**Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2024, 13(11), 5045-5052**
Published Online November 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2024.1311487

# 关于$C_4$对扫帚图和双星图的二部Ramsey数

**郑锡华**

浙江师范大学，数学科学学院，浙江 金华

收稿日期：2024年10月27日；录用日期：2024年11月21日；发布日期：2024年11月28日

## 摘 要

给定简单二部图 $G_1$，$G_2$，二部 **Ramsey** 数 $BR(G_1G_2)$ 表示最小的正整数 $N$，使得对完全二部图 $K_{N,N}$ 的任意生成子图 $G$，要么 $G$ 包含 $G_1$，要么 $\overline{G}$ 包含 $G_2$，其中 $\overline{G}$ 为 $G$ 关于 $K_{N,N}$ 的补图。本文主要研究了 $C_4$ 对扫帚图 $B_{k,m}$ 以及双星图 $B_{(n,m)}$ 这两类特殊类型的树的二部 **Ramsey** 数。

## 关键词

扫帚图，双星图，二部 **Ramsey** 数

# Bipartite Ramsey Numbers for $C_4$ versus Brooms and Bistars

**Xihua Zheng**

School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Oct. $27^{th}$, 2024; accepted: Nov. $21^{st}$, 2024; published: Nov. $28^{th}$, 2024

## Abstract

**For simple bipartite graphs $G_1$, $G_2$, the bipartite Ramsey number $BR(G_1, G_2)$ is the smallest integer $N$ such that given any spanning subgraph $G$ of the complete bipartite**

文章引用: 郑锡华. 关于$C_4$对扫帚图和双星图的二部Ramsey数[J]. 应用数学进展, 2024, 13(11): 5045-5052.
DOI: 10.12677/aam.2024.1311487

**graph $K_{N,N}$, either $G$ contains a copy of $G_1$, or there exists a copy of $G_2$ in $\overline{G}$, where $\overline{G}$ is the complement of $G$ relative to $K_{N,N}$. This article mainly studies the bipartite Ramsey numbers for $C_4$ versus two special types of trees, broom and bistar.**

## Keywords

**Broom, Bistar, Bipartite Ramsey Number**



## 1. 引言

在本文中, 所讨论的图都是简单的, 无向的, 有限图. 对于图 $G = (V(G), E(G))$, 其中 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 $G$ 的顶点集合和边集合, 并且相应地将图 $G$ 的顶点数(也可称为阶数)和边数分别记作 $|V(G)|$ 和 $|E(G)|$. 我们将点 $v$ 在图 $G$ 中的邻域记为 $N_G(v)$, 并将邻域中的邻点个数记为 $|N_G(v)|$, 同时点 $v$ 在图 $G$ 中的邻点个数也可以叫做点 $v$ 在图 $G$ 中的度, 记为 $deg_G(v)$, 简记为 $d_G(v)$. 显然, $|N_G(v)| = d_G(v)$. 若图 $G$ 可以将顶点集分为 $X$, $Y$ 两部, 其中边只在 $X$ 和 $Y$ 之间存在, 则图 $G$ 称为二部图, 记作 $G[X,Y]$. 对于二部图 $G[X,Y]$, 如果 $X$ 中的每个顶点与 $Y$ 中的每个顶点都相邻, 则称 $G[X,Y]$ 为完全二部图, 此时若 $|X| = m$, $|Y| = n$, 则记为 $K_{m,n}$. 设图 $G = (V(G), E(G))$ 和图 $H = (V(H), E(H))$, 若满足 $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$, 则称 $H$ 是 $G$ 的子图, 记作 $H \subseteq G$. 特别地, 对于 $H \subseteq G$, 若 $V(H) \not\subseteq V(G)$ 或 $E(H) \not\subseteq E(G)$, 则称 $H$ 是 $G$ 的真子图; 若 $V(H) = V(G)$, 则称 $H$ 是 $G$ 的生成子图. 除此之外, 在本文中, $C_4$ 表示阶数为 4 的圈, $P_n$ 表示阶数为 $n$ 的路, $K_{1,n}$ 表示度数为 $n$ 的星, 扫帚 $B_{k,m}$ 表示将星 $K_{1,k}$ 的中心点与路 $P_m$ 的一个端点黏成一个点后所得到的树图, 双星 $B_{(n,m)}$ 表示将星 $K_{1,n-1}$ 的中心点与星 $K_{1,m-1}$ 的中心点相连后所得到的树图.

给定简单图 $G_1$, $G_2$, Ramsey 数 $R(G_1, G_2)$ 表示最小的正整数 $N$, 使得对于完全图 $K_N$ 的任意生成子图 $G$, 要么 $G$ 包含 $G_1$, 要么 $\overline{G}$ 包含 $G_2$, 其中 $\overline{G}$ 为 $G$ 关于 $K_N$ 的补图. 随着对 Ramsey 数研究的深入, Faudree 和 Schelp [1] 以及 Gyárfás 和 Lehel [2] 开始用完全二部图 $K_{N,N}$ 代替 Ramsey 数定义中的基础图 $K_N$, 由此二部 Ramsey 数开始进入人们视野. 给定简单二部图 $G_1$, $G_2$, 二部 Ramsey 数 $BR(G_1, G_2)$ 表示最小的正整数 $N$, 使得对完全二部图 $K_{N,N}$ 的任意生成子图 $G$, 要么 $G$ 包含 $G_1$, 要么 $\overline{G}$ 包含 $G_2$, 其中 $\overline{G}$ 为 $G$ 关于 $K_{N,N}$ 的补图.

在 1989 年, Burr [3] 等人研究了 $C_4$ 对树的 Ramsey 数, 即下面的定理 1 .

**定理1.** *( [3]) 设 $T$ 是阶数为 $n$, 最大度为 $m$ 的任意形状的树, 则有*

$$R(C_4,T)=\max\{4,n+1,R(C_4,K_{1,m})\}.$$

定理 1 说明了 $C_4$ 对树的 Ramsey 数可以借助 $C_4$ 对星的 Ramsey 数以及树的阶数刻画出来. 而在二部 Ramsey 数中很难证明类似的结论, 目前关于 $C_4$ 对树的二部 Ramsey 数的内容大部分都是关于 $C_4$ 对星的二部 Ramsey 数. 在 2000 年, Carnielli 和 Carmelo [4] 给出了关于 $C_4$ 对星 $K_{1,n}$ 的二部 Ramsey 数 $BR(C_4,K_{1,n})$ 的上界.

**定理2.** *( [4] ) 对于所有正整数 $n\geq 2$, 有 $BR(C_4,K_{1,n})\leq n+\lceil\sqrt{n}\rceil$.*

本文的主要内容是在 $C_4$ 对星的二部 Ramsey 数的基础上来研究 $C_4$ 对扫帚 $B_{k,m}$ 和双星 $B_{(n,m)}$ 这两个特殊类型的树的二部 Ramsey 数. 主要结果如下.

**定理3.** *对所有的正整数 $k\geq 2$, $m\geq 2$, 有*

$$BR(C_4,B_{k,m})=\begin{cases} k+\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor+1, & k+\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor+1\geq BR(C_4,K_{1,k+1}),\\ BR(C_4,K_{1,k+1}), & k+\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor+1< BR(C_4,K_{1,k+1}).\end{cases}$$

**定理4.** *对所有的正整数 $n\geq m\geq 2$, 有 $BR(C_4,B_{(n,m)})\leq n+\lceil\sqrt{n}\rceil$.*

## 2. 定理 3 的证明

对于定理 3 的证明, 除了要借助关于 $C_4$ 对星的二部 Ramsey 数外, 我们还需要用到以下与 $C_4$ 和路相关的命题.

**命题1.** *( [5]) 对于 $K_{3,4}$ 的任意子图 $G$, 要么有 $P_5\subseteq G$ 要么有 $C_4\subseteq\overline{G}$.*

我们将命题 1 进行推广, 得到下面引理.

**引理1.** *对于 $K_{m,m+1}$ 的任意子图 $G$, 要么有 $P_{2m-1}\subseteq G$ 要么有 $C_4\subseteq\overline{G}$, 其中 $m\geq 3$.*

*Proof.* 这里对 $m$ 进行归纳. 当 $m=3$ 时, 由命题 1 可知结论显然成立. 假设当 $m=n$ 时结论成立, 则下面证明当 $m=n+1$ 时结论也成立. 运用反证法, 假设存在一个 $K_{n+1,n+2}$ 的任意子图 $G$, 使得 $P_{2n+1}\not\subseteq G$ 且 $C_4\not\subseteq\overline{G}$. 令 $(X,Y)$ 为 $K_{n+1,n+2}$ 的两个部, 其中 $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}\},Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_{n+1},y_{n+2}\}$. 根据归纳假设, 在 $G$ 中存在 $P_{2n-1}$. 接下来根据 $P_{2n-1}$ 在 $G$ 的两部中分布的点数进行分类讨论:

**情况 1** $|V(P_{2n-1})\cap X|=n$.

不失一般性, 假设 $P_{2n-1}=x_1y_1\ldots x_{n-1}y_{n-1}x_n$. 因为 $C_4\not\subseteq\overline{G}$, 所以在 $\{x_1,x_n\}\times\{y_n,y_{n+1}\}$ 中一定有一条边在 $G$ 中, 不妨假设 $x_ny_n$ 在 $G$ 中. 因为 $P_{2n+1}\not\subseteq G$, 所以有 $x_1y_{n+1},x_1y_{n+2},x_{n+1}y_n\in E(\overline{G})$. 根据假设 $C_4\not\subseteq\overline{G}$, 这意味着点 $x_{n+1}$ 与点 $\{y_{n+1},y_{n+2}\}$ 中至少一点在 $G$ 中相邻, 不妨设为 $y_{n+1}$. 另一方面 $P_{2n+1}\not\subseteq G$, 我们有 $x_ny_{n+1}\in E(\overline{G})$. 又因为 $C_4\not\subseteq\overline{G}$, 所以有 $x_ny_{n+2}\in E(G)$ 成立. 并且一定会有 $x_{n+1}y_{n+2}\in E(\overline{G})$, 否则 $P_{2n+1}\subseteq G$. 若 $x_1y_n\in E(G)$, 这意味着 $P_{2n+1}\subseteq G$, 与假设矛盾; 若 $x_1y_n\in E(\overline{G})$, 则会有 $C_4\subseteq\overline{G}$, 再次与假设矛盾. 由此证明对于情况 1 , 结论成立.

**情况 2** $|V(P_{2n-1})\cap X|=n-1$.

不失一般性, 假设 $P_{2n-1}=y_1x_1\dots y_{n-1}x_{n-1}y_n$. 因为 $C_4\not\subseteq\overline{G}$, 所以在 $\{x_n,x_{n+1}\}\times\{y_1,y_n\}$ 中至少有一条边属于 $E(G)$, 不妨假设 $x_ny_n\in E(G)$. 由 $P_{2n+1}\not\subseteq G$ 可知, $x_{n+1}y_1,x_ny_{n+1},x_ny_{n+2}\in E(\overline{G})$. 由假设 $C_4\not\subseteq\overline{G}$ 我们同样可以推出点 $x_{n+1}$ 与点 $\{y_{n+1},y_{n+2}\}$ 中至少一点在 $G$ 中相邻, 不妨设为 $x_{n+1}y_{n+1}\in E(G)$. 又因为 $P_{2n+1}\not\subseteq G$, 所以一定有 $x_1y_{n+1}\in E(\overline{G})$. 根据假设 $C_4\not\subseteq\overline{G}$, 可以得到边 $x_1y_{n+2}$ 一定在 $G$ 中. 并且又因为 $P_{2n+1}\not\subseteq G$ 可推出 $x_{n+1}y_{n+2}\in E(\overline{G})$. 此时, 不管边 $x_ny_1$ 属于 $E(G)$ 还是 $E(\overline{G})$, 都会与假设相矛盾. 由此证明对于情况 2 结论也成立. 证毕. ■

下面我们根据引理 1 来证明下面的引理 2 和引理 3 .

**引理2.** 对所有的正整数 $k\geq 2$, $m\geq 2$, 若满足 $k+\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1\geq BR(C_4,K_{1,k+1})$, 则有

$$BR(C_4,B_{k,m})=k+\left\lfloor\tfrac{m}{2}\right\rfloor+1.$$

*Proof.* 令 $t=k+\lfloor\frac{m}{2}\rfloor$. 在 $K_{t,t}$ 中, 令 $G$ 为 $K_{t,t}$ 的子图, 其中 $G\cong K_{t-1,t-1}$, 则 $\overline{G}\cong B_{(t,t)}$. 那么显然 $B_{k,m}\not\subseteq G$ 且 $C_4\not\subseteq\overline{G}$. 由此说明 $BR(C_4,B_{k,m})\geq t+1$. 对于下界的证明我们是运用反证法. 假设 $BR(C_4,B_{k,m})>t+1$, 即在 $K_{t+1,t+1}$ 中存在一个子图 $G$, 使得 $B_{k,m}\not\subseteq G$ 且 $C_4\not\subseteq\overline{G}$. 令 $(X,Y)$ 为 $K_{t+1,t+1}$ 的两个部, 其中 $X=\{x_1,x_2,\dots,x_{t+1}\}$, $Y=\{y_1,y_2,\dots,y_{t+1}\}$. 因为 $t+1\geq BR(C_4,K_{1,k+1})$ 且 $C_4\not\subseteq\overline{G}$, 所以有 $K_{1,k+1}\subseteq G$. 不失一般性, 假设 $K_{1,k+1}$ 由点 $x_1,y_1,y_2,\dots,y_{k+1}$ 构成, 其中点 $x_1$ 为 $K_{1,k+1}$ 的中心点. 令 $X_1:=X\setminus\{x_1\}$, $Y_1:=Y\setminus\{y_1,y_2,\dots,y_{k+1}\}$. 因为 $C_4\not\subseteq\overline{G}$, 根据引理 1 可知, 在 $G[X_1,Y_1]$ 中存在 $P_{2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor-1}$. 设 $u,v$ 为 $P_{2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor-1}$ 的两个端点, 且 $u',v'$ 分别为 $u,v$ 的邻点.

当 $m$ 为偶数时, 此时 $P_{2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor-1}=P_{m-1}$, 我们考虑以下两种情况:

**情况 1** $u,v\in V(X)$.

因为 $B_{k,m}\not\subseteq G$, 则有$\{u,v\}\times\{y_1,y_2,\dots,y_{k+1}\}\in E(\overline{G})$, 这样会在 $\overline{G}$ 中产生 $C_4$, 与假设矛盾.

**情况 2** $u,v\in V(Y)$.

此时 $u',v'\in V(X)$. 因为 $B_{k,m}\not\subseteq G$, 则有$\{u',v'\}\times\{y_1,y_2,\dots,y_{k+1}\}\in E(\overline{G})$, 同样也会在 $\overline{G}$ 中产生 $C_4$, 与假设矛盾.

当 $m$ 为奇数时, 此时 $P_{2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor-1}=P_{m-2}$, 我们也考虑以下两种情况:

**情况 3** $u,v\in V(X)$.

此时与情况 1 一样, 与假设矛盾.

**情况 4** $u,v\in V(Y)$.

不失一般性, 假设 $P_{m-2}=y_{k+2}x_{k+2}\dots y_tx_ty_{t+1}$. 令 $X_2:=X_1\setminus V(P_{m-2})$. 若 $N_G(x_{k+2})\cap V(K_{1,k+1})\neq\emptyset$, 不妨设 $x_{k+2}y_1\in E(G)$. 因为 $B_{k,m}\not\subseteq G$, 则有 $|N_{\overline{G}}(y_{t+1})\cap X_2|=|X_2|=k+1$. 又因为 $C_4\not\subseteq\overline{G}$, 我们有 $|N_G(y_i)\cap X_2|\geq k$, 其中 $i=1,k+2$. 由 $k\geq 2$, 我们可推出 $|N_G(y_1)\cap N_G(y_{k+2})\cap X_2|\neq 0$, 这意味着 $B_{k,m}\subseteq G$, 与假设矛盾. 因此, $N_G(x_{k+2})\cap V(K_{1,k+1})=\emptyset$. 同理, 对于点 $x_t$, 也可以推出 $N_G(x_t)\cap V(K_{1,k+1})=\emptyset$. 所以 $C_4\subseteq\overline{G}$. 再次与假设矛盾. 由此证明了引理 2 成立. ■

**引理3.** 对所有的正整数 $k \geq 2$, $m \geq 2$, 若满足 $k + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1 < BR(C_4, K_{1,k+1})$, 则有

$$BR(C_4, B_{k,m}) = BR(C_4, K_{1,k+1}).$$

*Proof.* 因为 $K_{1,k+1} \subseteq B_{k,m}$, 所以有 $BR(C_4, B_{k,m}) \geq BR(C_4, K_{1,k+1})$. 令 $p = BR(C_4, K_{1,k+1})$, 根据条件可得到 $p \geq k + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$. 同样这里运用反正法去证明下界. 假设 $BR(C_4, B_{k,m}) > p$, 即存在一个图 $G \subseteq K_{p,p}$, 使得 $B_{k,m} \nsubseteq G$ 且 $C_4 \nsubseteq \overline{G}$. 令 $(X, Y)$ 为 $K_{p,p}$ 的两个部, 其中 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}, Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_p\}$. 因为 $BR(C_4, B_{k,m}) > p$ 且 $C_4 \nsubseteq \overline{G}$, 所以有 $K_{1,k+1} \subseteq G$. 不失一般性, 假设 $K_{1,k+1}$ 由点 $x_1, y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}$ 构成, 其中点 $x_1$ 为 $K_{1,k+1}$ 的中心点. 令 $X_1 := X \setminus \{x_1\}$, $Y_1 := Y \setminus \{y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}\}$. 因为 $C_4 \nsubseteq \overline{G}$, 根据引理 1 可知, $P_{2(p-k-1)-1} \subseteq G[X_1, Y_1]$. 因为 $p \geq k + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$, 所以 $2(p-k-1) - 1 \geq 2(\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1) - 1 \geq m$. 所以在 $G[X_1, Y_1]$ 中存在阶数至少为 $m$ 的路. 设 $u, v$ 为 $P_m$ 的两个端点, 且 $u', v'$ 分别为 $u, v$ 的邻点. 因为 $B_{k,m} \nsubseteq G$, 所以当 $m$ 为偶数时, 要么 $\{u, v'\} \times \{y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}\} \in E(\overline{G})$ 要么 $\{u', v\} \times \{y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}\} \in E(\overline{G})$, 都会有 $C_4 \subseteq \overline{G}$, 与假设矛盾; 当 $m$ 为奇数时, 要么 $\{u, v\} \times \{y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}\} \in E(\overline{G})$ 要么 $\{u', v'\} \times \{y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}\} \in E(\overline{G})$, 也会有 $C_4 \subseteq \overline{G}$, 与假设矛盾. 证毕. ■

结合引理 2 和引理 3, 我们可以得到定理 3.

**定理 3** 对所有的正整数 $k \geq 2$, $m \geq 2$, 有

$$BR(C_4, B_{k,m}) = \begin{cases} k + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1, & k + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1 \geq BR(C_4, K_{1,k+1}), \\ BR(C_4, K_{1,k+1}), & k + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1 < BR(C_4, K_{1,k+1}). \end{cases}$$

## 3. 定理 4 的证明

在证明定理 4 之前, 我们先来介绍下二部 Turán 数. 二部 Turán 数 $ex(m, n, H)$, 是指在二部图 $G[X, Y]$ 中不包含图 $H$ 的最大边数, 其中 $(|X|, |Y|) = (m, n)$. 特别地, 若 $m = n = N$ 且 $H = K_{s,t}$, 此时 $ex(N, N, K_{s,t})$ 就是"平衡"情况下的 Zarankiewicz 数. 为了证明定理 4 , 我们需要用到下面关于 $C_4$ 的二部 Turán 数的定理.

**引理4.** *( [6])* 对所有的 $N$, 有 $ex(N, N, C_4) \leq N(\sqrt{N - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2})$.

在引理 4 的基础上, 我们来证明定理 4.

**定理 4** 对所有的正整数 $n \geq m \geq 2$, 有 $BR(C_4, B_{(n,m)}) \leq n + \lceil \sqrt{n} \rceil$.

*Proof.* 因为 $B_{(n,1)} \subseteq \cdots \subseteq B_{(n,n)}$, 所以有 $BR(C_4, B_{(n,1)}) \leq \cdots \leq BR(C_4, B_{(n,n)})$. 因此, 我们只需要证明 $BR(C_4, B_{(n,n)}) \leq n + \lceil \sqrt{n} \rceil$ 成立即可. 运用反证法, 假设 $BR(C_4, B_{(n,n)}) > n + \lceil \sqrt{n} \rceil$, 即存在一个 $K_{\left(n+\lceil \sqrt{n} \rceil, n+\lceil \sqrt{n} \rceil\right)}$ 的子图 $G$, 使得 $B_{(n,n)} \nsubseteq G$ 且 $C_4 \nsubseteq \overline{G}$. 令 $(X, Y)$ 为 $K_{\left(n+\lceil \sqrt{n} \rceil, n+\lceil \sqrt{n} \rceil\right)}$ 的两个部, 其中 $X = \left\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+\lceil \sqrt{n} \rceil}\right\}, Y = \left\{y_1, y_2, \ldots, y_{n+\lceil \sqrt{n} \rceil}\right\}$. 根据引理 1 , $BR(C_4, K_{1,n}) \leq n + \lceil \sqrt{n} \rceil$, 因为 $C_4 \nsubseteq \overline{G}$, 所以在 $G$ 中存在星 $K_{1,n}$. 不妨设 $K_{1,n}$ 由点 $x_1, y_1, y_2, \ldots, y_n$ 构成, 其中点

DOI: 10.12677/aam.2024.1311487

$x_1$ 为 $K_{1,n}$ 的中心点. 令 $Y_1 := Y \cap V(K_{1,n})$, $Y_2 := Y \setminus Y_1$.

$B_{(n,n)} \nsubseteq G$, 所以对于任意点 $y \in Y_1$, 有 $|N_G(y) \cap X \setminus \{x_1\}| \le n-2$, 即 $|N_{\overline{G}}(y) \cap X \setminus \{x_1\}| \ge \lceil\sqrt{n}\rceil + 1$. 对于点 $y_1$, 设 $X_1 \subseteq (N_{\overline{G}}(y) \cap X \setminus \{x_1\})$, 使得 $|X_1| = \lceil\sqrt{n}\rceil + 1$. 因为 $C_4 \nsubseteq \overline{G}$, 所以对于 $Y \setminus \{y_1\}$ 中每个点 $y'$, 会有 $|N_G(y') \cap X_2| \ge \lceil\sqrt{n}\rceil$. 若 $2 \le n \le 3$, 则 $\lceil\sqrt{n}\rceil \ge n-1$, 这意味着存在一个双星 $B_{(n,n)}$ 在 $G$ 中, 与假设矛盾. 接下来, 我们讨论当 $n \ge 4$ 的情况. 由前面可知, 在 $G[X_1, Y \setminus \{y_1\}]$ 中, 至少有 $\left(n + \lceil\sqrt{n}\rceil - 1\right)\left(\lceil\sqrt{n}\rceil\right)$ 条边. 因为

$$\frac{\left(n + \lceil\sqrt{n}\rceil - 1\right)\left(\lceil\sqrt{n}\rceil\right)}{\lceil\sqrt{n}\rceil + 1} > n - 1,$$

所以在 $X_2$ 中一定存在一个点 $x_0$, 使得 $d_G(x_0) \ge n$. 由假设 $B_{(n,n)} \nsubseteq G$, 所以对于任意一点 $u \in Y_1$, 有 $d_G(u) \le n-1$. 若对于 $Y_2$ 中的任意一点 $v$, 也满足 $d_G(v) \le n-1$. 则有

$$\begin{aligned}\left|E(\overline{G})\right|_{min} = \left|E(k)\right| - \left|E(G)\right|_{max} &= (n + \lceil\sqrt{n}\rceil)(n + \lceil\sqrt{n}\rceil) - (n-1)(n + \lceil\sqrt{n}\rceil) \\ &= \lceil\sqrt{n}\rceil^2 + (n+1)\lceil\sqrt{n}\rceil + n,\end{aligned}$$

其中 $|E(k)|$ 表示完全二部图 $K_{\left(n+\lceil\sqrt{n}\rceil, n+\lceil\sqrt{n}\rceil\right)}$ 的边数.

根据引理 4, 可以得到

$$\begin{aligned}ex(n + \lceil\sqrt{n}\rceil, n + \lceil\sqrt{n}\rceil, C_4) &\le (n + \lceil\sqrt{n}\rceil)\left(\sqrt{n + \lceil\sqrt{n}\rceil - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\right) \\ &< (n + \lceil\sqrt{n}\rceil)\left(\sqrt{n + \lceil\sqrt{n}\rceil + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right) \\ &\le (n + \lceil\sqrt{n}\rceil)(\lceil\sqrt{n}\rceil + 1) \\ &= \lceil\sqrt{n}\rceil^2 + (n+1)\lceil\sqrt{n}\rceil + n \\ &= \left|E(\overline{G})\right|_{min}.\end{aligned}$$

这意味着 $C_4 \subseteq \overline{G}$, 与假设矛盾. 因此, 一定存在一个点 $u' \in Y_2$, 使得 $d_G(u') \ge n$. 接下来, 我们可运用与前面一样找点 $x_0$ 一样的方法, 在 $Y$ 找到一个点 $y_0$, 使 $y_0$ 满足 $d_G(y_0) \ge n$. 由此可以得到在 $G$ 中, 点 $x_1$, $x_0$, $u'$, $y_0$ 的度都是大于等于 $n$ 的, 其中 $x_1, x_0 \in V(X)$, $u', y_0 \in V(Y)$. 所以要么有 $B_{(n,n)} \subseteq G$ 要么有 $C_4 \nsubseteq \overline{G}$, 与假设相矛盾.

证毕. ■

定理 4 说明了 $BR(C_4, B_{(n,m)})$ 与 $BR(C_4, K_{1,n})$ 具有相同的上界, 并且我们可以很快得到以下推论.

**推论1.** 对所有的正整数 $n \ge m \ge 2$, 若 $BR(C_4, K_{1,n}) = n + \lceil\sqrt{n}\rceil$, 则有 $BR(C_4, B_{(n,m)}) = n + \lceil\sqrt{n}\rceil$.

*Proof.* 因为 $K_{1,n}) \subseteq B_{(n,m)}$, 所以显然 $BR(C_4, K_{1,n}) \le BR(C_4, B_{(n,m)})$. 因为 $BR(C_4, K_{1,n}) = n + \lceil\sqrt{n}\rceil$, 根据定理 4, 容易得到推论成立. ■

以下还有一些关于二部 Ramsey 数 $BR(C_4, K_{1,n})$ 的结论.

**引理5.** *( [4])* 对于足够大的正整数 $n$, 有 $BR(C_4, K_{1,n+1}) > n + \sqrt{n} - 6n^{\frac{11}{40}}$.

**引理6.** *( [7])* 若存在 $q$ 阶射影平面但不存在 $q+1$ 阶射影平面, 则 $BR(C_4, K_{1,q^2+1}) = q^2 + q + 1$.

根据引理 5 和引理 6 我们可以得到以下两个推论.

**推论2.** 对于足够大的正整数 $n$ 和任意正整数 $m$, $n \geq m$, 有 $BR(C_4, B_{n,m}) > n + \sqrt{n} - 6n^{\frac{11}{40}}$.

*Proof.* 因为 $K_{1,n+1} \subseteq B_{n,m}$, 所以有 $BR(C_4, B_{n,m}) \geq BR(C_4, K_{1,n+1})$. 再结合引理 5, 则推论成立. ■

**推论3.** 若存在 $q$ 阶射影平面但不存在 $q+1$ 阶射影平面, 对所有的正整数 $m \leq q^2+1$, 有

$$BR(C_4, B_{(q^2+1,m)}) = q^2 + q + 1.$$

*Proof.* 因为 $K_{1,q^2+1} \subseteq B_{(q^2+1,m)}$, 由引理 6 可得到 $q^2+q+1 = BR(C_4, K_{1,q^2+1}) \leq BR(C_4, B_{(q^2+1,m)})$, 由此证明了下界. 对于上界的证明, 只需证明当 $m = q^2+1$ 时, 结论成立即可. 运用反证法, 设 $BR(C_4, B_{(q^2+1,q^2+1)}) > q^2+q+1$, 即存在一个 $K_{q^2+q+1,q^2+q+1}$ 的子图 $G$, 使得 $B_{(q^2+1,q^2+1)} \nsubseteq G$ 且 $C_4 \nsubseteq \overline{G}$. 令 $(X, Y)$ 为 $K_{q^2+q+1,q^2+q+1}$ 的两个部, 其中 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{q^2+q+1}\}, Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_{q^2+q+1}\}$. 根据假设与引理 6, 可知 $K_{1,q^2+1} \subseteq G$, 不失一般性, 设 $K_{1,q^2+1}$ 由点 $x_1, y_1, y_2, \ldots, y_{q^2+1}$ 构成, 其中点 $x_1$ 为 $K_{1,q^2+1}$ 的中心点. 令 $Y_1 := \{y_1, y_2, \ldots, y_{q^2+1}\}$.

对于任意点 $x \in X \setminus \{x_1\}$, 若 $|N_{\overline{G}}(x) \cap Y_1| \leq q$, 则 $|N_G(x) \cap Y_1| \geq q^2+1-q$. 则在图 $G[X \setminus \{x_1\}, Y_1]$ 中至少有 $(q^2+q)(q^2+1-q)$ 条边. 因为

$$\frac{(q^2+q)(q^2+1-q)}{q^2+1} > q^2 - 1,$$

所以在 $Y_1$ 中一定存在一个点 $u$, 使得 $|N_G(u) \cap X \setminus \{x_1\}| \geq q^2$, 这意味着 $B_{(q^2+1,q^2+1)} \subseteq G$, 与假设矛盾. 因此在 $X \setminus \{x_1\}$ 中一定存在一点 $v$, 满足 $|N_{\overline{G}}(v) \cap Y_1| \geq q+1$. 令 $A \subseteq N_{\overline{G}}(v) \cap Y_1$, 使得 $|A| = q+1$. 因为 $C_4 \nsubseteq \overline{G}$, 所以对于任意点 $x \in X \setminus \{x_1, v\}$, 有 $|N_G(x) \cap A| \geq q$. 因为

$$\frac{q(q^2+q-1)}{q+1} > q^2 - 1,$$

所以存在一个点 $y' \in A$, 使得 $|N_G(y') \cap X \setminus \{x_1, v\}| \geq q^2$, 因此会有 $B_{(q^2+1,q^2+1)} \subseteq G$, 再次与假设矛盾. 由此证明推论成立. ■

## 4. 结语

本文得到了关于 $C_4$ 对 扫帚 $B_{k,m}$, 双星 $B_{(n,m)}$ 这两个特殊类型的树的二部 Ramsey 数, 在后面的研究中, 将进一步思考 $C_4$ 对任意形状的树 $T$ 的二部 Ramsey 数, 并且我们猜测, $BR(C_4, T)$ 会有与 $R(C_4, T)$ 相类似的结论, 由此得到以下猜想.

**猜想1.** 对于任意树 $T$, 设 $T$ 的最大度为 $n$ , 将 $T$ 的顶点集分为 $A$, $B$ 两个部, 边只在 $A$ 和 $B$ 两个部之间存在, 不妨假设 $|A| \geq |B|$ 且 $|A| = m$, 则会有

$$BR(C_4, T) = \max\{BR(C_4, K_{1,n}), m+1\}.$$

# 参考文献


[1] Faudree, R.J. and Schelp, R.H. (1975) Path-path Ramsey-Type Numbers for the Complete Bipartite Graph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **19**, 161-173. https://doi.org/10.1016/0095-8956(75)90081-7

[2] Gyárfás, A. and Lehel, J. (1973) A Ramsey-Type Problem in Directed and Bipartite Graphs. *Periodica Mathematica Hungarica*, **3**, 299-304. https://doi.org/10.1007/bf02018597

[3] Burr, S., Erdös, P., Faudree, R.J., Rousseau, C.C. and Schelp, R.H. (1988) Some Complete Bipartite Graph—Tree Ramsey Numbers. In: *Annals of Discrete Mathematics*, Vol. 41, Elsevier, 79-89. https://doi.org/10.1016/s0167-5060(08)70452-7

[4] Carnielli, W.A. and Carmelo, E.L.M. (2000) $K_{2,2} - K_{1,n}$ and $K_{2,n} - K_{2,n}$ bipartite Ramsey numbers. *Discrete Mathematics*, **223**, 83-92. https://doi.org/10.1016/s0012-365x(00)00041-8

[5] Rowshan, Y. and Gholami, M. (2022) Multicolor Bipartite Ramsey Numbers for Paths, Cycles, and Stripes. *Computational and Applied Mathematics*, **42**, Article No. 25. https://doi.org/10.1007/s40314-022-02166-w

[6] Reiman, I. (1958) Über ein Problem von K. Zarankiewicz. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, **9**, 269-273. https://doi.org/10.1007/bf02020254

[7] Hatala, I., Héger, T. and Mattheus, S. (2021) New Values for the Bipartite Ramsey Number of the Four-Cycle versus Stars. *Discrete Mathematics*, **344**, Article 112320. https://doi.org/10.1016/j.disc.2021.112320