

带有强阻尼和记忆项的Kirchhoff板方程的全局吸引子

刘润杰

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2024年7月1日; 录用日期: 2024年7月24日; 发布日期: 2024年7月30日

摘要

本文研究具有记忆项和强阻尼的 Kirchhoff 型板方程全局吸引子的存在性。通过将先验估计和收缩函数相结合的方法, 证明了有界吸收集的存在性和半群的渐近紧性, 最终得到了全局吸引子的存在性。

关键词

板方程, Kirchhoff型, 强阻尼, 记忆项, 全局吸引子

Global Attractors for a Kirchhoff-Type Plate Equation with Strong Damping and Memory

Runjie Liu

College of Mathematics and Statistic, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Jul. 1st, 2024; accepted: Jul. 24th, 2024; published: Jul. 30th, 2024

Abstract

In this paper, we try to study the global attractors for a Kirchhoff-type plate equation with strong damping and memory. Consequently, we introduce to prove the existence of a bounded absorbing set and asymptotic compactness of the semigroup by combining the prior estimate with the contraction function. Ultimately, we obtain the existence of the global attractors.

Keywords

Plate Equation, Kirchhoff-Type, Strong Damping, Memory Term, Global Attractors

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文主要研究具有记忆项和强阻尼的 Kirchhoff 型板方程

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u - M(\|\nabla u\|^2)\Delta u - \Delta u_t + k(0)\Delta^2 u + \int_0^\infty k'(s)\Delta^2 u(t-s)ds \\ + \delta f(u_t) = g(u) + h(x), & x \in \Omega, t \geq 0, \\ u(x, t) = \Delta u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ u(x, t) = u_0(x, t), u_t(x, t) = \partial_t u_0(x, t), & x \in \Omega, t \leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

全局吸引子的存在性, 其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界开区域, $-\Delta u_t$ 为强阻尼项, $k(\cdot)$ 满足 $k(0) > 0$, $k(\infty) > 0$, $\delta f(u_t)$ ($0 < \delta < 1$) 为扰动项, $g(u)$ 是一个非线性函数, $h(x) \in L^2(\Omega)$.

函数 $M(\cdot)$, $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ 分别满足如下假设

(1) 函数 $M(\cdot)$ 满足: 对任意的 $s \in \mathbb{R}^+$, 有

$$M(s) = s^{\frac{m}{2}}, \quad \forall m \geq 1. \quad (2)$$

(2) 函数 $f(\cdot) \in C^1(\mathbb{R})$ 并且 $f(\cdot)$ 严格单调递增, 满足:

$$f(0) = 0, \quad (3)$$

$$\liminf_{|s| \rightarrow \infty} f'(s) > 0, \quad (4)$$

$$|f(s)| \leq C_1(1 + |s|^p), \quad (5)$$

其中当 $n \geq 5$ 时, $0 < p < \frac{n+4}{n-4}$, 当 $n \leq 4$ 时, $p = 0$.

(3) 函数 $g(\cdot) \in C^1(\mathbb{R})$, 满足:

(a) 增长性条件

$$|g'(s)| \leq C_2(1 + |s|^{q-1}), \quad (6)$$

其中当 $n \leq 4$ 时, $q = 1$; 当 $n > 4$ 时, $1 \leq q \leq \frac{n+4}{n-4}$.

(b) 耗散性条件

$$\limsup_{|s| \rightarrow \infty} \frac{g(s)}{s} < \lambda_1, \quad (7)$$

其中 λ_1 是 Δ^2 的第一个正特征值.

根据参考文献 [1], 做如下变换

$$\eta^t(x, s) = u(x, t) - u(x, t - s). \quad (8)$$

假设 $\mu(s) = -k'(s)$ 并且 $k(\infty) = 1$, 则问题 (1) 转化成

$$u_{tt} + 2\Delta^2 u - \|\nabla u\|^m \Delta u - \Delta u_t + \int_0^\infty \mu(s) \Delta^2 \eta^t(x, s) ds + \delta f(u_t) = g(u) + h(x) \quad (9)$$

和

$$\eta_t = -\eta_s + u_t. \quad (10)$$

对应以下的初边值条件

$$\begin{cases} u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \geq 0 \\ \eta^t(x, s) = 0, & (x, s) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega \\ u^t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega \\ \eta^0(x, s) = \eta_0(x, s), & (x, s) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (11)$$

其中

$$\begin{cases} u_0(x) = u_0(x, 0), \\ u_1(x) = \partial_t u_0(x, t) |_{t=0}, \\ \eta_0(x, s) = u_0(x, 0) - u_0(x, -s). \end{cases} \quad (12)$$

(9) 式中记忆核函数 $\mu(\cdot)$ 满足下列假设

$$\mu(s) \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+), \quad (13)$$

$$\mu(s) \geq 0, \mu'(s) \leq 0, \quad (14)$$

$$\int_0^\infty \mu(s) ds = \delta_1 > 0, \quad (15)$$

$$\mu'(s) + \delta_2 \mu(s) \leq 0. \quad (16)$$

问题 (1) 源于等温粘弹性理论, 它描述了具有低阶扰动的四阶粘弹性板, 并且模拟了历史空间中薄的可扩展弹性板的横向振动, 这种形式的 Kirchhoff 型项是由 Woinowsky-Krieger 在文献 [2] 提出的, 作者建立的长度为 l , 两端固定的位于 X -轴上的可扩展梁的数学模型如下

$$u_{tt} + \frac{EI}{\rho} u_{xxxx} - \left(\frac{H}{\rho} + \frac{EA}{2\rho l} \int_0^l |u_x|^2 dx \right) u_{xx} = 0,$$

其中 $H = \frac{EA\Delta}{l}$, E 表示杨氏模量, A 表示横截面积, Δ 表示杆的链接两端因挠度而靠近的量, I 表示横截面的二阶力矩, ρ 表示密度, H 表示作用在梁上的轴向力, 如果 $H > 0$, 则表示张力. 这类问题解的整体存在性及渐近性的研究始于 Ball 在文献 [3] 中关于弹性梁方程稳定性的讨论. 随后, 文献 [4] 研究了上述梁方程满足一定初边值条件时解的适定性.

关于具有记忆项的 Kirchhoff 型波动方程, 2011 年, LAZO 在文 [5] 首先运用经典的 Galerkin 方法证明了具有记忆项的 Kirchhoff 方程整体弱解的存在性

$$u_{tt} - M(\|\partial u\|^2) \Delta u + \int_0^T g(t-\tau) \Delta u(x, \tau) d\tau = 0.$$

文献 [6] 研究了具有记忆项和非线性阻尼项, 即阻尼项以非线性次数增长情形下的波动方程的整体吸引子的存在性

$$u_{tt} + a(x)g(u_t) + \lambda u - K_0 \Delta u - \int_0^\infty K'(s) \Delta u(t-s) ds + f(u) = h(x).$$

最近, 文 [7] 研究了以下带有强阻尼和记忆项的 Kirchhoff 波方程全局吸引子的存在性以及正则性

$$u_{tt} - M(\|\nabla u\|^2) \Delta u - \Delta u_t - k(0) \Delta u - \int_0^\infty k'(s) \Delta u(t-s) ds + \delta f(u_t) = g(u) + h(x),$$

其中 $M(s) = s^{\frac{m}{2}}$ ($m \geq 1$).

上述研究都是关于波方程的, 下面介绍 Kirchhoff 型板方程的相关结果. 文献 [8] 讨论了以下具有记忆项和非线性阻尼的 Kirchhoff 型板方程全局吸引子的存在性.

$$u_{tt} + \alpha \Delta^2 u + g(u_t) + \lambda u - \int_0^\infty \mu(s) \Delta^2 u(t-s) ds + \left(p - \beta \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u + f(u) = h(x)$$

其中, 非线性阻尼函数 g 满足 $|g(s)| \leq k_1(1 + |s|^q)$, 当 $N \leq 4$ 时, $1 \leq q < \infty$, 当 $N > 5$ 时, $1 \leq q \leq \frac{N+4}{N-4}$; 非线性项 f 满足 $|f'(s)| \leq k_0(1 + |s|^\rho)$, 当 $1 \leq N \leq 4$ 时, $\rho > 0$, 当 $N > 5$ 时, $1 \leq q \leq \frac{4}{N-4}$.

受上述参考文献的启发, 本文研究具有记忆项和强阻尼的 Kirchhoff 型板方程全局吸引子的存在性. 本文的难点在于, 首先, Kirchhoff 项的系数由文献 [8] 中的线性函数变为非线性函数 $M(\cdot)$, 这对解的适定性估计和计算带来了难度. 其次, 问题 (1) 中不仅含有扰动项 $\delta f(u_t)$, 还有强阻尼项 $-\Delta u_t$, 比以往的一些文章更加全面, 也更加复杂.

本文结构具体如下: 第二部分, 介绍本文相关的预备知识, 第三部分用压缩函数法证明了全局吸引子的存在性.

2. 预备工作

设 $L^p = L^p(\Omega)$, $H^k = H^k(\Omega)$, $H = V_0 = L^2(\Omega)$, $V_1 = H_0^1(\Omega)$, $V_2 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, 其中 $p \geq 1$, $k > 0$, H^k 是 Sobolev 空间, H_0^k 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 H^k 中的闭包.

空间 H 中的内积和范数分别用 $(\cdot, \cdot)$ 和 $\|\cdot\|$ 表示, V_2 的对偶空间 V_{-2} 表示, 对偶空间之间的对偶积用 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示.

定义算子 $A: V_2 \rightarrow V_{-2}$,

$$\langle Au, v \rangle = \langle \Delta u, \Delta v \rangle, \quad \forall u, v \in V_2,$$

$$D(A) = \{u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) | Au \in L^2(\Omega)\},$$

则 A 是空间 H 中的自伴算子, 且在空间 V_2 中是严格正的. 定义算子 A 的方幂为 A^s ($s \in \mathbb{R}$), 于是空间 $V_s = D(A^{\frac{s}{4}})$ 是 Hilbert 空间, 其内积和范数表示如下

$$(u, v)_s = (A^{\frac{s}{4}}u, A^{\frac{s}{4}}v) = \int_{\Omega} A^{\frac{s}{4}}u \cdot A^{\frac{s}{4}}v dx,$$

$$\|u\|_s^2 = (u, u)_s = \|A^{\frac{s}{4}}u\|^2.$$

显然

$$\|u\|_{v_1} = \|u\|_1 = \|A^{\frac{1}{4}}u\| = \|\nabla u\|,$$

$$\|u\|_{v_2} = \|u\|_2 = \|A^{\frac{1}{2}}u\| = \|\Delta u\|.$$

定义

$$L_{\mu}^2(\mathbb{R}^+; V_i) = \{\eta: \mathbb{R}^+ \rightarrow V_i | \int_0^{\infty} \mu(s) \|\eta(s)\|_i^2 ds < \infty\}, \quad i = 0, 1, 2,$$

它是 Hilbert 空间, 与之对应的内积和范数分别为

$$(\eta_1, \eta_2)_{\mu, i} = \int_0^{\infty} \mu(s) (\eta_1(s), \eta_2(s))_i ds,$$

$$\|\eta\|_{\mu, i}^2 = (\eta, \eta)_{\mu, i} = \int_0^{\infty} \mu(s) \|\eta(s)\|_i^2 ds.$$

进一步, 定义相空间 $\mathcal{H} = V_2 \times L_2 \times L_{\mu}^2(\mathbb{R}^+; V_2)$, 其对应范数为

$$\|(u, u_t, \xi)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\Delta u\|^2 + \|u_t\|^2 + \|\xi\|_{\mu, 2}^2.$$

由 Poincaré 不等式可知

$$\|\nabla u\|^2 \geq \lambda_1^{\frac{1}{2}} \|u\|^2, \forall u \in V_1,$$

其中 $\lambda_1 > 0$ 是 A 的第一个特征值.

定义 2.1 [9] [10] 称满足以下条件的单参数映射族 $\{S(t) : X \rightarrow X\}_{t \geq 0}$ 为完备度量空间 (X, d) 上的半群:

$$(1) S(0) = I;$$

$$(2) S(t+s) = S(t)S(s), \forall t, s \geq 0.$$

定义 2.2 [9] [11] 设 X 是完备的度量空间, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 是 X 上的连续半群, 称 X 中的子集 $\mathcal{A}$ 是 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 的全局吸引子, 若 $\mathcal{A}$ 满足下列条件:

(1)(紧性) $\mathcal{A}$ 是一个紧集;

(2)(不变性) $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}, \forall t \geq 0$;

(3)(吸引性) 对于 X 中的任意有界集 B , 都有 $\text{dist}(S(t)B, \mathcal{A}) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$),

其中 $\text{dist}(A, B)$ 表示 A, B 的 Hausdorff 半距离, 定义为 $\text{dist}(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \text{dist}(x, y)$.

定义 2.3 [11] 设 X 是一个 Banach 空间, B 是 X 上的有界子集, 称定义在 $X \times X$ 上的函数 $\Phi(\cdot, \cdot)$ 为 $B \times B$ 上的一个压缩函数. 如果对任意的序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, 存在子序列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{x_n\}_{n=1}^\infty$, 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} \Phi_T(x_{n_k}, x_{n_l}) = 0.$$

此外, 所有 $B \times B$ 上的压缩函数用 $\mathcal{C}(B)$ 表示.

引理 2.4 [11] 设 $\{S(T)\}_{t \geq 0}$ 是 X 中的一个半群, 并且有一个有界吸收集 B_0 , 进一步假设对任意的常数 $\varepsilon > 0$, 存在 $T(B_0, \varepsilon) \leq t$ 和 $\Phi(\cdot, \cdot) \in \mathcal{C}(B)$, 使得

$$\|S(T)x - S(T)y\|_X \leq \varepsilon + \Phi_T(x, y), \quad \forall x, y \in B_0,$$

则 $\{S(T)\}_{T \geq 0}$ 在 X 中渐近紧, 即对任意有界集 $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ 和 $\{t_n\}(\rightarrow \infty)$, $\{S(t_n)y_n\}_{n=1}^\infty$ 在 X 中是紧的.

3. 主要结果

问题 (1) 的解的适定性以及解对初值的连续依赖性, 可由 Faedo-Galerkin 逼近方法获得, 这里不再陈述, 我们直接给出下面的结果.

定理 3.1 假设 (2)-(10) 成立, 则对任意初值 $z_0 = (u_0, u_1, \eta_0) \in \mathcal{H}_0$, 问题 (1) 有唯一的解 $z = (u(t), u_t(t), \eta)$ 满足 $z \in C([0, T]; \mathcal{H})$.

由定理 3.1 可知, 问题 (1) 在空间 $\mathcal{H}$ 上可以产生一个发展半群 $S(t)$. 定义

$$S(t) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad S(t)(z_0) = z(t), \quad t > 0.$$

其中 $z(t)$ 是初值 z_0 对应的弱解. 因此, $S(t) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ 是连续的.

定理 3.2 假设(2)-(10)成立, 则问题 (1) 所产生的半群 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 在 $\mathcal{H}$ 中有一个有界吸收集.

证明 在 $L^2(\Omega)$ 中将 (9) 式与 u_t 作内积并利用 (10) 式得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \frac{1}{m+2} \|\nabla u\|^{m+2} + \frac{1}{2} \|\eta\|_{\mu,2}^2 - \int_{\Omega} (G(u) + hu) dx \right) \\ + \|\nabla u_t\|^2 + (\eta, \eta_s)_{\mu,2} + \delta(f(u_t), u_t) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $G(u) = \int_0^u g(s) ds$.

由 (16) 可知

$$\begin{aligned} (\eta, \eta_s)_{\mu,2} &= \int_0^\infty \mu(s) \int_{\Omega} \Delta \eta \Delta \eta_s dx ds = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \mu'(s) \|\Delta \eta\|^2 ds \\ &\geq \frac{\delta_2}{2} \int_0^\infty \mu(s) \|\Delta \eta\|^2 ds = \frac{\delta_2}{2} \|\eta\|_{\mu,2}^2. \end{aligned} \quad (18)$$

令

$$E(t) = \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \frac{1}{m+2} \|\nabla u\|^{m+2} + \frac{1}{2} \|\eta\|_{\mu,2}^2 - \int_{\Omega} (G(u) + hu) dx. \quad (19)$$

则将 (18) 和 (19) 代入 (17) 式可得

$$\frac{d}{dt} E(t) + \|\nabla u_t\|^2 + \frac{\delta_2}{2} \|\eta\|_{\mu,2}^2 + \delta(f(u_t), u_t) \leq 0. \quad (20)$$

再将 (20) 式从 0 到 t 积分得

$$E(t) + \int_0^t \|\nabla u_s\|^2 ds + \int_0^t \frac{\delta_2}{2} \|\eta\|_{\mu,2}^2 ds + \int_0^t \delta(f(u_s), u_s) ds \leq E(0). \quad (21)$$

通过 f 的假设条件可知 $\delta(f(u_t), u_t) > 0$, 由此可推出

$$\int_0^t \|\nabla u_s\|^2 ds + \int_0^t \frac{\delta_2}{2} \|\eta\|_{\mu,2}^2 ds + \int_0^t \delta(f(u_s), u_s) ds > 0. \quad (22)$$

结合 (21) 和 (22), 对任意的 $t > 0$, 都有

$$E(t) \leq E(0). \quad (23)$$

根据 (7) 式, 存在常数 λ 和 $C_3 > 0$, 使得

$$|(g(u), u)| < \lambda_1 \|u\|^2 < \frac{\lambda}{2} \|u\|^2 + C_3 |\Omega| \quad (24)$$

和

$$\int_{\Omega} G(u) dx < \frac{\lambda_1}{2} \|u\|^2 < \frac{\lambda}{4} \|u\|^2 + C_3 |\Omega|. \quad (25)$$

其中 $\lambda_1 < \lambda < \frac{3}{2} \lambda_1$, $|\Omega|$ 为 Ω 的测度.

由 Young 不等式可知, 存在常数 $\varepsilon > 0$, 使得

$$|\int_{\Omega} h u dx| \leq \varepsilon \|u\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|h\|^2. \quad (26)$$

类似的, 存在常数 λ 满足 $0 < \lambda + 4\varepsilon < 2\lambda_1$ 和常数 $C_4 > \max\{C_3, \frac{1}{4\varepsilon}\}$, 使得

$$E(0) \geq E(t) \geq \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u\|^2 + \frac{1}{m+2} \|\nabla u\|^{m+2} + \frac{1}{2} \|\eta\|_{\mu,2}^2 - C_4(|\Omega| + \|h\|^2). \quad (27)$$

将 (9) 两端与 $v = u_t + \varepsilon u$ 在 $L^2(\Omega)$ 上作内积并结合 (18) 可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|v\|^2 - \frac{\varepsilon^2}{2} \|u\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \frac{1}{m+2} \|\nabla u\|^{m+2} + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2} \|\eta\|_{\mu,2}^2 - \int_{\Omega} (G(u) + hu) dx \right) \\ - \varepsilon \|u_t\|^2 + 2\varepsilon \|\Delta u\|^2 + \varepsilon \|\nabla u\|^{m+2} + \|\nabla u_t\|^2 + \frac{\delta_2}{2} \|\eta\|_{\mu,2}^2 + \varepsilon(\eta, u)_{\mu,2} - \varepsilon(g(u), u) - \varepsilon(h, u) \leq 0. \end{aligned} \quad (28)$$

令

$$A(t) = \frac{1}{2} \|v\|^2 - \frac{\varepsilon^2}{2} \|u\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \frac{1}{m+2} \|\nabla u\|^{m+2} + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2} \|\eta\|_{\mu,2}^2 - \int_{\Omega} (G(u) + hu) dx \quad (29)$$

和

$$\begin{aligned} B(t) = -\varepsilon \|u_t\|^2 + 2\varepsilon \|\Delta u\|^2 + \varepsilon \|\nabla u\|^{m+2} + \|\nabla u_t\|^2 + \frac{\delta_2}{2} \|\eta\|_{\mu,2}^2 \\ + \varepsilon(\eta, u)_{\mu,2} - \varepsilon(g(u), u) - \varepsilon(h, u) \leq 0. \end{aligned} \quad (30)$$

则结合 (28)-(30) 有

$$\frac{d}{dt} A(t) + B(t) \leq 0. \quad (31)$$

首先估计 $A(t)$, 使用 Young 不等式和 Poincaré 不等式有

$$|\varepsilon \int_{\Omega} h u dx| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|h\|^2 + \frac{\varepsilon}{2\lambda_1} \|\Delta u\|^2. \quad (32)$$

结合 (25) (32) 并应用 Poincaré 不等式, 可以推出存在 ε 满足 $-\frac{\varepsilon^2}{2\lambda_1} - \frac{\lambda}{4\lambda_1} - \frac{1}{2\lambda_1} + 1 > \frac{1}{2}$ 并且 $C_5 > \max\{C_3, \frac{1}{2}\}$ 时, 有

$$A(t) \geq \frac{1}{2} \|v\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u\|^2 + \frac{1}{m+2} \|\nabla u\|^{m+2} + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2} \|\eta\|_{\mu,2}^2 - C_5(|\Omega| + \|h\|^2). \quad (33)$$

下面开始估计 $B(t)$, 使用 Young 不等式和 (15) 可知

$$|\varepsilon(\eta, u)_{\mu,2}| \leq \frac{\delta_1}{4} \|\eta\|_{\mu,2}^2 + \varepsilon^2 \|\Delta u\|^2. \quad (34)$$

将 (24) 和 (34) 代入 (30), 则存在一个与 C_3, ε, h 有关的常数 $C_4 > 0$, 使得

$$\frac{B(t)}{C_4} \geq -\varepsilon \|u_t\|^2 + \left(-\frac{\varepsilon \lambda_1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \|u\|^2 + (2\varepsilon - \varepsilon^2) \|\Delta u\|^2 + \varepsilon \|\nabla u\|^{m+2} + \|\nabla u_t\|^2 + \frac{\delta_1}{4} \|\eta\|_{\mu,2}^2. \quad (35)$$

此外, 将 (31) 式从 0 到 t 积分, 有

$$A(t) + \int_0^t B(s) ds \leq A(0). \quad (36)$$

将 (33) 和 (35) 代入 (36) 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|v\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u\|^2 + \frac{1}{m+2} \|\nabla u\|^{m+2} + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2} \|\eta\|_{\mu,2}^2 \\ & + C_4 \int_0^t \left(-\frac{\varepsilon \lambda_1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \|u(s)\|^2 ds - \varepsilon C_4 \int_0^t \|u_s\|^2 ds + C_4 \int_0^t \|\nabla u_s\|^2 ds \\ & + C_4 (2\varepsilon - \varepsilon^2) \int_0^t \|\Delta u(s)\|^2 ds + C_4 \int_0^t \|\nabla u(s)\|^{m+2} ds + \frac{C_4 \delta_1}{4} \int_0^t \|\eta\|_{\mu,2}^2 ds \\ & \leq \frac{1}{2} \|v_0\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u_0\|^2 + \frac{1}{m+2} \|\nabla u_0\|^{m+2} + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla u_0\|^2 + \frac{1}{2} \|\eta_0\|_{\mu,2}^2. \end{aligned} \quad (37)$$

注意到

$$\frac{1}{m+2} \|\nabla u\|^{m+2} + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla u\|^2 + C_4 \int_0^t \|\nabla u(s)\|^{m+2} ds + \frac{C_4 \delta_1}{4} \int_0^t \|\eta\|_{\mu,2}^2 ds > 0. \quad (38)$$

而取足够小的 ε 满足 $\varepsilon^2 + (\frac{1}{2\lambda_1} - \frac{3}{2})\varepsilon \leq 0$ 和 $0 < \varepsilon < \lambda_1^{\frac{1}{2}}$, 再运用 Poincaré 不等式可以推出

$$\begin{aligned} & C_4 \int_0^t \left(-\frac{\varepsilon \lambda_1}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \|u(s)\|^2 ds - \varepsilon C_4 \int_0^t \|u_s\|^2 ds \\ & + C_4 \int_0^t \|\nabla u_s\|^2 ds + C_4 (2\varepsilon - \varepsilon^2) \int_0^t \|\Delta u(s)\|^2 ds \geq 0. \end{aligned} \quad (39)$$

则通过 (38) 和 (39) 可知

$$\frac{1}{2} \|v\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u\|^2 + \frac{1}{2} \|\eta\|_{\mu,2}^2 \leq \frac{1}{2} \|v_0\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u_0\|^2 + \frac{1}{m+2} \|\nabla u_0\|^{m+2} + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla u_0\|^2 + \frac{1}{2} \|\eta_0\|_{\mu,2}^2. \quad (40)$$

由 Young 不等式和 Poincaré 不等式, 存在常数 $R_1 > 0$ 使得

$$\frac{1}{2} \|v_0\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u_0\|^2 + \frac{1}{m+2} \|\nabla u_0\|^{m+2} + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla u_0\|^2 + \frac{1}{2} \|\eta_0\|_{\mu,2}^2 \leq R_1. \quad (41)$$

因此, 存在常数 $C_5 > \max\{2, \frac{2\varepsilon^2}{\lambda_1} + 1\}$ 使得

$$\|u_t\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \|\eta\|_{\mu,2}^2 \leq C_5 (\|v\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \|\eta\|_{\mu,2}^2) \leq R_1. \quad (42)$$

显然, $\mathcal{B}_1 = \{(u_0, u_1, \eta_0) \in \mathcal{H} \mid \|\Delta u_0\|^2 + \|u_1\|^2 + \|\eta_0\|_{\mu,2}^2 \leq R_1\}$ 是问题 (1) 的弱解所产生的半群 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 的有界吸收集, 进一步 $\bar{\mathcal{B}} = \cup_{t \geq 0} S(t)\mathcal{B}_1$ 也是有界吸收集. 证毕. $\square$

定理 3.3 假设条件(2)-(10)成立, 则问题(13)-(15) 所产生的半群 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 在 $\mathcal{H}$ 有唯一的全局吸引子 $\mathcal{A}$.

证明 对任意的 $t \in \mathbb{R}$, 设 $(u(t), u_t(t), \eta^t(t))$ 与 $(v(t), v_t(t), \chi^t(t))$ 为问题 (1) 依赖于 $(u_0, u_1, \eta_0(\cdot))$ 与 $(v_0, v_1, \eta_0(\cdot))$ 的两个弱解. 令 $w(t) = u(t) - v(t)$, $\xi^t(\cdot) = \eta^t(\cdot) + \chi^t(\cdot)$, 则 $w(t), \xi^t(\cdot)$ 满足下列方程.

$$\begin{aligned} w_{tt} + 2\Delta^2 w - \|\nabla u\|^m \Delta u + \|\nabla v\|^m \Delta v - \Delta w_t + \int_0^\infty \mu(s) \Delta^2 \xi^t(x, s) ds \\ + \delta f(u_t) - \delta f(v_t) = g(u) - g(v) \end{aligned} \quad (43)$$

和

$$\xi_t^t = -\xi_s^t + \omega_t. \quad (44)$$

定义

$$\Gamma_\omega(t) = \frac{1}{2} \|\Delta \omega(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\omega_t(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\xi^t\|_{\mu,2}^2. \quad (45)$$

用 w 与 (43) 在 L_2 上作内积, 并从 0 到 T 积分, 有

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega w_{tt} w dx dr + \int_0^T \int_\Omega 2\Delta^2 w w dx dr - \int_0^T \int_\Omega \|\nabla u\|^m \Delta u w dx dr + \int_0^T \int_\Omega \|\nabla v\|^m \Delta v w dx dr \\ - \int_0^T \int_\Omega \Delta w_t w dx dr + \int_0^T \int_\Omega \int_0^\infty \mu(s) \Delta^2 \xi^t(x, s) w ds dx dr + \int_0^T \int_\Omega (\delta f(u_t) - \delta f(v_t)) w dx dr \\ = \int_0^T \int_\Omega (g(u) - g(v)) w dx dr. \end{aligned} \quad (46)$$

通过 (46) 可知

$$\begin{aligned} 2 \int_0^T \|\Delta w\|^2 dr = - \int_\Omega w_t(T) w(T) dx + \int_\Omega w_t(0) w(0) dx + \int_0^T \|w_t\|^2 dr \\ - \int_0^T \|\nabla u\|^m \|\nabla w\|^2 dr - \int_0^T \int_\Omega (\|\nabla u\|^m - \|\nabla v\|^m) \nabla v \nabla w dx dr - \int_0^T (\xi_t, w)_{\mu,2} dr \\ - \frac{1}{2} \|\nabla w(T)\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla w(0)\|^2 - \int_0^T \int_\Omega (\delta f(u_t) - \delta f(v_t)) w dx dr + \int_0^T \int_\Omega (g(u) - g(v)) w dx dr. \end{aligned} \quad (47)$$

通过 (15) 和 Young 不等式, 可以推出存在一个常数 $\alpha_0 > 0$, 使得

$$\left| \int_0^T (\xi^t, w)_{\mu,2} dr \right| \leq \alpha_0 \int_0^T \|\xi^t\|_{\mu,2}^2 dr + \delta_1 \int_0^T \|\Delta w\|^2 dr. \quad (48)$$

将 (48) 式代入 (47) 有

$$\begin{aligned}
2 \int_0^T \|\Delta w\|^2 dr &\leq - \int_{\Omega} w_t(T)w(T)dx + \int_{\Omega} w_t(0)w(0)dx + \int_0^T \|w_t\|^2 dr + \delta_1 \int_0^T \|\Delta w\|^2 dr \\
&\quad - \int_0^T \|\nabla u\|^m \|\nabla w\|^2 dr - \int_0^T \int_{\Omega} (\|\nabla u\|^m - \|\nabla v\|^m) \nabla v \nabla w dx dr + \alpha_0 \int_0^T \|\xi^t\|_{\mu,2}^2 dr \quad (49) \\
&\quad - \frac{1}{2} \|\nabla w(T)\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla w(0)\|^2 - \int_0^T \int_{\Omega} (\delta f(u_t) - \delta f(v_t)) w dx dr + \int_0^T \int_{\Omega} (g(u) - g(v)) w dx dr.
\end{aligned}$$

此外, 用 w_t 与 (43) 在 L_2 上作内积可得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|w_t\|^2 + \|\Delta w\|^2 + \frac{1}{2} \|\xi^t\|_{\mu,2}^2 \right) + (\xi^t, \xi_s^t)_{\mu,2} + \|\nabla w_t\|^2 \\
&\quad + \int_{\Omega} \|\nabla u\|^m \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\nabla w)^2 dx + \int_{\Omega} (\|\nabla u\|^m - \|\nabla v\|^m) \nabla v \nabla w_t dx \quad (50) \\
&\quad + \int_{\Omega} (\delta f(u_t) - \delta f(v_t)) w_t dx - \int_{\Omega} (g(u) - g(v)) w_t dx = 0.
\end{aligned}$$

将 (18) 代入 (50) 再结合 (45) 有

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \Gamma_w(t) + \frac{\delta_2}{2} \|\xi^t\|_{\mu,2}^2 + \|\nabla w_t\|^2 + \int_{\Omega} (\|\nabla u\|^m - \|\nabla v\|^m) \nabla v \nabla w_t dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \|\nabla u\|^m \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\nabla w)^2 dx + \int_{\Omega} (\delta f(u_t) - \delta f(v_t)) w_t dx - \int_{\Omega} (g(u) - g(v)) w_t dx \leq 0. \quad (51)
\end{aligned}$$

将 (51) 从 s 到 T 积分可得

$$\begin{aligned}
&\Gamma_w(T) + \frac{\delta_2}{2} \int_s^T \|\xi^t\|_{\mu,2}^2 d\tau + \int_s^T \|\nabla w_t\|^2 d\tau + \int_s^T \int_{\Omega} (\|\nabla u\|^m - \|\nabla v\|^m) \nabla v \nabla w_t dx d\tau \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u(T)\|^m (\nabla w(T))^2 dx - \frac{m}{2} \int_{\Omega} \int_s^T \|\nabla u\|^{m-1} \nabla u_t (\nabla w)^2 d\tau dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u(s)\|^m (\nabla w(s))^2 dx \\
&\quad + \int_s^T \int_{\Omega} (\delta f(u_t) - \delta f(v_t)) w_t dx d\tau - \int_s^T \int_{\Omega} (g(u) - g(v)) w_t dx d\tau \leq \Gamma_w(s). \quad (52)
\end{aligned}$$

将 (52) 从 0 到 T 积分可得

$$\begin{aligned}
&T\Gamma_w(T) + \frac{\delta_2}{2} \int_0^T \int_s^T \|\xi^t\|_{\mu,2}^2 d\tau dr + \int_0^T \int_s^T \|\nabla w_t\|^2 d\tau dr + \int_0^T \int_s^T \int_{\Omega} (\|\nabla u\|^m - \|\nabla v\|^m) \nabla v \nabla w_t dx d\tau dr \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \|\nabla u(T)\|^m (\nabla w(T))^2 dx dr - \frac{m}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \int_s^T \|\nabla u\|^{m-1} \nabla u_t (\nabla w)^2 d\tau dx dr \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \|\nabla u(s)\|^m (\nabla w(s))^2 dx dr + \int_0^T \int_s^T \int_{\Omega} (\delta f(u_t) - \delta f(v_t)) w_t dx d\tau dr \\
&\quad - \int_0^T \int_s^T \int_{\Omega} (g(u) - g(v)) w_t dx d\tau dr \leq \int_0^T \Gamma_w(s) dr. \quad (53)
\end{aligned}$$

显然

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \|\nabla u(T)\|^m (\nabla w(T))^2 dx dr + \frac{\delta_2}{2} \int_0^T \int_s^T \|\xi^t\|_{\mu,2}^2 d\tau dr + \int_0^T \int_s^T \|\nabla w_t\|^2 d\tau dr \geq 0. \quad (54)$$

通过(3)-(5) 可知, 存在常数 $C_{\delta,L} > 0$, 使得

$$\int_0^T \int_s^T \int_{\Omega} (\delta f(u_t) - \delta f(v_t)) w_t dx d\tau dr \geq C_{\delta,L} \int_0^T \int_s^T \int_{\Omega} w_t^2 dx d\tau dr \geq 0. \quad (55)$$

结合 (53)-(55), 可得

$$\begin{aligned} T\Gamma_w(T) &\leq \int_0^T \Gamma_w(s) dr + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \|\nabla u(s)\|^m (\nabla w(s))^2 dx dr + \frac{m}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \int_s^T \|\nabla u\|^{m-1} \nabla u_t (\nabla w)^2 d\tau dx dr \\ &\quad - \int_0^T \int_s^T \int_{\Omega} (\|\nabla u\|^m - \|\nabla v\|^m) \nabla v \nabla w_t dx d\tau dr + \int_0^T \int_s^T \int_{\Omega} (g(u) - g(v)) w_t dx d\tau dr. \end{aligned} \quad (56)$$

此外, 将 51 式从 0 到 T 积分有

$$\begin{aligned} \Gamma_w(T) &+ \frac{\delta_2}{2} \int_0^T \|\xi^t\|_{\mu,2}^2 dr + \int_0^T \|\nabla w_t\|^2 dr + \int_0^T \int_{\Omega} (\|\nabla u\|^m - \|\nabla v\|^m) \nabla v \nabla w_t dx dr \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u(T)\|^m (\nabla w(T))^2 dx - \frac{m}{2} \int_{\Omega} \int_0^T \|\nabla u\|^{m-1} \nabla u_t (\nabla w)^2 dr dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u(0)\|^m (\nabla w(0))^2 dx \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} (\delta f(u_t) - \delta f(v_t)) w_t dx dr - \int_0^T \int_{\Omega} (g(u) - g(v)) w_t dx dr \leq \Gamma_w(0). \end{aligned} \quad (57)$$

通过 (3)-(5), 可知存在常数 $\tilde{C}_{\delta} > 0$, 使得

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\delta f(u_t) - \delta f(v_t)) w_t dx dr \geq \tilde{C}_{\delta} + \int_0^T \|w_t\|^2 dr. \quad (58)$$

将 (58) 式代入 (57) 得

$$\begin{aligned} \Gamma_w(T) &+ \int_0^T \|w_t\|^2 dr + \frac{\delta_2}{2} \int_0^T \|\xi^t\|_{\mu,2}^2 dr + \int_0^T \|\nabla w_t\|^2 dr \\ &\leq - \int_0^T \int_{\Omega} (\|\nabla u\|^m - \|\nabla v\|^m) \nabla v \nabla w_t dx dr - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u(T)\|^m (\nabla w(T))^2 dx \\ &\quad + \frac{m}{2} \int_{\Omega} \int_0^T \|\nabla u\|^{m-1} \nabla u_t (\nabla w)^2 dr dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u(0)\|^m (\nabla w(0))^2 dx \\ &\quad - \tilde{C}_{\delta} - \int_0^T \int_{\Omega} (g(u) - g(v)) w_t dx dr + \Gamma_w(0). \end{aligned} \quad (59)$$

由 $\Gamma_w(T) + \int_0^T \|\nabla w_t\|^2 dr \geq 0$ 与 (59) 式可知, 存在 $\tilde{C}_{2,\delta} > 0$, 使得

$$\begin{aligned}
 & 2 \int_0^T \|w_t\|^2 dr + \delta_2 \int_0^T \|\xi^t\|_{\mu,2}^2 dr \\
 & \leq -\tilde{C}_{2,\delta} \int_0^T \int_{\Omega} (\|\nabla u\|^m - \|\nabla v\|^m) \nabla v \nabla w_t dx dr - \frac{\tilde{C}_{2,\delta}}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u(T)\|^m (\nabla w(T))^2 dx \\
 & \quad + \frac{m\tilde{C}_{2,\delta}}{2} \int_{\Omega} \int_0^T \|\nabla u\|^{m-1} \nabla u_t (\nabla w)^2 dr dx + \frac{\tilde{C}_{2,\delta}}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u(0)\|^m (\nabla w(0))^2 dx \\
 & \quad + \tilde{C}_{2,\delta} \int_0^T \int_{\Omega} (g(u) - g(v)) w_t dx dr - \tilde{C}_{2,\delta} \tilde{C}_{\delta} + \tilde{C}_{2,\delta} \Gamma_w(0).
 \end{aligned} \tag{60}$$

结合 (45), (49) 与 (60), 可以推出

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \Gamma_w(t) dr \leq (2 - \delta_1) \int_0^T \|\Delta w\|^2 dr + \int_0^T \|w_t\|^2 dr + (1 - \alpha_0) \int_0^T \|\xi_{\mu,2}^t\|^2 dr \\
 & \leq -\tilde{C}_{2,\delta} \int_0^T \int_{\Omega} (\|\nabla u\|^m - \|\nabla v\|^m) \nabla v \nabla w_t dx dr - \frac{\tilde{C}_{2,\delta}}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u(T)\|^m (\nabla w(T))^2 dx \\
 & \quad + \frac{m\tilde{C}_{2,\delta}}{2} \int_{\Omega} \int_0^T \|\nabla u\|^{m-1} \nabla u_t (\nabla w)^2 dr dx + \frac{\tilde{C}_{2,\delta}}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u(0)\|^m (\nabla w(0))^2 dx \\
 & \quad + \tilde{C}_{2,\delta} \int_0^T \int_{\Omega} (g(u) - g(v)) w_t dx dr - \tilde{C}_{2,\delta} \tilde{C}_{\delta} + \tilde{C}_{2,\delta} \Gamma_w(0) - \int_0^T \|\nabla u\|^m \|\nabla w\|^2 dr \\
 & \quad - \int_{\Omega} w_t(T) w(T) dx + \int_{\Omega} w_t(0) w(0) dx - \int_0^T \int_{\Omega} (\|\nabla u\|^m - \|\nabla v\|^m) \nabla v \nabla w dx dr \\
 & \quad - \frac{1}{2} \|\nabla w(T)\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla w(0)\|^2 - \int_0^T \int_{\Omega} (\delta f(u_t) - \delta f(v_t)) w dx dr + \int_0^T \int_{\Omega} (g(u) - g(v)) w dx dr.
 \end{aligned} \tag{61}$$

运用 Hölder 不等式, 再结合 (5) 式和 (22) 式, 可得

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^T \delta f(u_t) w dx dr \right| & \leq \delta \left(\int_0^T \int_{\Omega} |f(u_t)|^{\frac{p+1}{p}} dx dr \right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_0^T \int_{\Omega} |w|^{p+1} dx dr \right)^{\frac{1}{p+1}} \\
 & \leq \delta C_{p_1} \left(\int_0^T \int_{\Omega} (1 + |f(u_t)| |u_t|) dx dr \right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_0^T \int_{\Omega} |w|^{p+1} dx dr \right)^{\frac{1}{p+1}} \\
 & \leq \tilde{C}_{\delta,p_1} C_{p_1} C_{\beta_1} \left(\int_0^T \int_{\Omega} |w|^{p+1} dx dr \right)^{\frac{1}{p+1}}.
 \end{aligned} \tag{62}$$

同理

$$\left| \int_0^T \delta f(v_t) w dx dr \right| \leq \tilde{C}_{\delta,p_1} C_{p_1} C_{\beta_1} \left(\int_0^T \int_{\Omega} |w|^{p+1} dx dr \right)^{\frac{1}{p+1}}. \tag{63}$$

通过 (62) 和 (63), 有

$$\left| \int_0^T \int_{\Omega} (\delta f(u_t) - \delta f(v_t)) w dx dr \right| \leq 2\tilde{C}_{\delta, p_1} C_{p_1} C_{\beta_1} \left(\int_0^T \int_{\Omega} |w|^{p+1} dx dr \right)^{\frac{1}{p+1}}. \quad (64)$$

将 (64) 式代入 (61) 式可得

$$\begin{aligned} \int_0^T \Gamma_w(t) dr &\leq -\tilde{C}_{2,\delta} \int_0^T \int_{\Omega} (\|\nabla u\|^m - \|\nabla v\|^m) \nabla v \nabla w_t dx dr \\ &+ \frac{m\tilde{C}_{2,\delta}}{2} \int_{\Omega} \int_0^T \|\nabla u\|^{m-1} \nabla u_t (\nabla w)^2 dr dx + \frac{\tilde{C}_{2,\delta}}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u(0)\|^m (\nabla w(0))^2 dx \\ &+ \tilde{C}_{2,\delta} \int_0^T \int_{\Omega} (g(u) - g(v)) w_t dx dr - \tilde{C}_{2,\delta} \tilde{C}_{\delta} + \tilde{C}_{2,\delta} \Gamma_w(0) - \int_0^T \|\nabla u\|^m \|\nabla w\|^2 dr \\ &- \int_{\Omega} w_t(T) w(T) dx + \int_{\Omega} w_t(0) w(0) dx - \int_0^T \int_{\Omega} (\|\nabla u\|^m - \|\nabla v\|^m) \nabla v \nabla w dx dr \\ &- \frac{1}{2} \|\nabla w(T)\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla w(0)\|^2 - \frac{\tilde{C}_{2,\delta}}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u(T)\|^m (\nabla w(T))^2 dx \\ &+ 2\tilde{C}_{\delta, p_1} C_{p_1} C_{\beta_1} \left(\int_0^T \int_{\Omega} |w|^{p+1} dx dr \right)^{\frac{1}{p+1}} + \int_0^T \int_{\Omega} (g(u) - g(v)) w dx dr. \end{aligned} \quad (65)$$

注意到 $0 < s < t < T$, 因此结合 (56) 和 (65) 可以推出

$$\begin{aligned} T\Gamma_w(T) &\leq -\tilde{C}_{2,\delta} \int_0^T \int_{\Omega} (\|\nabla u\|^m - \|\nabla v\|^m) \nabla v \nabla w_t dx dr \\ &+ \frac{m\tilde{C}_{2,\delta}}{2} \int_{\Omega} \int_0^T \|\nabla u\|^{m-1} \nabla u_t (\nabla w)^2 dr dx + \frac{\tilde{C}_{2,\delta}}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u(0)\|^m (\nabla w(0))^2 dx \\ &+ \tilde{C}_{2,\delta} \int_0^T \int_{\Omega} (g(u) - g(v)) w_t dx dr - \tilde{C}_{2,\delta} \tilde{C}_{\delta} + \tilde{C}_{2,\delta} \Gamma_w(0) - \int_0^T \|\nabla u\|^m \|\nabla w\|^2 dr \\ &- \int_{\Omega} w_t(T) w(T) dx + \int_{\Omega} w_t(0) w(0) dx - \int_0^T \int_{\Omega} (\|\nabla u\|^m - \|\nabla v\|^m) \nabla v \nabla w dx dr \\ &- \frac{1}{2} \|\nabla w(T)\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla w(0)\|^2 - \frac{\tilde{C}_{2,\delta}}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u(T)\|^m (\nabla w(T))^2 dx \\ &+ 2\tilde{C}_{\delta, p_1} C_{p_1} C_{\beta_1} \left(\int_0^T \int_{\Omega} |w|^{p+1} dx dr \right)^{\frac{1}{p+1}} + \int_0^T \int_{\Omega} (g(u) - g(v)) w dx dr \\ &\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \|\nabla u(s)\|^m (\nabla w(s))^2 dx dr + \frac{m}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \int_s^T \|\nabla u\|^{m-1} \nabla u_t (\nabla w)^2 d\tau dx dr \\ &- \int_0^T \int_s^T \int_{\Omega} (\|\nabla u\|^m - \|\nabla v\|^m) \nabla v \nabla w_t dx d\tau dr + \int_0^T \int_s^T \int_{\Omega} (g(u) - g(v)) w_t dx d\tau dr. \end{aligned} \quad (66)$$

由 (66) 可知

$$\Gamma_w(t) \leq C_\Gamma + \Phi_T\left((u_0, u_1, \eta_0(\cdot)), (v_0, v_1, \chi_0(\cdot))\right). \quad (67)$$

其中

$$\begin{aligned} C_\Gamma = & -\frac{\tilde{C}_{2,\delta}}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u(T)\|^m (\nabla w(T))^2 dx + \frac{\tilde{C}_{2,\delta}}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u(0)\|^m (\nabla w(0))^2 dx \\ & - \tilde{C}_{2,\delta} \tilde{C}_\delta + \tilde{C}_{2,\delta} \Gamma_w(0) - \int_{\Omega} w_t(T) w(T) dx \\ & + \int_{\Omega} w_t(0) w(0) dx - \frac{1}{2} \|\nabla w(T)\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla w(0)\|^2 \end{aligned} \quad (68)$$

和

$$\begin{aligned} \Phi_T\left((u_0, u_1, \eta_0(\cdot)), (v_0, v_1, \chi_0(\cdot))\right) = & -\tilde{C}_{2,\delta} \int_0^T \int_{\Omega} (\|\nabla u\|^m - \|\nabla v\|^m) \nabla v \nabla w_t dx dr \\ & + \frac{m\tilde{C}_{2,\delta}}{2} \int_{\Omega} \int_0^T \|\nabla u\|^{m-1} \nabla u_t (\nabla w)^2 dr dx - \int_0^T \int_{\Omega} (\|\nabla u\|^m - \|\nabla v\|^m) \nabla v \nabla w dx dr \\ & + \tilde{C}_{2,\delta} \int_0^T \int_{\Omega} (g(u) - g(v)) w_t dx dr - \int_0^T \|\nabla u\|^m \|\nabla w\|^2 dr \\ & + 2\tilde{C}_{\delta,p_1} C_{p_1} C_{\beta_1} \left(\int_0^T \int_{\Omega} |w|^{p+1} dx dr \right)^{\frac{1}{p+1}} + \int_0^T \int_{\Omega} (g(u) - g(v)) w dx dr \\ & \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \|\nabla u(s)\|^m (\nabla w(s))^2 dx dr + \frac{m}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \int_s^T \|\nabla u\|^{m-1} \nabla u_t (\nabla w)^2 d\tau dx dr \\ & - \int_0^T \int_s^T \int_{\Omega} (\|\nabla u\|^m - \|\nabla v\|^m) \nabla v \nabla w_t dx d\tau dr + \int_0^T \int_s^T \int_{\Omega} (g(u) - g(v)) w_t dx d\tau dr. \end{aligned} \quad (69)$$

由定理3.2 可知, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\frac{2\Gamma_w}{T} \leq \varepsilon \quad (T \rightarrow \infty). \quad (70)$$

结合引理2.4, 现只需证 $\Phi_T(\cdot, \cdot)$ 是一个压缩函数, 为此, 令 (u_n, u'_n, η_n) 是问题 (13)-(15) 对应于初值 $(u_0^n, u_1^n, \eta_0^n) \in \mathcal{H}$ 的解, 于是依据 Alaoglu [15] 定理, 不失一般性, 我们可以在此作出如下假设

$$u_n \text{ 在空间 } L^2(0, T; V_2) \text{ 中弱*收敛于 } u, \quad (71)$$

$$\partial_t u_n \text{ 在空间 } L^2(0, T; L^2) \text{ 中弱*收敛于 } \partial_t u, \quad (72)$$

$$u_n \text{ 在空间 } L^2(0, T; L^2) \text{ 中强收敛于 } u, \quad (73)$$

$$u_n \text{ 在空间 } L^{p+1}(0, T; L^{p+1}) \text{ 中强收敛于 } u, \quad (74)$$

其中 $V_2 \hookrightarrow L^{p+1}$.

下面估计 (69) 中的每一项. 首先, 依据 (71)-(74) 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} \|\nabla u_n\|^{m-1} (\nabla \partial_t u_n) (\nabla u_n - \nabla u_m)^2 dx dr = 0, \quad (75)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} (\|\nabla u_n\|^m - \|\nabla u_m\|^m) \nabla u_m (\nabla \partial_t u_n - \nabla \partial_t u_m) dx dr = 0, \quad (76)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} \|\nabla u_n\|^m (\nabla u_n - \nabla u_m)^2 dx dr = 0, \quad (77)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} (\|\nabla u_n\|^m - \|\nabla u_m\|^m) \nabla u_m (\nabla u_n - \nabla u_m) dx dr = 0. \quad (78)$$

此外, 通过 (73)-(74) 可以得出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\int_0^T \int_{\Omega} |u_m - u_n|^{p+1} dx dr \right)^{\frac{1}{p+1}} = 0. \quad (79)$$

结合 (6) (7) 和 (72) 可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} (g(u_n) - g(u_m)) (\partial_t u_n - \partial_t u_m) dx dr = 0 \quad (80)$$

和

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\Omega} (g(u_n) - g(u_m)) (u_n - u_m) dx dr = 0. \quad (81)$$

对于每个固定的 t , 通过lebesgue 控制收敛定理 [16], 可得

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \int_s^T \int_{\Omega} (g(u_n) - g(u_m)) (\partial_t u_n - \partial_t u_m) dx d\tau dr \\ &= \int_0^T \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_s^T \int_{\Omega} (g(u_n) - g(u_m)) (\partial_t u_n - \partial_t u_m) dx d\tau \right) dr = 0. \end{aligned} \quad (82)$$

同理

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \int_s^T \int_{\Omega} (\|\nabla u\|^m - \|\nabla v\|^m) \nabla v \nabla w_t dx d\tau dr \\ &= \int_0^T \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_s^T \int_{\Omega} (\|\nabla u\|^m - \|\nabla v\|^m) \nabla v \nabla w_t dx d\tau \right) dr = 0 \end{aligned} \quad (83)$$

和

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \int_s^T \int_{\Omega} \|\nabla u\|^{m-1} \nabla u_t (\nabla w)^2 dx d\tau dr \\ &= \int_0^T \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_s^T \int_{\Omega} \|\nabla u\|^{m-1} \nabla u_t (\nabla w)^2 dx d\tau \right) dr = 0. \end{aligned} \quad (84)$$

综上所述, 可以知道 $\Phi_T(\cdot, \cdot)$ 为 $\mathcal{H}$ 上的收缩函数.

从而由定理2.4 可得到, 问题 (1) 对应的动力系统 $(\mathcal{H}, S(t))$ 在 $\mathcal{H}$ 中存在全局吸引子. 证毕.□

基金项目

国家自然科学基金项目(11961059, 12101502); 高校教师创新基金项目(2023B-062)。

参考文献

- [1] Giorgi, C., Muñoz Rivera, J.E. and Pata, V. (2001) Global Attractors for a Semilinear Hyperbolic Equation in Viscoelasticity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **260**, 83-99. <https://doi.org/10.1006/jmaa.2001.7437>
- [2] Woinowsky-Krieger, S. (1950) The Effect of an Axial Force on the Vibration of Hinged Bars. *Journal of Applied Mechanics*, **17**, 35-36. <https://doi.org/10.1115/1.4010053>
- [3] Ball, J.M. (1973) Initial-Boundary Value Problems for an Extensible Beam. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **42**, 61-90. [https://doi.org/10.1016/0022-247x\(73\)90121-2](https://doi.org/10.1016/0022-247x(73)90121-2)
- [4] Dickey, R.W. (1970) Free Vibrations and Dynamic Buckling of the Extensible Beam. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **29**, 443-454. [https://doi.org/10.1016/0022-247x\(70\)90094-6](https://doi.org/10.1016/0022-247x(70)90094-6)
- [5] Durand Lazo, P.P. (2011) Global Solution for a Quasilinear Wave Equation with Singular Memory. *Applied Mathematics and Computation*, **217**, 7660-7668. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.02.069>
- [6] Park, J.Y. and Kang, J.R. (2010) Global Attractor for Hyperbolic Equation with Nonlinear Damping and Linear Memory. *Science China Mathematics*, **53**, 1531-1539. <https://doi.org/10.1007/s11425-010-3110-z>
- [7] Yang, B., Qin, Y., Miranville, A. and Wang, K. (2024) Existence and Regularity of Global Attractors for a Kirchhoff Wave Equation with Strong Damping and Memory. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **79**, Article 104096. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2024.104096>
- [8] Yao, X. and Ma, Q. (2017) Global Attractors of the Extensible Plate Equations with Nonlinear Damping and Memory. *Journal of Function Spaces*, **2017**, 1-10. <https://doi.org/10.1155/2017/4896161>
- [9] Robinson, J.C. (2011) Infinite-Dimensional Dynamical Systems. Cambridge University Press.
- [10] Qin, Y. and Su, K. (2022) Attractors for Nonlinear Autonomous Dynamical Systems. EDP Sciences.
- [11] Hale, J.K. (1988) Asymptotic Behaviour of Dissipative Systems. In: *Mathematical Surveys and Monographs*, Vol. 25.
- [12] Qin, Y. (2016) Integral and Discrete Inequalities and Their Applications. Vol. I. Springer International Publishing AG.
- [13] Qin, Y. (2016) Integral and Discrete Inequalities and Their Applications. Vol. II. Springer International Publishing AG.
- [14] Qin, Y. (2017) Analytic Inequalities and Their Applications in PDEs. Birkhauser Verlag AG.

-
- [15] Lions, J.L. (1969) Quelques Méthodes de Résolutions des Problms aus Limites Nonlinéaires. Dunod Gauthier-Villars.
- [16] Evans, L.C. (1998) Partial Differential Equations. American Mathematical Society.
- [17] 张素丽. 几类粘弹性模型的长时间动力学行为研究[D]: [博士学位论文]. 太原: 太原理工大学, 2023.