: 40-48.
- [9] 唐盼盼, 曾小平, 郭焕玲. 三角形面积公式的多种形式[J]. 数学之友, 2021(4): 84-85+88.
- [10] 李国望, 卞革, 付芳芳. 向量混合积与四面体体积公式的教学探究[J]. 高等数学研究, 2021, 24(3): 57-59+33.
- [11] 何朝葵, 郑苏娟, 孙中喜. 行列式的几何意义及多面体体积的计算[J]. 大学数学, 2021, 37(3): 105-109.
- [12] 陈晓明. 极化恒等式在平面向量中的应用[J]. 数理天地(高中版), 2021(12): 5-7.