Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(10), 4695-4703
Published Online October 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.1310450

2×2 上三角型算子矩阵的闭值域性问题研究

包木其尔[1]，吴德玉[1*]，吴晓红[2]

[1]内蒙古大学数学科学学院，内蒙古 呼和浩特
[2]呼和浩特民族学院数学与大数据学院，内蒙古 呼和浩特

收稿日期：2024年9月25日；录用日期：2024年10月17日；发布日期：2024年10月30日

摘 要

设 H_1 和 H_2 是无穷维可分的 $Hilbert$ 空间，记$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$为 $H_1 \bigoplus H_2$ 上的上三角型算子矩阵．本文基于空间分解法，利用矩阵元 A，B，C 的值域和零空间性质研究了算子矩阵 M 的值域闭性，并给出了 $\rho_{cr}(M) = \rho_{cr}(A) \bigcap \rho_{cr}(B)$ 成立的条件，其中 $\rho_{cr}(M) = \{\lambda \in \mathbb{C} : R(M - \lambda I) = \overline{R(M - \lambda I)}\}$.

关键词

空间分解法，值域，零空间

Research on Closedness Range of 2×2 Upper Triangular Operator Matrices

Muqi'er Bao[1], Deyu Wu[1*], Xiaohong Wu[2]

[1]School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot Inner Mongolia
[2]School of Mathematics and Big Data, Hohhot Minzu College, Hohhot Inner Mongolia

* 通讯作者。

文章引用: 包木其尔, 吴德玉, 吴晓红. 2×2 上三角型算子矩阵的闭值域性[J]. 应用数学进展, 2024, 13(10): 4695-4703. DOI: 10.12677/aam.2024.1310450

Received: Sep. 25^{th}, 2024; accepted: Oct. 17^{th}, 2024; published: Oct. 30^{th}, 2024

Abstract

Let H_1 and H_2 be infinite dimensional separable *Hilbert* spaces and $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ be a 2×2 upper triangular operator matrix acting on $H_1 \bigoplus H_2$. In this paper, the closedness of the range $R(M)$ is described by using the range and the null spaces of A, B, C and the spatial decomposition method. In addition, the conditions under which $\rho_{cr}(M) = \rho_{cr}(A) \bigcap \rho_{cr}(B)$ holds are given, where $\rho_{cr}(M) = \{\lambda \in \mathbb{C} : R(M-\lambda I) = \overline{R(M-\lambda I)}\}$.

Keywords

The Spatial Decomposition Method, The Range, The Null Spaces

1. 引言

算子矩阵理论是算子理论中较为活跃的研究领域之一．众所周知，算子矩阵是以算子为元素的矩阵．从理论上来说，若 M 是 $Hilbert$ 空间 H 的闭子空间且 T 是 $Hilbert$ 空间 H 上的有界线性算子，则 $H = M \bigoplus M^{\perp}$ 且算子 T 具有矩阵形式

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} : M \bigoplus M^{\perp} \to M \bigoplus M^{\perp}.$$

特别地，若 M 是 T 的非平凡的不变子空间，则 $T_{21} = 0$，从而 T 具有上三角型算子矩阵形式 [1]. 此时，算子 T 的研究问题都可以转化成算子矩阵的问题．另一方面，算子矩阵值域闭性是算子的重要性质之一，$Hilbert$ 空间中有界线性算子值域闭当且仅当它具有 $Moore-Penrose$ 广义逆，而 $Moore-Penrose$ 广义逆在求解线性方程组方面有着独特的优势．设 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$，$b \in \mathbb{C}^m$，则线性方程组 $Ax = b$ 有解的充分必要条件是

$$AA^{+}b = b$$

且有解时

$$x = A^{+}b + (I - A^{+}A)y.$$

其中 A^{+} 是 A 的 $Moore-Penrose$ 广义逆，$y \in \mathbb{C}^{n}$ 是任意的 [2]. 因此, 算子矩阵值域闭性是算子研究中非常受关注的课题，它是进一步研究算子矩阵可逆性与 $Moore-Penrose$ 广义逆, $Fredholm$ 性, $Kato$ 非奇异性等性质时所需要解决的一个重要问题. 目前研究上三角型缺项算子矩阵值域闭性的相关讨论比较多. 例如，在文献 [3]中研究了 2×2 上三角缺项算子矩阵的闭值域谱补问题．在文献 [4]中研究了 3×3 上三角缺项算子矩阵的闭值域谱问题．此外，人们对关于缺项算子矩阵的闭值域进行了各种研究 [5–8]．但关于上三角型算子矩阵值域闭性的讨论还比较少．因此, 本文的主要目的是利用空间分解法，针对分解出的算子矩阵，借助其特性讨论了原算子矩阵的值域闭性，并给出了

$$\rho_{cr}(M) = \rho_{cr}(A)\bigcap\rho_{cr}(B)$$

成立的条件, 其中 $\rho_{cr}(M) = \{\lambda \in \mathbb{C} R(M-\lambda I) = \overline{R(M-\lambda I)}\}$.

2. 预备知识

设 H_1 和 H_2 是无穷维可分的 $Hilbert$ 空间. $\mathscr{B}(H_i,H_j)(i,j=1,2,3)$ 表示从 H_i 到 H_j 的所有有界线性算子构成的 $Banach$ 代数. $\mathscr{B}(H_i,H_i)$ 简记为 $\mathscr{B}(H_i)$. 若 $T\in\mathscr{B}(H_i,H_j)$，用 T^{*}，$N(T)$ 和 $R(T)$ 表示算子 T 的共轭算子, 零空间和值域空间. 用 $n(T)$ 和 $d(T)$ 分别表示 $N(T)$ 和 $R(T)^{\perp}$ 的维数，即 $n(T)=\dim N(T)$，$d(T)=\dim R(T)^{\perp}$. 对于 $T\in\mathscr{B}(H_i,H_j)$, 令

$$\rho_{cr}(T) = \{\lambda\in\mathbb{C} : R(T-\lambda I) = \overline{R(T-\lambda I)}\};$$

$$\rho_{d}(T) = \{\lambda\in\mathbb{C} : d(T-\lambda I) < \infty\};$$

$$\rho_{n}(T) = \{\lambda\in\mathbb{C} : n(T-\lambda I) < \infty\}.$$

设 $A\in\mathscr{B}(H_1)$，$B\in\mathscr{B}(H_2)$ 和 $C\in\mathscr{B}(H_2,H_1)$ 为给定算子, 用 M 表示 2×2 上三角型算子矩阵

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} : H_1\bigoplus H_2 \to H_1\bigoplus H_2.$$

为证明本文的主要结果，先给出如下定义及引理.

定义 1. 设 $T\in B(H_1)$，称

$$\gamma(T) = \begin{cases} \min\{\|Tx\| : dist(x,N(T)) = 1\} & ,T\neq 0 \\ 0 & ,T = 0 \end{cases}$$

为 T 的约化极小模.

注 1. *[8]* $\gamma(T)>0$ 当且仅当 $R(T)$ 闭.

引理 1. *[9] 如果 $M \in \mathscr{B}(H_1 \bigoplus H_2)$ 具有矩阵形式*

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} : H_1 \bigoplus H_2 \to H_1 \bigoplus H_2,$$

且 A 的值域在 H_1 中稠密, $B \neq 0$, 则 $\gamma(M) \leqslant \gamma(B)$.

利用引理 1, 容易得出下面的引理 2.

引理 2. 设 $A \in \mathscr{B}(H_1)$, $\mathscr{B} \in B(H_2)$ 和 $C \in \mathscr{B}(H_2, H_1)$ 为给定算子, $\overline{R(A)} = H_1$. 如果 $R(M)$ 闭, 则 $R(B)$ 闭.

证明 $R(M)$ 闭当且仅当 $\gamma(M) > 0$, 由引理 1 可知 $\gamma(B) > 0$, 因此 $R(B)$ 闭.

引理 3. *[10, 11] 对于线性算子 T, S, $A \in \mathscr{B}(H_1)$, 有下列结论成立;*
(1)如果 A 是有限秩算子, 则 $R(T + A)$ 闭当且仅当 $R(T)$ 闭;
(2)如果 S 和 A 是可逆算子, 则 $R(STA)$ 闭当且仅当 $R(T)$ 闭;
(3)如果 $n(S) < \infty$, 且 A 是可逆算子, 则 $R(SAT)$ 闭当且仅当 $R(T)$ 闭.

引理 4. *[10] 设 X 和 Y 是 Banach 空间, $T \in \mathscr{B}(X, Y)$, $F \subset Y$ 是有限维子空间. 如果 $R(T) + F$ 是闭的, 则 $R(T)$ 是闭的.*

3. 主要结果及其证明

定理 1. 设$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$是 $H_1 \bigoplus H_2$ 上的 2×2 有界上三角型算子矩阵, 如果 B 是左半 *Fredholm* 算子, 则 $R(M)$ 与 $R(A)$ 的闭性一致.

证明 M 作为从 $N(A) \bigoplus N(A)^{\perp} \bigoplus N(B) \bigoplus N(B)^{\perp}$ 到 $\overline{R(A)} \bigoplus R(A)^{\perp} \bigoplus R(B) \bigoplus R(B)^{\perp}$ 的算子, 有如下矩阵形式

$$M = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & C_1 & C_2 \\ 0 & 0 & C_3 & C_4 \\ 0 & 0 & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} N(A) \\ N(A)^{\perp} \\ N(B) \\ N(B)^{\perp} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \overline{R(A)} \\ R(A)^{\perp} \\ R(B) \\ R(B)^{\perp} \end{pmatrix}.$$

$R(M)$ 与 $R(M_1)$ 闭性一致. 其中

$$M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & C_1 & C_2 \\ 0 & C_3 & C_4 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}.$$

容易知道 B_1 可逆, 因此存在 $\overline{R(A)} \bigoplus R(A)^{\perp} \bigoplus R(B)$ 上的可逆算子

$$E = \begin{pmatrix} I & 0 & -C_2 B_1^{-1} \\ 0 & I & -C_4 B_1^{-1} \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

使得

$$E\begin{pmatrix} A_1 & C_1 & C_2 \\ 0 & C_3 & C_4 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & C_1 & 0 \\ 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}.$$

利用 E 的可逆性，$R(M_1)$ 与 $R(M_2)$ 闭性一致．其中

$$M_2 = \begin{pmatrix} A_1 & C_1 \\ 0 & C_3 \end{pmatrix}.$$

注意到 $n(B) < \infty$，可知 $R(C_3)$ 是闭的．M_2 在空间分解 $N(A)^{\perp} \bigoplus N(C_3) \bigoplus N(C_3)^{\perp} \bigcap N(B)$ 到 $\overline{R(A)} \bigoplus R(C_3) \bigoplus R(C_3)^{\perp} \bigcap R(A)^{\perp}$ 下有如下矩阵形式

$$M_2 = \begin{pmatrix} A_1 & C_{11} & C_{12} \\ 0 & 0 & C_{31} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} N(A)^{\perp} \\ N(C_3) \\ N(C_3)^{\perp} \bigcap N(B) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \overline{R(A)} \\ R(C_3) \\ R(C_3)^{\perp} \bigcap R(A)^{\perp} \end{pmatrix}.$$

C_{31} 可逆，因此 $R(M_2)$ 与 $R(\begin{pmatrix} A_1 & C_{11} \end{pmatrix})$ 的闭性一致．考虑到 C_{11} 是有限秩算子，由引理 3，$R(M_2)$ 与 $R(A_1)$ 的闭性一致．因此 $R(M)$ 与 $R(A)$ 的闭性一致.□

定理 2. 设$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$是 $H_1 \bigoplus H_2$ 上的 2×2 有界上三角型算子矩阵，如果 A 是右半 *Fredholm* 算子，则 $R(M)$ 与 $R(B)$ 闭性一致．

证明 与定理 1 证明类似. □

定理 3. 设$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$是 $H_1 \bigoplus H_2$ 上的 2×2 有界上三角型算子矩阵，C 可逆，如果 $R(M)$ 不闭，则 $\dim \overline{R(B)} = \infty$.

证明 反证法． 假设 $\dim \overline{R(B)} < \infty$，$M$ 作为从 $N(A) \bigoplus N(A)^{\perp} \bigoplus N(C) \bigoplus N(C)^{\perp}$ 到 $R(C) \bigoplus R(C)^{\perp} \bigoplus R(B) \bigoplus R(B)^{\perp}$ 的算子，有如下矩阵形式

$$M = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 & C_1 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} N(A) \\ N(A)^{\perp} \\ N(C) \\ N(C)^{\perp} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} R(C) \\ R(C)^{\perp} \\ R(B) \\ R(B)^{\perp} \end{pmatrix}.$$

此时 A_2 和 B_1 可看作是零算子．容易知道 C_1 可逆，可知 $R(M)$ 与 $R(-B_2C_1^{-1}A_1)$ 闭性一致．考虑到 $\dim R(B) < \infty$，因此 $R(-B_2C_1^{-1}A_1)$ 是闭的．于是 $R(M)$ 闭，这与 $R(M)$ 不闭矛盾. □

注 2. 定理 3 中 $R(M)$ 闭时，$\overline{R(B)}$ 的维数可能是有限，也可能是无穷．而 $R(M)$ 不闭时，$\overline{R(B)}$ 的维数必须是无穷．

定理 4. 设$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$是 $H_1 \bigoplus H_2$ 上的 2×2 有界上三角型算子矩阵，如果满足下列条件：

(i) $\rho_{cr}(B) \subset \rho_d(A)$;

(ii) $0\in\rho_{cr}(C_3)$ 蕴含 $0\in\rho_n(C_3)\bigcap\rho_n(C_3^*)$.

则 $\rho_{cr}(M)=\rho_{cr}(A)\bigcap\rho_{cr}(B)$.

其中 $C_3=P\mid_{R(A-\lambda I)^\perp}C\mid_{N(B-\lambda I)}$，$C_3^*=P\mid_{N(B-\lambda I)}C^*\mid_{R(A-\lambda I)^\perp}$.

证明 先证 $\rho_{cr}(A)\bigcap\rho_{cr}(B)\subset\rho_{cr}(M)$. 设 $\lambda\in(\rho_{cr}(A)\bigcap\rho_{cr}(B))$，易知 $R(A-\lambda I)$ 闭且 $R(B-\lambda I)$ 闭. $M-\lambda I$ 作为从 $N(A-\lambda I)\bigoplus N(A-\lambda I)^\perp\bigoplus N(B-\lambda I)\bigoplus N(B-\lambda I)^\perp$ 到 $R(A-\lambda I)\bigoplus R(A-\lambda I)^\perp\bigoplus R(B-\lambda I)\bigoplus R(B-\lambda I)^\perp$ 的算子，有如下矩阵形式

$$M-\lambda I=\begin{pmatrix}0&A_{1\lambda}&C_1&C_2\\0&0&C_3&C_4\\0&0&0&B_{1\lambda}\\0&0&0&0\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}N(A-\lambda I)\\N(A-\lambda I)^\perp\\N(B-\lambda I)\\N(B-\lambda I)^\perp\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}R(A-\lambda I)\\R(A-\lambda I)^\perp\\R(B-\lambda I)\\R(B-\lambda I)^\perp\end{pmatrix}.$$

容易知道 $A_{1\lambda}$ 和 $B_{1\lambda}$ 可逆，因此 $R(M-\lambda I)$ 与 $R(C_3)$ 闭性一致. 由条件 (i) 可知，C_3 是有限秩算子，$R(C_3)$ 是闭的. 因此 $R(M-\lambda I)$ 闭，即 $\lambda\in\rho_{cr}(M)$.

反之, 设 $\lambda\in\rho_{cr}(M)$. 此时 $R(M-\lambda I)$ 闭. $M-\lambda I$ 作为从 $N(A-\lambda I)\bigoplus N(A-\lambda I)^\perp\bigoplus N(B-\lambda I)\bigoplus N(B-\lambda I)^\perp$ 到 $\overline{R(A-\lambda I)}\bigoplus R(A-\lambda I)^\perp\bigoplus\overline{R(B-\lambda I)}\bigoplus R(B-\lambda I)^\perp$ 的算子，有如下矩阵形式

$$M-\lambda I=\begin{pmatrix}0&A_{1\lambda}&C_1&C_2\\0&0&C_3&C_4\\0&0&0&B_{1\lambda}\\0&0&0&0\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}N(A-\lambda I)\\N(A-\lambda I)^\perp\\N(B-\lambda I)\\N(B-\lambda I)^\perp\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\overline{R(A-\lambda I)}\\R(A-\lambda I)^\perp\\\overline{R(B-\lambda I)}\\R(B-\lambda I)^\perp\end{pmatrix}.$$

因此 $R(M-\lambda I)$ 闭当且仅当 $R(M_1)$ 闭. 其中

$$M_1=\begin{pmatrix}B_{1\lambda}&0&0\\C_4&C_3&0\\C_2&C_1&A_{1\lambda}\end{pmatrix}.$$

根据闭值域定理，$R(M_1^*)$ 是闭的.

$$M_1^*=\begin{pmatrix}B_{1\lambda}^*&C_4^*&C_2^*\\0&C_3^*&C_1^*\\0&0&A_{1\lambda}^*\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}\overline{R(B-\lambda I)}\\R(A-\lambda I)^\perp\\\overline{R(A-\lambda I)}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}N(B-\lambda I)^\perp\\N(B-\lambda I)\\N(A-\lambda I)^\perp\end{pmatrix}.$$

$B_{1\lambda}^*$ 作为 $\overline{R(B-\lambda I)}$ 到 $N(B-\lambda I)^\perp$ 的算子，其值域是稠密的. 根据引理 2，$R(\begin{pmatrix}C_3^*&C_1^*\\0&A_{1\lambda}^*\end{pmatrix})$ 闭. 因此 $R(M_2)$ 是闭的. 其中

$$M_2=\begin{pmatrix}A_{1\lambda}&C_1\\0&C_3\end{pmatrix}.$$

$A_{1\lambda}$ 作为 $N(A-\lambda I)^{\perp}$ 到 $\overline{R(A-\lambda I)}$ 的算子，其值域是稠密的．根据引理 2，$R(C_3)$ 闭．此时，M_2 在空间分解 $N(A-\lambda I)^{\perp}\bigoplus N(C_3)\bigoplus N(C_3)^{\perp}\bigcap N(B-\lambda I)$ 到 $\overline{R(A-\lambda I)}\bigoplus R(C_3)\bigoplus R(C_3)^{\perp}\bigcap R(A-\lambda I)^{\perp}$ 下有如下矩阵形式

$$M_2=\begin{pmatrix} A_{1\lambda} & C_{11} & C_{12} \\ 0 & 0 & C_{31} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}:\begin{pmatrix} N(A-\lambda I)^{\perp} \\ N(C_3) \\ N(C_3)^{\perp}\bigcap N(B-\lambda I) \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} \overline{R(A-\lambda I)} \\ R(C_3) \\ R(C_3)^{\perp}\bigcap R(A-\lambda I)^{\perp} \end{pmatrix}.$$

容易知道 C_{31} 可逆．因此 $R(\begin{pmatrix} A_{1\lambda} & C_{11} \end{pmatrix})$ 是闭的．由条件 (ii) 可知，$R(C_{11})$ 是有限维空间．因此 $R(A_{1\lambda})=R(A-\lambda I)$ 是闭的，即 $\lambda\in\rho_{cr}(A)$．同理 $\lambda\in\rho_{cr}(B)$. □

下面举例子来说明结果的有效性.

例 1. $H_1=H_2=l^2[1,\infty)$, 任取 $x=(x_1,x_2,x_3,...)\in l^2[1,\infty)$, 定义算子 $A\in\mathscr{B}(l^2)$, $B\in\mathscr{B}(l^2)$, $C\in\mathscr{B}(l^2)$ 为

$$Ax=Bx=(x_1,\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\frac{x_4}{4},...),$$
$$Cx=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,...),$$

$$M=\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & I \\ 0 & B \end{pmatrix}H_1\bigoplus H_2\to H_1\bigoplus H_2.$$

容易知道

$$\rho(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda\neq\frac{1}{n},\ \lambda\neq 0,n=1,2,...\},$$
$$\sigma_p(A)=\sigma_{p,3}(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda=\frac{1}{n},n=1,2,...\},$$
$$\sigma_r(A)=\emptyset,\ \ \sigma_c(A)=\{0\}.$$

因此 $\rho_{cr}(A)=\rho_{cr}(B)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda\neq 0\}$. 考虑

$$M-\lambda I=\begin{pmatrix} A-\lambda & I \\ 0 & B-\lambda \end{pmatrix},$$

注意到 C 可逆, 有

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -(B-\lambda) & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A-\lambda & I \\ 0 & B-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -(A-\lambda) & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & I \\ -(B-\lambda)(A-\lambda) & 0 \end{pmatrix}.$$

因此 $R(M-\lambda I)$ 与 $R(-(B-\lambda)(A-\lambda))$ 闭性一致. 对于任意的 $\lambda\in\mathbb{C}$, $n(B-\lambda I)<\infty$, 于是 $R(M-\lambda I)$ 与 $R(A-\lambda)$ 闭性一致, 即 $\rho_{cr}(M)=\rho_{cr}(A)$. 因此

$$\rho_{cr}(M)=\rho_{cr}(A)\cap\rho_{cr}(B)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda\neq 0\}.$$

另一方面, 当 $\lambda \neq 0$ 时, $R(B-\lambda I)$ 闭且 $d(A-\lambda I)<\infty$, 满足定理 4 的条件 (i). 此外,

$$C_3(x_1,x_2,x_3,...)=P_{R(A)^\perp}C\mid_{N(B)}(x_1,x_2,x_3,...)=(0,0,0,...),$$

故 $0\in\rho_{cr}(C_3)$. 考虑到 $d(A-\lambda I)<\infty$ 且 $n(B-\lambda I)<\infty$, 满足定理 4 的条件 (ii). 因此由定理 4 可知

$$\rho_{cr}(M)=\rho_{cr}(A)\cap\rho_{cr}(B).$$

4. 总结与展望

本文主要利用空间分解法，针对分解出的算子矩阵，借助其特性讨论了原算子矩阵的值域闭性，并给出了

$$\rho_{cr}(M)=\rho_{cr}(A)\bigcap\rho_{cr}(B)$$

成立的条件, 其中 $\rho_{cr}(M)=\{\lambda\in\mathbb{C}:R(M-\lambda I)=\overline{R(M-\lambda I)}\}$. 注意, 空间分解法的局限性在于该方法只能用于 $Hilbert$ 空间中, 而不能用在 $Banach$ 空间.

由于本人时间和能力有限, 还有许多问题有待于进一步研究, 例如:

(i) 当算子矩阵 M 不是上三角型的, 而是一般的 2×2 算子矩阵或者是无界算子矩阵时, 其值域闭性还需进一步讨论.

(ii) 在值域闭的基础上讨论上三角型算子矩阵的扰动问题.

以上是作者对本文工作的一个简要的总结和对后续工作的展望. 本文难免会存在疏忽和不妥之处, 敬请翻阅本文的各位老师和学者批评指正.

基金项目

呼和浩特民族学院博士项目(MZXYBS202307)资助。

参考文献

[1] 吴德玉, 阿拉坦仓. 分块算子矩阵谱理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2013.

[2] 徐仲, 张凯院, 陆全, 冷国伟. 矩阵论简明教程[M]. 北京: 科学出版社, 2005.

[3] 青梅. 无界算子矩阵的谱和补问题[D]: [博士学位论文]. 呼和浩特: 内蒙古大学, 2016.

[4] 李小鹏. 3×3 无界上三角矩阵的闭值域谱[D]: [硕士学位论文]. 呼和浩特: 内蒙古大学, 2017.

[5] 李愿. 算子矩阵的左谱[J]. 兰州大学学报: 自然科学版, 2007, 43(6): 117-121.

[6] 秦文青, 侯国林. 3×3 上三角算子矩阵值域的闭性研究[J]. 数学的实践与认识, 2013, 43(19): 258-264.

[7] Wu, X. and Huang, J. (2020) Essential Spectrum of Upper Triangular Operator Matrices. *Annals of Functional Analysis*, **11**, 780-798. https://doi.org/10.1007/s43034-020-00054-0

[8] 海国君, 阿拉坦仓. 2 × 2 阶上三角型算子矩阵的Moore-Penrose谱[J]. 系统科学与数学, 2009, 29(7): 962-970.

[9] Apostol, C. (1985) The Reduced Minimum Modulus. *Michigan Mathematical Journal*, **32**, 279-294. https://doi.org/10.1307/mmj/1029003239

[10] Penrose, R. (1955) A Generalized Inverse for Matrices. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **51**, 406-413. https://doi.org/10.1017/s0305004100030401

[11] Huang, J., Huang, Y. and Wang, H. (2015) Closed Range and Fredholm Properties of Upper-Triangular Operator Matrices. *Annals of Functional Analysis*, **6**, 42-52. https://doi.org/10.15352/afa/06-3-4