Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(7), 3220-3226
Published Online July 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.137308

有限群的s-半置换子群

徐向阳[1]，李样明[2*]，刘小伟[1]

[1]南昌师范学院数学与信息科学学院，江西 南昌
[2]广东第二师范学院数学学院，广东 广州

收稿日期：2024年6月17日；录用日期：2024年7月11 日；发布日期：2024年7月18 日

摘 要

设G为有限群，H为G的子群。若对G的任意满足$(|P|, |H|) = 1$的**Sylow** 子群P，都有$G_pH = HG_p$成立，则称H为G的s-半置换子群。本文，我们主要探究具有若干s-半置换子群的有限群的结构。我们的结论推广了前人的若干结果。

关键词

s-半置换子群，**Sylow** p-子群，p- 超可解群，最小生成元数

Finite Groups with Some s-Semipermutable Subgroups

Xiangyang Xu[1], Yangming Li[2*], Xiaowei Liu[1]

[1]School of Mathematics and Computer Science, Nanchang Normal University, Nanchang Jiangxi
[2]School of Mathematics, Guangdong University of Education, Guangzhou Guangdong

Received: Jun. 17th, 2024; accepted: Jul. 11th, 2024; published: Jul. 18th, 2024

* 通讯作者。

文章引用: 徐向阳, 李样明, 刘小伟. 有限群的s-半置换子群[J]. 应用数学进展, 2024, 13(7): 3220-3226.
DOI: 10.12677/aam.2024.137308

Abstract

Suppose that G is a finite group and H is a subgroup of G. We say that H is s-semipermutable in G if $HG_p = G_pH$ for any Sylow p-subgroup G_p of G with $(p, |H|) = 1$. We investigate the influence of s-semipermutable subgroups on the structure of finite groups. Some recent results are generalized.

Keywords

s-Semipermutable Subgroup, Sylow p-Subgroup, p-Supersoluble Sroup, Minimum Generative Element

1. 引言

文中所有的群都为有限群, 所涉及的符号和术语都是标准的, 可参考 [1]. 设G 为有限群. 我们记$|G|$为群G的阶, $\pi(G)$为整除$|G|$的所有素因子所成的集合. 设$p \in \pi(G)$, 我们记G_p 为群G的Sylow p- 子群.

假设P为一个p-群, 其中p为素数. 记$\mathcal{M}(P)$为P的所有极大子群做成的集合. 设d_p为p-群P的最小生成元个数, 即$p^{d_p} = |P/\Phi(P)|$. 在文 [2]中, 作者引入了一个新集合$\mathcal{M}_{d_p}(P)$, 其为$\mathcal{M}(P)$的子集且满足

$$\bigcap_{i=1}^{d_p} P_i = \Phi(P).$$

容易看出, $|\mathcal{M}(P)| \gg |\mathcal{M}_{d_p}(P)|$. 比如, 假设$P$为阶为$p^7$ 的初等交换p-群, 则$|\mathcal{M}_{d_p}(P)| = 1$, 但$|\mathcal{M}(P)| = 137257$.

设H, K为群G的两个子群. 若$HK = KH$, 则称H与K可置换. 称群G的子群H 在G 中s-置换, 如果H与群G 的所有Sylow 子群可置换, 可参考文 [3]. 文 [4]进一步引入了半置换子群和s-半置换子群的概念: 设H为G 的子群. 若H 与群G 的所有满足$(|H|, |K|) = 1$的子群K可置换, 则称H 为G的半置换子群; 若H与群G的所有满足$(|H|, |P|) = 1$的Sylow 子群P可置换, 则称H 为G 的s-半置换子

群. s-半置换子群概念的吸引了很多学者的关注, 迅速在有限群论中形成了一个研究热点, 可参考文献 [4–9]. 此外, 在文 [10]中, 作者对相关课题做了系统阐述.

设$p \in \pi(G)$, P为G的Sylow p-子群. 用给定条件的$\mathcal{M}(P)$中的元素刻画大群的结构在群论的研究中是一个有趣的课题. 比如, Srinivasan 文 [11] 得到: 若群G 的所有Sylow 子群的任意极大子群都在G中正规(或置换、或s-置换), 则G 为超可解群. 在文 [7]中, 作者推广了Srinivasan 的结论: 设G为群. 对群G的任意Sylow 子群P, 若$\mathcal{M}_{d_p}(P)$中每个元素都在G中s-半置换, 则G为超可解群. 本文, 我们将利用局部化的思想继续探讨s-半置换子群对大群结构的影响, 下面的结论统一和推广了文 [7]中的结果.

主要定理. 设G 为群, P 为G的一个Sylow p-子群, 其中$p \in \pi(G)$. 若$\mathcal{M}_{d_p}(P)$ 中的每个元素都在G中s-半置换, 则要么P 为p-阶循环群, 要么G 为p-超可解群.

2. 主要引理

引理2.1. ([12] 引理2.1) 设G为群.

(1) 群G的s-置换子群在G中次正规;

(2) 若$H \leq K \leq G$且H在G中s-置换, 则H 在K中s-置换;

(3) 若H为G的s-置换Hall子群, 则$H \trianglelefteq G$;

(4) 设$K \trianglelefteq G$且$K \leq H$. 则H在G中s-置换当且仅当H/K在G/K中s- 置换;

(5) 若H, K为G的s-置换子群, 则$H \cap K$在G中s-置换;

(6) 设$p \in \pi(G)$, P为G的p-子群. 则P在G 中s-置换当且仅当$O^p(G) \leq N_G(P)$.

引理2.2. ([12] 引理2.2) 设G为群, H为G的s-半置换子群. 则

(1) 若$H \leq K \leq G$, 则H在K中s-半置换;

(2) 设N为G的正规子群. 若H为p-群, 其中$p \in \pi(G)$, 则HN/N在G/N中s- 半置换;

(3) 若$H \leq O_p(G)$, 则H在G中s-置换;

(4) 设$p \in \pi(G)$. 若H为p-群, N为G的正规子群, 则$H \cap N$在G中s- 半置换.

引理2.3. ([5] 定理A) 设G为群, H为群G的p-子群. 若H在G中s-半置换, 则H^G为可解群.

引理2.4. ([1] I, 17.4) 设G为群, N为群G的交换正规子群. 设$N \leq M \leq G$且$(|N|, |G:M|) = 1$. 若N 在M中有补, 则N在G中有补.

引理2.5. ([13] [引理2.4]) 假设H为非交换单群. 若H的Sylow p-子群为p 阶循环群, 其中p为素数, 则H 的外自同构群$Out(H)$为p'- 群.

3. 主要结论

主要定理的证明. 假设定理不真, 设G为极小阶反例. 我们分如下步骤完成定理的证明.

(1) $O_{p'}(G) = 1$.

记$N=O_{p'}(G)$. 若$N>1$, 考虑商群G/N. 显然, PN/N为G/N的Sylow p- 子群. 注意到$PN/N\cong P$, 因此可设

$$\mathcal{M}_{d_p}(PN/N)=\{P_1N/N,P_2N/N,\cdots,P_{d_p}N/N\}.$$

显然, 由引理2.2, P_iN/N在G/N中s-半置换, 其中$i\in\{1,2,\cdots,d_p\}$. 因此G/N满足定理的假设. 于是由G的选择, 要么PN/N 为p- 阶循环群, 要么G/N 为p-超可解群, 矛盾. 这说明$N=O_{p'}(G)=1$.

(2) P为非循环群.

若P为循环群, 则$\Phi(P)$为P的唯一的极大子群. 由假设, $\Phi(P)$在G中s- 半置换. 由 [12, 定理3.2], 要么P为p-阶循环群, 要么G 为p- 超可解群, 矛盾.

(3) $\Phi(P)_G=1$. 因此$O_p(G)$为初等交换群.

若否, 设$T\leq\Phi(P)_G$且$T\trianglelefteq G$. 考虑商群G/T. 由于$\Phi(P)$包含在P 的每个极大子群中且P/T与P有相同的生成元数量, 因此

$$\mathcal{M}_{d_p}(P/T)=\{P_1/T,P_2/T,\cdots,P_{d_p}/T\}.$$

由假设及引理2.2, P_i/T 在G/T中s-半置换, 其中$i\in\{1,2,\cdots,d_p\}$. 因此, G/T 满足定理的假设. 由G的选择, 这说明要么P/T为p-阶循环群, 要么G/T 为p-超可解群. 若P/T为循环群, 则P亦为循环群, 矛盾. 因此G/T为p- 超可解群, 注意到p- 超可解群类为饱和群系且$T\leq\Phi(P)_G\leq\Phi(G)$. 于是$G$为$p$-超可解群, 矛盾.

(4) 若N为G的包含于P的极小正规子群, 则$|N|=p$.

若对任意$P_i\in\mathcal{M}_{d_p}(P)$, $N\leq P_i$, 则

$$N\leq\bigcap_{i=1}^{d_p}P_i=\Phi(P),$$

这矛盾于(3). 因此存在$P_{i_0}\in\mathcal{M}_{d_p}(P)$ 使得$N\nleq P_{i_0}$. 由引理2.2, $P_{i_0}\cap N$ 在G中s-半置换. 于是由引理2.2, $P_{i_0}\cap N$ 在G 中s-置换. 又$P_{i_0}\cap N$ 为P 的正规子群, 由引理2.1, $P_{i_0}\cap N$为G的正规子群. 这说明$P_{i_0}\cap N=1$. 注意到P_{i_0}为P 的极大子群, 于是有$|N|=p$.

(5) 群G的所有极小正规子群包含于$O_p(G)$.

假设N为G的一个极小正规子群. 若N不为p-群, 则由(1), $p\in\pi(N)$. 设$N=N_1\times N_2\times\cdots\times N_s$, 其中$N_i$为同构的非交换单群, $i\in\{1,2,\cdots,s\}$.

(5.1) 对任意$P_i\in\mathcal{M}_{d_p}(P)$, $P_i\cap N=1$, $s=1$, 即N为非交换单群.

设$P_i\in\mathcal{M}_{d_p}(P)$. 由引理2.2, $P_i\cap N$为G的s- 半置换子群. 因此由引理2.2, $P_i\cap N$ 为N的s- 半置换p-子群. 于是$(P_i\cap N)^N$为可解群(参考定理2.3). 这说明$P_i\cap N=1$. 从而$|P\cap N|\leq p$, 即$N=N_1$为单群.

(5.2) $O_p(G)=1$.

若$O_p(G)\neq 1$, 可设H为G的包含于$O_p(G)$的极小正规子群. 由(4)可知, $|H|=p$. 因此, $HN=$

$H \times N$.

对任意$P_i \in \mathcal{M}_{d_p}(P)$, 若$H \cap P_i = 1$, 则$HN \cap P_i = (H \cap P_i)(N \cap P_i) = 1$. 计算$HNP_i$ 的阶可得, 显然矛盾. 因此$H \cap P_i \neq 1$. 于是$H \leq P_i$, 由P_i的选择, 显然有$H \leq \Phi(P)$, 矛盾.

(5.3) $C_G(N) = 1$.

假设$C_G(N) \neq 1$. 取G的包含于$C_G(N)$的极小正规子群N^*. 则由(5.1), (5.2), N^* 为非交换单群且$N \cap N^* = 1$.

由于$P_1 \cap NN^* = (P_1 \cap N)(P_1 \cap N^*) = 1$, 于是$|P_1NN^*|_p = p^2|P_1| > |P|$, 矛盾.

(5.4) 完成(5)的证明.

由(5.3)知, $C_G(N) = 1$. 因此$G/N \lesssim Aut(N)$. 这说明$|N_p| = p$且$p \in \pi(Out(N))$, 这矛盾于引理2.5.

(6) $G = O_p(G) \rtimes M$, $|O_p(G)| = p$.

设N_1为G的包含于$O_p(G)$的极小正规子群. 由(4), N_1为p 阶循环群. 由(3), $N_1 \cap \Phi(P) = 1$. 因此存在P的极大子群S_1使得$N_1 \cap S_1 = 1$. 由引理2.4, N_1在G 中有补K, 即$G = N_1K$且$N_1 \cap K = 1$. 于是$O_p(G) = N_1(O_p(G) \cap K)$. 容易证明$O_p(G) \cap K$为$G$的正规子群且$P \cap K$ 为K的Sylow p- 子群. 若$O_p(G) \cap K = 1$, 则(6)显然成立. 因此可设$O_p(G) \cap K \neq 1$. 我们可取G的包含于$O_p(G) \cap K$的极小子群N_2. 由(4), N_2为p 阶循环群且存在P 的极大子群S_2使得$N_2 \cap S_2 = 1$. 于是有$P = N_2S_2 = S_2(O_p(G) \cap K) = S_2(P \cap K)$. 由于$|P \cap K : S_2 \cap K| = |S_2(P \cap K) : S_2| = |P : S_2| = p$, 因此$S_2 \cap K$在$P \cap K$中有补$N_2$. 应用引理2.4, N_2在K中有补L. 因此$G = N_1K = (N_1 \times N_2) \rtimes L$. 继续这个过程, 我们可得$G = O_p(G) \rtimes M$, 其中$O_p(G) = N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_r$, N_i为G 的p阶正规子群.

(7) 最后的矛盾.

由于对G的任意极小正规子群N, 有$N \leq Z(P)$, 因此$P \leq C_G(O_p(G))$. 又$C_G(O_p(G)) \cap M \trianglelefteq \langle O_p(G), M\rangle = G$, 由(4)和(5), $C_G(O_p(G)) \cap M = 1$, 于是$P \cap M = 1$. 这说明$P = P \cap O_p(G) \cap M = O_p(G)(P \cap M) = O_p(G)$. 因此由(6), G为p-超可解群, 定理得证. □

注. 本文作者尚无法给出一个不依赖有限单群分类结果的证明方法.

4. 若干应用

下面给出主要定理的一些应用.

设$p = \min \pi(G)$. 由([1] IV, 2.8)知, 若G_p 为循环群, 则G为p- 幂零群. 此外, 若G为p-超可解群, 则G为p-幂零群. 由主要定理可知下面结论成立.

推论4.1. ([7] 定理3.1) 设G为群, $p = \min \pi(G)$. 设P为G的Sylow p-子群. 则G为p-幂零群当且仅当$\mathcal{M}_{d_p}(P)$ 中每一元都在G中s- 半置换.

由p-超可解群的定义知, 若G为具有p阶Sylow p- 子群的p- 可解群, 则G为p- 超可解群. 因此, 下面的结论成立.

推论4.2. ([7] 定理3.8) 设G为p-可解群, 其中$p \in \pi(G)$. 设P为G 的Sylow p-子群. 若$\mathcal{M}_{d_p}(P)$中每一元都在G 中s-半置换, 则G为p-超可解群.

推论4.3. ([7] 定理3.9) 设G为群, $p \in \pi(G)$. 设P为G的Sylow p- 子群且$N_G(P)$为p-幂零群. 若$\mathcal{M}_{d_p}(P)$中每一元都在G 中s-半置换, 则G为p-幂零群.

证　由主要定理可知, 要么G为p-超可解群, 要么P 为p阶循环群. 若P为循环群, 则$N_G(P) = C_G(P)$. 由Burnside 的p-幂零准则见([1] IV, 2.6), G 为p- 幂零群, 得证. 现在假设G 为p-超可解群. 由于p-超可解群的p-长至多为1, 因此$PO_{p'}(G) \trianglelefteq G$. 记$\bar{G} = G/O_{p'}(G)$. 由假设, $\bar{G} = N_{\bar{G}}(\bar{P}) = N_G(P)O_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ 为p-幂零群. 因此G 为p-幂零群. □

基金项目

本文由国家自然科学基金面上项目(12071092)和江西省教育厅科技项目 (GJJ202601, GJJ2202005)资助。

参考文献

[1] Huppert, B. (1967) Endliche Gruppen I. Springer-Verlag.

[2] Li, S. and He, X. (2008) On Normally Embedded Subgroups of Prime Power Order in Finite Groups. *Communications in Algebra*, **36**, 2333-2340. https://doi.org/10.1080/00927870701509370

[3] Kegel, O.H. (1962) Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen. *Mathematische Zeitschrift*, **78**, 205-221. https://doi.org/10.1007/bf01195169

[4] Chen, Z.M. (1987) On a Theorem of Srinivasan. *Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)*, **12**, 1-4.

[5] Isaacs, I.M. (2014) Semipermutable π-Subgroups. *Archiv der Mathematik*, **102**, 1-6. https://doi.org/10.1007/s00013-013-0604-2

[6] Li, Y.M., He, X.L. and Wang, Y.M. (2010) On s-Semipermutable Subgroups of Finite Groups. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **26**, 2215-2222. https://doi.org/10.1007/s10114-010-7609-6

[7] Lu, J.K. and Li, S.R. (2009) On s-Semipermutable Subgroups of Finite Groups. *Journal of Mathematical Research and Exposition*, **29**, 985-991.

[8] Wang, L.F., Li, Y.M. and Wang, Y.M. (2008) Finite Groups in Which s-Semipermutability Is a Transitive Relation. *International Journal of Algebra*, **2**, 143-152.

[9] Zhang, Q.H. and Wang, L.F. (2005) The Influence of s-Semipermutable Subgroups on the Structure of a Finite Group. *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, **48**, 81-88.

[10] 李样明. 有限群的半置换子群和s-半置换子群[J]. 数学进展(中国), 2020, 49(4): 395-400.

[11] Srinivasan, S. (1980) Two Sufficient Conditions for Supersolvability of Finite Groups. *Israel Journal of Mathematics*, **35**, 210-214. https://doi.org/10.1007/bf02761191

[12] Li, Y., Qiao, S., Su, N. and Wang, Y. (2012) On Weakly s-Semipermutable Subgroups of Finite Groups. *Journal of Algebra*, **371**, 250-261. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2012.06.025

[13] Ezquerro, L.M., Li, X. and Li, Y. (2014) Finite Groups with Some CAP-Subgroups. *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, **131**, 77-87. https://doi.org/10.4171/rsmup/131-6